

در مسایل زیر V همواره یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان F از مشخصه مخالف دو، $b: V \times V \rightarrow F$ یک فرم دو خطی نانتیهگون متقارن و q فرم مربعی منسوب به آن است.

- ۱ از احکام زیر یکی را به دلخواه انتخاب کرده و به آن پاسخ دهید.
- الف) اگر $\dim V = 2$ و (V, b) هذلولوی باشد نشان دهید $SO(V, b) \simeq F^*$ و هر ایزومتري ناسره در $O(V, b)$ یک انعکاس است و برای هر انعکاس $\sigma_u \in O(V, b)$ داریم $O(V, b) \simeq SO(V, b) \times \langle \sigma_u \rangle$.
- ب) مرکز گروه متعامد $O(V, b)$ را مشخص کنید.
- ج) فرض کنید $\dim V \geq 3$. نشان دهید مشتق گروه $O(V, b)$ با مشتق گروه $SO(V, b)$ برابر است.

- ۲ از احکام زیر یکی را به دلخواه انتخاب کرده و به آن پاسخ دهید.
- الف) فرض کنید $\dim V \geq 3$ و q ایزوتروپ باشد و $\mathcal{C} = \{u \in V \mid q(u) = 0\}$.
- الف) نشان دهید برای هر $[u] \in \mathbb{P}\mathcal{C}$ ، $[w] \neq [v] \in \mathbb{P}\mathcal{C}$ موجود است به طوری که $([u], [w])$ و $([u], [v])$ تشکیل زوجهای هذلولوی تصویری می دهند.
- ب) نشان دهید هسته عمل $O(V, b)$ روی $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ برابر با $Z = \{\pm \text{id}\}$ است.
- ج) نشان دهید هر تبدیل زیگل $\rho \in O(V, b)$ در مشتق گروه متعامد قرار دارد.

- ۳ از احکام زیر یکی را به دلخواه انتخاب کرده و به آن پاسخ دهید.
- الف) فرض کنید b هذلولوی و اندیس ویت آن برابر با m باشد. اگر W زیرفضایی از V باشد به طوری که $\dim W > m$ نشان دهید W شامل یک بردار ایزوتروپ ناصفر است.
- ب) فرض کنید \mathbb{H} یک صفحه هذلولوی و $\tau \in O(\mathbb{H})$ یک بردار ایزوتروپ را ثابت نگه دارد. نشان دهید $\tau = \text{id}$.
- ج) فرض کنید $\dim V = 3$ و $\text{id} \neq \tau \in SO(V, b)$. آنگاه $\dim \text{Fix}(\tau) = 1$.

- ۴ الف) اگر V فرد بعدی باشد آنگاه هر ایزومتري سره در $O(V, b)$ دارای یک نقطه ثابت ناصفر است.
- ب) فرض کنید $F = \mathbb{Q}$ و $V = K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. نشان دهید $b(u, v) = \text{tr}_{K/\mathbb{Q}}(uv)$ یک فرم دوخطی نانتیهگون متقارن روی V است. یک پایه متعامد برای b بیابید و $\text{sgn}(b)$ را تعیین کنید.
- ج) فرض کنید $\dim V = 2m$ و W زیرفضایی تماما ایزوتروپ از V از بعد m باشد. نشان دهید $\tau \in O(V, b)$ با شرط $\det \tau = -1$ موجود نیست به طوری که $\tau(W) = W$.

- ۵ الف) نشان دهید هر بردار ایزوتروپ ناصفر در V را می توان به صورت مجموع دو بردار ایزوتروپ متعامد نوشت.
- ب) فرض کنید F یک میدان متناهی و V زوج بعدی باشد. نشان دهید $\text{disc}(b) = (-1)^{\frac{\dim V}{2}} F^{\times 2}$ اگر و تنها اگر b هذلولوی باشد.
- ج) فرض کنید $\sigma_u, \sigma_v \in O(V, b)$ انعکاسهای تعریف شده به وسیله دو بردار ایزوتروپ u و v باشند. نشان دهید اگر $\sigma_u = \sigma_v$ آنگاه $q(u)F^{\times 2} = q(v)F^{\times 2}$ بر عکس اگر $q(u)F^{\times 2} = q(v)F^{\times 2}$ آنگاه σ_u و σ_v مزدوج اند.