

# گروههای خطی

تاریخ پنجشنبه ۱۶ آبان ۱۳۹۲

امتحان میان ترم

مدت: ۳ ساعت

در مسایل زیر همه جا  $V$  یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان  $F$  است.

۱ الف) نشان دهید برای هر ترابری  $\tau$  در  $SL(V)$  و هر تبدیل خطی  $f \in GL(V)$ ،  $f\tau f^{-1}$  نیز یک ترابری است.  
ب) نشان دهید گروه  $SL(V)$  را نمی‌توان با کمتر از  $n - 1$  ترابری تولید کرد.

۲ در یکریخت بودن یا نبودن دو گروه  $SL(V)$  و  $PGL(V)$  بحث کنید.

۳ الف) فرض کنید  $v \in V$  یک بردار ناصفر باشد. عمل طبیعی  $SL(V)$  روی فضای تصویری  $\mathbb{P}(V)$  را در نظر بگیرید. یک زیرگروه آبلی نرمال  $N$  از  $\text{Stab}([v])$  معرفی کنید که مزدوج‌های آن کل  $SL(V)$  را تولید کنند.  
ب) مرتبه  $N$  هنگامی که میدان زمینه  $q$  عضوی باشد را به دست آورید یا کران بالا و پایین معقولی برای آن بدست آورید.

۴ فرض کنید  $b : V \times V \rightarrow F$  یک فرم دوخطی ناتبهگون باشد. نشان دهید یک نگاشت خطی یگانه

$$\sigma : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$$

وجود دارد که برای هر  $x, y \in V$  و هر  $f, g \in \text{End}(V)$  در روابط  $b(x, f(y)) = b(\sigma(f)(x), y)$  و  $\sigma(f \circ g) = \sigma(g) \circ \sigma(f)$  صدق می‌کند. همچنین نشان دهید  $\sigma(\sigma(f)) = f$  برای هر  $f \in \text{End}(V)$  اگر و تنها اگر  $b$  متقارن یا پادمقارن باشد.

۵ پاسخ به دو قسمت از سوال زیر کافیست. حل قسمت دیگر نمره اضافه دارد.

فرض کنید  $b : V \times V \rightarrow F$  یک فرم دوخطی متناوب و ناتبهگون باشد.

الف) نشان برای هر لاگرانژین  $L$  در  $V$  داریم  $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$ .

ب) نشان دهید اگر  $|F| \geq 4$  آنگاه  $SP(V, b)$  با گروه مشتق خود برابر است.

ج) فرض کنید  $\tau \in SP(V, b)$  یک ترابری سیمپلکتیک باشد. آیا برای هر  $f \in GL(V)$ ،  $f\tau f^{-1} \in SP(V, b)$ ؟

موفق باشید