

به نام خدا

امتحان میان ترم
مدت: ۳ ساعت

جبر ۱

تاریخ پنجشنبه ۱۶ اردیبهشت ۱۳۸۹

- ۱ از احکام زیر دو تا را به دلخواه انتخاب کنید و آنها را اثبات کنید. (۳۰ نمره)
- الف) نشان دهید هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است.
- ب) فرض کنید G یک گروه دوری از مرتبه n و d یک مقسوم علیه n باشد. نشان دهید G دارای یک و تنها یک زیرگروه از مرتبه d است.
- ج) فرض کنید H و K دو زیرگروه از گروه G باشند. نشان دهید HK یک زیرگروه G است اگر و تنها اگر $HK = KH$.
- د) H و K دو زیرگروه نرمال G هستند به طوری که $H \cap K = \{e\}$. نشان دهید برای هر $h \in H$ و $k \in K$ داریم $hk = kh$.
- ه) نشان دهید نیمگروه S یک گروه است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in S$ معادلات $ax = b$ و $ya = b$ در S دارای جواب باشند.
- و) فرض کنید G یک نیم گروه متناهی باشد. نشان دهید G یک گروه است اگر و تنها اگر قوانین حذف در G برقرار باشند.
- ز) فرض کنید G یک گروه و a و b دو عضو G باشند به گونه که $ab = ba$ و مرتبه های a و b متناهی باشند. نشان دهید مرتبه ab برابر با $k \cdot m$ مرتبه های a و b است.
- ح) G یک گروه متناهی است. اگر A و B دو زیرمجموعه ناتهی از G باشند و $|A| + |B| > |G|$ نشان دهید $G = AB$.
- ط) فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه نرمال از G باشد و $[G : H] = n$. نشان دهید برای هر $x \in G$ داریم $x^n \in H$.
- ۲ فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی و p یک عدد اول باشد که مرتبه G را عاد کند. نشان دهید G دارای یک عضو از مرتبه p است. (۱۵ نمره)
- ۳ الف) گروه $(\mathbb{Z}, +)$ چند اتومورفیسم دارد؟ همه آنها را پیدا کنید. (۵ نمره)
ب) نشان دهید $(\mathbb{R}, +)$ با (\mathbb{R}^*, \times) یکرخت نیست. (۵ نمره)
- ۴ الف) ماکسیمم مرتبه اعضای A_{10} را محاسبه کنید. (۵ نمره)
ب) تعداد زیرگروه های دوری از مرتبه 6 را در S_5 پیدا کنید. (۵ نمره)
- ۵ الف) همه گروه های آبلی دو به دو غیر یکرخت از مرتبه 240 را مشخص کنید. (۵ نمره)
ب) تعداد اعضای از مرتبه 15 را در $\mathbb{Z}_{/30} \times \mathbb{Z}_{/20}$ پیدا کنید. (۵ نمره)
- ۶ الف) G یک گروه متناهی از مرتبه فرد است. نشان دهید هر عضو G مربع کامل است یعنی به صورت g^2 که $g \in G$ قابل نمایش است. (۵ نمره)
ب) آیا تعداد زیرگروه های یک گروه می تواند بیش از تعداد اعضای آن باشد؟ چرا؟ (۵ نمره)
ج) گروه \mathbb{C}^* یعنی اعداد مختلط نا صفر با عمل ضرب را در نظر می گیریم. نشان دهید $\mathbb{C}^* \simeq \frac{\mathbb{C}^*}{\{1, -1\}}$. (۵ نمره)

موفق باشید