



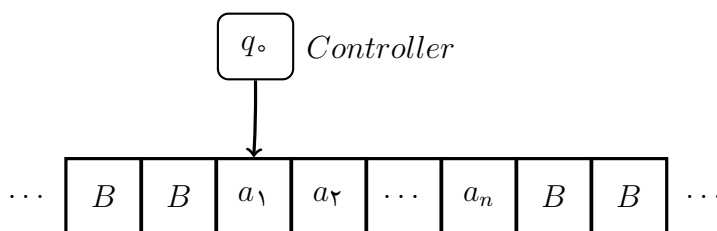
جلسه‌ی ۲۴: ماشین تورینگ

نگارندگان: حمید ملک و امین خسروشاهی

مدرس: دکتر شهرام خزائی

۱ ماشین تورینگ

تعریف ۱ (تعریف غیررسمی ماشین تورینگ) ماشینی است که در نگاه اول می‌توان آن را یک پذیرنده‌ی زبان به حساب آورد، و همچنین می‌توان به عنوان یک محاسبه‌کننده آن را در نظر گرفت. این ماشین دارای یک کنترل‌کننده حالت^۱ و یک نوار حافظه^۲ به طول بی‌نهایت است. همچنین دارای یک اشاره‌گر^۳ است که به جایی از حافظه اشاره می‌کند که در حال خواندن آن است.



در این ماشین در هر مرحله کنترل‌کننده‌ی حالت بر حسب حالت جاری و اطلاعاتی که از اشاره‌گر می‌گیرد فعالیتی انجام می‌دهد، که عبارت است از به‌روز کردن حافظه و حرکت به چپ یا راست بر روی آن است.

در ابتدا ماشین در حالت اولیه q_0 قرار دارد و نوار حاوی رشته‌ی ورودی $w = a_1 \dots a_n$ است که از دو طرف با دنباله‌ای نامتناهی از نمادهای خالی احاطه شده است. همچنین اشاره‌گر به چپ‌ترین حرف رشته‌ی ورودی اشاره می‌کند.

تعریف ۲ (تعریف رسمی ماشین تورینگ) ماشین تورینگ یک هفت‌تایی منظم است به صورت

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

که در آن

^۱ state controller

^۲ tape

^۳ head

- Q عبارت است از مجموعه‌ی حالات ماشین
- Σ عبارت است از الفبای رشته‌ی ورودی
- Γ عبارت است از الفبای نوار حافظه (که $\Sigma \subseteq \Gamma$)
- δ تابع (جزئی) انتقال حالت است که $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$
- q_0 که همان حالت اولیه است
- $B \in \Gamma - \Sigma$ نماد خالی (مخفف blank) است که
- F که مجموعه‌ی حالات نهایی است

قرارداد ۱ همانند گذشته یک دسته قرارداد برای نام‌گذاری متغیرها وضع می‌کنیم:

- a, b, c, \dots برای حروف الفبای ورودی
- X, Y, Z, \dots برای حروف الفبای نوار حافظه
- w, x, y, z, \dots برای رشته‌های الفبای ورودی
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ برای رشته‌های روی الفبای نوار
- D برای نمایش جهت راست (R) یا چپ (L)

نکته ۱ توجه داشته باشید که δ یک تابع جزئی است، بدین معنا که ممکن است بر روی بخشی از دامنه‌ی خود تعریف نشده باشد. به عبارت دیگر $\delta(p, X) = (q, Y, D)$ که همان‌طور که گفته شد به صورت یک سه‌تایی مرتب است و یا تعریف نشده است. اگر در موقعیتی قرار بگیریم که δ تعریف نشده باشد، ماشین دیگر حرکت نمی‌کند و متوقف^۴ می‌شود.

مثال ۱ می‌خواهیم ماشین تورینگی طراحی کنیم که:

- رشته‌ی ورودی را به سمت راست می‌خواند تا به ۱ برسد.
- اگر ۱ پیدا کرد، آن را به صفر تغییر دهد و به حالت نهایی برود.
- اگر به B برسد، آن را به ۱ تغییر می‌دهد و به سمت چپ حرکت می‌کند.

