

در مسایل زیر  $V$  همواره یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان  $F$  و  $b: V \times V \rightarrow F$  یک فرم دو خطی نا تبهگون است. از مساله ۳ به بعد فرض می کنیم  $b$  متقارن و مشخصه  $F$  مخالف دو است.

- ۱ الف) اگر  $\dim V \geq 2$  نشان دهید  $\text{PGL}(V)$  روی فضای تصویری  $\mathbb{P}(V)$  به صورت دو انتقالی عمل می کند.  
 ب) فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی  $q$  عضوی باشد. مرتبه گروه های  $\text{GL}(n, q)$ ،  $\text{SL}(n, q)$  و  $\text{PSL}(n, q)$  را محاسبه کنید.  
 ج) یک گروه ساده از مرتبه 168 مثال بزنید.  
 د) فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی  $q$  عضوی باشد. نشان دهید مجموعه همه ماتریس های بالا مثلثی  $n \times n$  با درایه های از  $F$  که روی قطر اصلی آنها 1 است یک زیر گروه سیلوی  $\text{GL}(n, q)$  و  $\text{SL}(n, q)$  است.

۲ فرض کنید  $b$  متناوب باشد.

الف) نشان دهید برای هر بردار نا صفر  $u \in V$  و هر اسکالر نا صفر  $\alpha \in F$  تبدیل خطی  $\tau_{u, \alpha}: V \rightarrow V$  تعریف شده به وسیله

$$\tau_{u, \alpha}(v) = v + \alpha b(v, u)u$$

- یک ترابر سمپلکتیک است و بر عکس هر ترابر سمپلکتیک در  $\text{SL}(V)$  به صورت فوق است.  
 ب) اگر  $\dim V = 2$  نشان دهید هر ترابر در  $\text{SL}(V)$  یک ترابر سمپلکتیک است.  
 ج) نشان دهید که مرکز گروه  $\text{Sp}(V, b)$  برابر با  $\{\pm \text{id}_V\}$  است.

- ۳ الف) فرض کنید  $W$  ابرصفحه ای در  $V$  باشد و  $\tau \in \text{SO}(V, b)$  و  $\tau|_W = \text{id}_W$  و  $\tau = \text{id}_V$  نشان دهید  $\tau = \text{id}_V$ .  
 ب) فرض کنید  $x, y \in V$  به گونه ای باشند که  $b(x, x) = b(y, y) \neq 0$ . نشان دهید انعکاس  $\sigma \in \text{O}(V, q)$  موجود است به طوری که  $\sigma(x) = \pm y$ .

۴ فرض کنید  $\dim V = 2$ .

الف) ثابت کنید گزاره های زیر معادل هستند:

(i)  $b$  هذلولوی است.

(ii)  $\text{disc}(b) = -F^{\times 2}$

(iii)  $b$  ایزوتروپ است.

(iv) برای هر  $a \in F^*$ ،  $q \simeq \langle a, -a \rangle$ .

ب) اگر  $b$  ایزوتروپ باشد آنگاه دقیقاً دو زیرفضای تماماً ایزوتروپ یک بعدی در  $V$  وجود دارد.

۵ الف) نشان دهید که اگر  $(V, b)$  ایزوتروپ باشد آنگاه سرتاسری است.

ب) در صورتی که  $\dim V = 2$  آیا عکس حکم قبل برقرار است یا خیر؟

۶ نشان دهید هر دو زیر فضای تماماً ایزوتروپ ماکسیمال  $V$  هم بعد هستند.

موفق باشید