

۱ با استفاده از روش کمترین مربعات نزدیکترین خط گذرنده نسبت به نقاط $(-3, -5)$, $(-2, -3)$, $(1, 2)$ و $(4, 7)$ را پیدا کنید.

۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) همه مقادیر ویژه A را بیابید و برای هر فضای ویژه A یک پایه پیدا کنید.
ب) ماتریس وارون پذیر P را چنان بیابید که $P^{-1}AP$ قطری باشد.

۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) ماتریس متعامد Q و ماتریس قطری D را بیابید بطوریکه $Q^t A Q = D$.
ب) A را بصورت مجموع ماتریس‌های متقارن از رتبه یک بنویسید.

۴ ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) چند جمله‌ای مشخصه و مینیمال A را بیابید.
ب) تکرر جبری و هندسی مقادیر ویژه A را محاسبه کنید.
ج) فرم ژوردان A را مشخص کنید.

۵ فرض کنید $V = M_n(\mathbb{R})$ و $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $B(X, Y) = \text{Tr}(XY)$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید B یک ضرب دوخطی متقارن است.

ب) اگر برای هر i, j داشته باشیم $B(X, E_{ij}) = 0$ ، آیا X ماتریس صفر است؟ آیا B ناتبهمگون است؟

ج) فرض کنید $W \subset M_n(\mathbb{R})$ زیرفضای متشکل از همه ماتریس‌های متقارن باشد. نشان دهید ماتریس‌های $E_{ij} + E_{ji}$ ، $i \leq j$ تشکیل یک پایه برای W می‌دهند.

د) همه ماتریس‌های X که برای هر $i \leq j$ داشته باشیم $B(X, E_{ij} + E_{ji}) = 0$ را بیابید و $W^{\perp B}$ را شناسایی کنید.

ه) تابع خطی $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ که به هر ماتریس مجموع درایه‌های روی قطر فرعی‌اش نسبت می‌دهد را در نظر می‌گیریم. آیا ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ یافت می‌شود بطوریکه $f(X) = \text{Tr}(AX)$ برای هر $X \in M_n(\mathbb{R})$ ؟ در صورت وجود، این ماتریس A را صریحاً پیدا کنید و در یکتایی آن بحث کنید.