

۱) با استفاده از روش پلکانی کاهش یافته، جواب یا جوابهای دستگاههای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} w + x + 2y + z = 1 \\ w - x - y + z = 0 \\ x + y = -1 \\ w + x + z = 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۲) دستگاه زیر برای چه مقادیری از پارامتر  $\lambda$

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = -2 \end{cases}$$

(الف) اصلا جواب ندارد؟

(ب) یک جواب یکتا دارد؟

(ج) تعداد نامتناهی جواب دارد؟

۳) با استفاده از روش گاوس - ژردان وارون ماتریسهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\mathbb{Z}_7 \text{ روی } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \mathbb{R} \text{ روی } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۴) الف) ماتریس  $A$  بصورت زیر داده شده است. برای فضاهای  $row(A)$ ،  $col(A)$  و  $null(A)$  یک پایه پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(ب) صورت قضیه رتبه را بطور دقیق بنویسید و حکم آن را در مورد ماتریس قسمت (الف) تحقیق کنید.

۵) الف) تبدیلات خطی  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  متناظر با ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با کشیدن شکل، تاثیر هر کدام از این تبدیلات را روی مربع  $MNPQ$  به مختصات  $M = (-1, 1), N = (1, 1), P = (1, -1), Q = (-1, -1)$  بطور هندسی بررسی کنید.

(ب) ماتریس تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را پیدا کنید که هر نقطه را نسبت به محور  $y$  ها انعکاس می‌دهد و سپس آن را به اندازه  $30^\circ$  نسبت به مبدا در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهد.

۶) الف) با ذکر یک مثال نشان دهید دو ماتریس مربعی هم‌اندازه  $A$  و  $B$  وجود دارند بطوریکه  $rank(A) = rank(B)$  ولی  $rank(A^2) \neq rank(B^2)$ .

(ب)  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم‌اندازه هستند. نشان دهید  $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$ .

موفق باشید