^۴halt

در این مثال دو حالت داریم؛ اولیه و نهایی. بقیه‌ی مولفه‌ها نیز به صورت زیر است:

$$Q = \{q, f\}$$

$$F = \{f\}$$

$$\Sigma = \{o, \wedge\}$$

$$\Gamma = \{o, \wedge, B\}$$

حال باید تابع δ را تعریف کنیم:

$$\delta : Q \times F \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$$

به این علت که باید پس از خواندن صفر تنها به خانه‌ی بعدی برویم:

$$\delta(q, o) = (q, o, R)$$

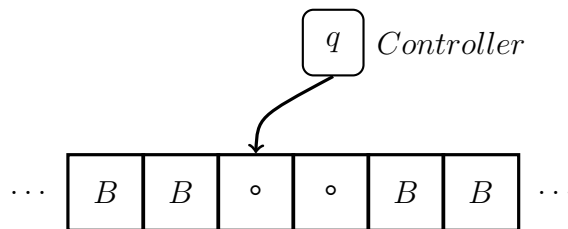
به این علت که باید پس از رسیدن به یک آن را به صفر تغییر داد و به حالت نهایی رفت:

$$\delta(q, \wedge) = (f, o, R)$$

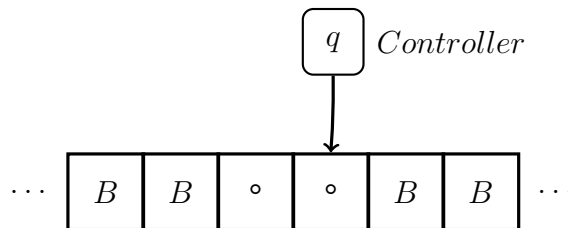
به این علت که باید پس از رسیدن به B تغییر گفته شده را انجام دهیم:

$$\delta(q, B) = (q, \wedge, L)$$

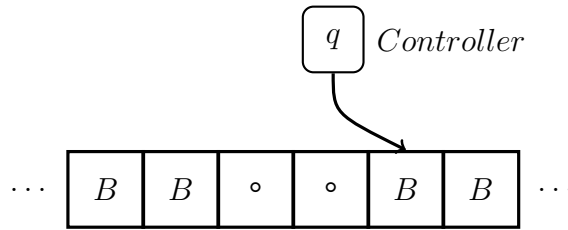
به طور مثال مراحل پردازش رشته‌ی oo به صورت زیر است:



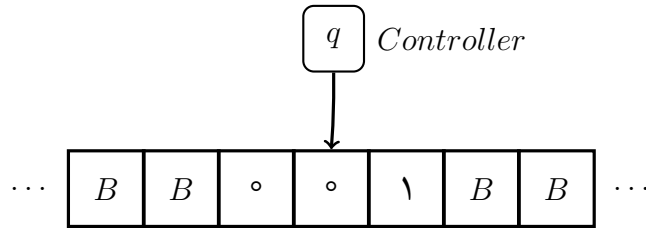
با خواندن o بدون تغییر محتوای نوار به سمت راست می‌رویم:



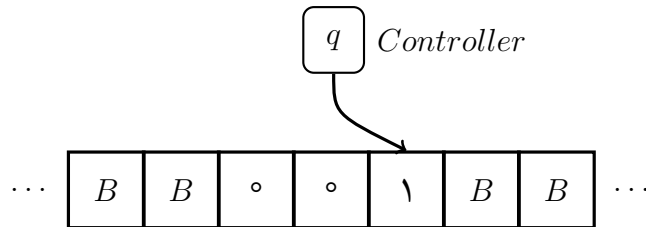
مانند مرحله‌ی قبلی عمل می‌کنیم:



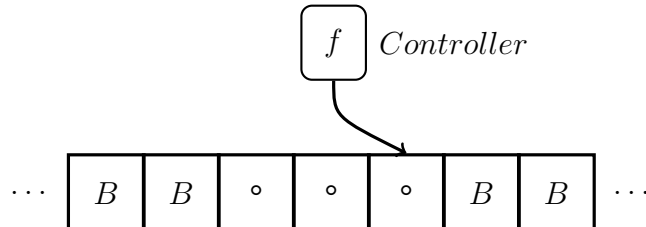
با خواندن B آن را به یک تغییر می‌دهیم و به سمت چپ می‌رویم:



به سمت راست رفته و نوار حافظه را تغییر نمی‌دهیم:



با خواندن 1 آن را به o تغییر داده و به حالت نهایی می‌رویم و پردازش رشته‌ی ورودی پایان یافته است:

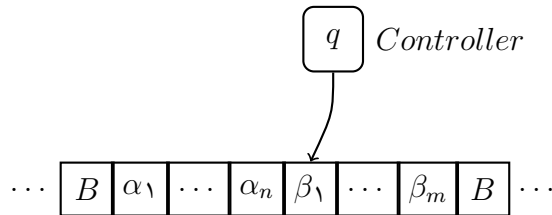


۲ توصیف آنی

برای اینکه زبان یک ماشین تورنگ را تعریف کنیم، همانند کاری که برای ماشین‌های پشته‌ای انجام دادیم، وضعیت ماشین را با یک توصیف آنی پیام می‌کنیم. در واقع توصیف آنی به ما می‌گوید که ماشین در چه وضعیتی قرار دارد، محتویات بخش غیرخالی نوار چيست و اشاره گر به کدام خانه اشاره می‌کند.

