

- ۱ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.  
الف) فرض کنید  $p$  یک عدد اول و  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد که روی مجموعه متناهی  $S$  عمل می کند. اگر  $|S| \equiv 1 \pmod{p}$  آنگاه عمل  $G$  روی  $S$  دارای حداقل یک نقطه ثابت است به عبارت دیگر  $x \in S$  پیدا می شود به طوری که برای هر  $g \in G$  داریم  $gx = x$ .  
ب) فرض کنید  $G$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد. نشان دهید  $Z(G)$ ، مرکز  $G$ ، غیر بدیهی است.
- ۲ الف) صورت هر سه قضیه سیلو را به طور دقیق بنویسید و به دلخواه، یکی از آنها را اثبات کنید.  
ب) برای عدد اول  $p$  مرتبه گروه های  $GL_n(\mathbb{Z}/p)$  و  $SL_n(\mathbb{Z}/p)$  را به دست آورید. و یک زیر گروه  $p$ -سیلو برای این گروه ها معرفی کنید.
- ۳ از قسمتهای الف) و ب) این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید. به قسمت ج) هم پاسخ دهید.  
الف) مرکز گروه دو وجهی  $D_n$  را برای  $n \geq 3$  پیدا کنید.  
ب) گروه مشتق گروه دو وجهی  $D_n$  را برای  $n \geq 3$  پیدا کنید.  
ج) یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۲۱ مثال بزنید.
- ۴ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.  
الف) اگر  $n > 1$  یک عدد فرد باشد آنگاه هر گروه از مرتبه  $2n$  دارای یک زیر گروه نرمال از مرتبه  $n$  است. آیا این زیر گروه  $n$  عضوی یکتاست؟  
ب) عدد صحیح  $n \geq 1$  را در نظر می گیریم. اگر  $n$  و  $\varphi(n)$  نسبت به هم اول باشند آنگاه هر گروه از مرتبه  $n$  دوری است. در اینجا  $\varphi(n)$  تابع اویلر است که تعداد اعداد بین ۱ و  $n$  که نسبت به  $n$  اول باشند را می شمارد.
- ۵ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.  
الف) نشان دهید  $A_5$  تنها گروه ساده از مرتبه ۶۰ است.  
ب) اثباتی برای ساده بودن گروه  $A_5$  ارائه کنید.
- ۶ از قسمتهای این سوال فقط به دو مورد پاسخ دهید.  
الف) آیا هر گروه سری ترکیبی دارد؟  
ب) گروهی حلپذیر مثال بزنید که پوچتوان نباشد. حلپذیری و غیر پوچتوانی گروهی که مثال می زنید باید ثابت شوند.  
ج) نشان دهید هر گروه حلپذیر  $G \neq \{e\}$  دارای حداقل یک زیرگروه آبلی نرمال غیر از  $\{e\}$  است.
- ۷ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.  
الف) نشان دهید مرکز یک گروه پوچتوان  $G \neq \{e\}$  غیر بدیهی است.  
ب) گروه پوچتوان متناهی  $G$  را در نظر می گیریم. نشان دهید برای هر عدد اول  $p$ ، هر  $p$ -سیلو زیرگروه  $G$  نرمال است.  
ج) گروه  $G$  را در نظر می گیریم. نشان دهید  $G$  پوچتوان است اگر و تنها اگر  $G/Z(G)$  پوچتوان باشد.
- ۸ الف) آیا گروه های ساده ای از مرتبه های  $2 \times 3^2 \times 5$ ،  $2^2 \times 3 \times 5$ ،  $5^2 \times 7^2$ ،  $2^5 \times 7$  و  $2^3 \times 5 \times 7$  وجود دارند؟ چرا؟  
ب) گروه متناهی  $G$  دارای این خاصیت است که نرمالساز و مرکزساز هر زیرگروه آبلی آن بر هم منطبق اند. نشان دهید  $G$  آبلی است.