

## نظریه اعداد

تاریخ پنجشنبه ۲۸ آذر ۱۳۹۲

امتحان میان ترم

مدت: ۳ ساعت

۱ الف) اعداد صحیح مثبت  $m$  و  $n$  که نسبت به ۱۰ اولند را در نظر می‌گیریم. فرض کنید طول دوره تناوب بسط‌های اعشاری اعداد  $\frac{1}{m}$  و  $\frac{1}{n}$  به ترتیب برابر با  $r$  و  $s$  باشند. اگر  $(r, s) = (m, n) = 1$  آنگاه نشان دهید طول دوره تناوب بسط اعشاری عدد  $\frac{1}{mn}$  برابر با  $rs$  است.  
ب) اگر  $p \neq 2, 5$  یک عدد اول باشد در مورد ارتباط بین طول دوره تناوب بسط‌های اعشاری  $\frac{1}{p}$  و  $\frac{1}{p^2}$  چه می‌توان گفت؟

۲ یک جواب برای معادله همنهشتی  $x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{11 \times 31}$  بدست آورید.

۳ همه جواب‌های معادله  $x^3 + x + 57 \equiv 0 \pmod{5^3}$  را بدست آورید.

۴ فرض کنید معادله  $ax + by = n$  که  $a, b$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت هستند دارای حداقل یک جواب باشد. تعداد کل جوابهای آن با شرط  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  را بر حسب  $a, b$  و  $n$  بدست آورید.

۵ ثابت کنید برای هر عدد اول  $p$  حداقل یک ریشه اولیه به پیمانانه  $p$  وجود دارد.

۶ همه اعداد صحیح مثبت  $n$  بطوریکه  $\varphi(n) = \frac{n}{2}$  را شناسایی کنید.

۷ فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد باشد.

الف) نشان دهید هر ریشه اولیه  $g$  به پیمانانه  $p$  یک نامانده مربعی به پیمانانه  $p$  است.  
ب) فرض کنید  $R$  مجموعه همه اعداد  $1 \leq g \leq p-1$  باشد که  $g$  ریشه اولیه به پیمانانه  $p$  است. نشان دهید  $\frac{|R|}{p-1} \leq \frac{1}{2}$ .

ج) همه اعداد اول  $p$  که برای آنها تساوی  $\frac{|R|}{p-1} = \frac{1}{2}$  برقرار باشد، را شناسایی کنید.

موفق باشید