تعریف ۳ (توصیف آنی) رشته‌ی $\alpha q \beta$ را یک توصیف آنی از ماشین تورینگ می‌گوییم اگر:

- ماشین در حالت q باشد؛
 - اشاره‌گر بر روی اولین حرف رشته‌ی β باشد؛
 - محتویات نوار $\dots BB\alpha\beta BB\dots$ است.
- مثلا با فرض $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ و $\beta = \beta_1\beta_2\dots\beta_m$ اگر توصیف آنی برابر $\alpha q \beta$ باشد، وضعیت در ماشین تورینگ به شکل زیر است:



قرارداد ۲ در نمایش توصیف آنی برای سادگی همه نمادهای B را از ابتدای رشته α و انتهای رشته β حذف می‌کنیم.

مجدداً مانند PDA ما برای انتقال بین توصیف‌های آنی از دو علامت \vdash و \vdash^* به ترتیب برای انتقال یک مرحله‌ای و چندمرحله‌ای استفاده می‌کنیم.

مثال ۲ مراحل توصیف آنی را در ماشین قبلی به صورت زیر است.

$$q \circ \circ \vdash \circ q \circ \vdash \circ \circ q \vdash \circ q \circ \vdash \circ \circ q \vdash \circ \circ q \vdash \circ \circ \circ f$$

تعریف ۴ (حرکت ماشین تورینگ) حرکت در ماشین تورینگ به صورت زیر است:

(۱) اگر داشته باشیم $\delta(q, X) = (p, Y, R)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- اگر $X = B$ و $\beta = \epsilon$ داریم:

$$\alpha q \vdash \alpha Y p$$

- در غیر این صورت:

$$\alpha q X \beta' \vdash \alpha Y p \beta'$$

اگر داشته باشیم $\delta(q, X) = (p, Y, L)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۲) - اگر داشته باشیم $\alpha = \epsilon$:

$$q X \beta \vdash p B Y \beta$$

- در غیر این صورت:

$$\alpha' Z q X \beta \vdash \alpha' p Z Y \beta$$

۳ زبان ماشین تورینگ

درست همانند PDA که دو روش برای برای زبان پذیرفته شده داشتیم، در مورد ماشین‌های تورینگ نیز دو روش برای پذیرش یک رشته در زبان داریم:

(۱) پذیرش با رسیدن به حالت نهایی:

$$L(M) = \{w \mid q_0.w \vdash^* \alpha f \beta, f \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$$

(۲) پذیرش با توقف:

$$H(M) = \{w \mid q_0.w \vdash^* \alpha q X \beta \text{ s.t. } \delta(q, X) \text{ is undefined}\}$$

قضیه ۱ اگر $L = L(M)$ آن‌گاه ماشین M' وجود دارد به طوری که $L = H(M')$.

برهان. تنها به ارائه‌ی روشی برای ساخت ماشین تورینگ M' بسنده می‌کنیم. همه مؤلفه‌های ماشین M' مانند ماشین M است بجز مجموعه حالات که با $Q' = Q \cup \{s\}$ جایگزین می‌شود که s یک حالت جدید غیرنهایی است و تابع انتقال حالت δ' که از روی δ پس از اعمال تغییرات زیر حاصل می‌شود.

(۱) برای هر حالت نهایی $f \in F$ در ماشین M و هر $X \in \Gamma$ که $\delta(f, X)$ را تعریف نشده در نظر می‌گیریم.

(۲) برای اجتناب از توقف بی‌مورد ماشین M' باید یک حالت جدید s تعریف کنیم که:

$$\forall X \in \Gamma : \delta(s, X) = (s, X, R)$$

(۳) به ازای هر حالت غیرنهایی q از ماشین M و هر $X \in \Gamma$ که $\delta(q, X)$ تعریف نشده باشد:

$$\delta'(q, X) = (s, X, R)$$

(۴) به ازای تمام مقادیر دیگر $q \in Q$ و $X \in \Gamma$ داریم $\delta'(q, X) = \delta(q, X)$.

■

قضیه ۲ اگر $L = H(M)$ ، آن‌گاه ماشین M' وجود دارد که $L = L(M')$.

برهان. همانند قبلی راه‌کاری برای ساخت ماشین تورینگ ارائه می‌کنیم:

(۱) یک حالت نهایی جدید تعریف می‌کنیم که تنها حالت نهایی M' است.

(۲) اگر $\delta(q, X)$ تعریف نشده باشد برای یک حالت $q \in Q$ و نماد $X \in \Gamma$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\delta(q, x) = (f, X, R)$$

■