

# به نام خدا

امتحان پایان ترم  
مدت: ۳ ساعت

جبر ۱

تاریخ چهارشنبه ۱۹ خرداد ۱۳۸۹

۱ این مفاهیم را به طور دقیق تعریف کنید: مشخصه یک حلقه، ایده آل اول در یک حلقه جابجایی، زیر میدان اول یک میدان، میدان کسره‌های یک دامنه صحیح، دامنه اقلیدسی. (۱۰ نمره)

۲ از احکام زیر دو تا را به دلخواه انتخاب کنید و آنها را اثبات کنید.  
الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یک‌دار و  $I$  یک ایده آل سره از آن باشد. آنگاه  $R/I$  یک دامنه صحیح است اگر و تنها اگر  $I$  یک ایده آل اول  $R$  باشد.

ب) مرتبه هر میدان متناهی توانی از یک عدد اول است.  
ج) فرض کنید  $F$  یک میدان و  $f(x) \in F[x]$  یک چند جمله‌ای نا صفر باشد. آنگاه  $f(x)$  حداکثر به اندازه درجه اش در  $F$  ریشه دارد.

د) فرض کنید  $D$  یک دامنه صحیح باشد. آنگاه هر عضو اول در  $D$  تحویل ناپذیر است.

ه) فرض کنید  $D$  یک دامنه ایده آل اصلی (PID) باشد. آنگاه هر عضو تحویل ناپذیر در  $D$  اول است.

و) حلقه اعداد صحیح گاوسی  $\mathbb{Z}[i]$  یک دامنه اقلیدسی است.

ز) هر دامنه اقلیدسی یک دامنه ایده آل اصلی است.

ح) فرض کنید  $F$  یک میدان و  $f(x)$  و  $g(x)$  دو چند جمله‌ای باشند. اگر  $d(x)$  ب.م.م این دو چند جمله‌ای باشد آنگاه  $d(x)$  به صورت ترکیب خطی  $f(x)$  و  $g(x)$  قابل بیان است، یعنی چند جمله‌ای‌های  $r(x)$  و  $s(x)$  در  $F[x]$  موجودند به طوری که  $d(x) = r(x)f(x) + s(x)g(x)$ .

ط) مشخصه یک دامنه صحیح یا برابر با صفر است و یا یک عدد اول.

ی)  $R$  یک حلقه جابجایی و یک‌دار است که تنها ایده آل‌های اول آن  $\{0\}$  و  $R$  هستند. آنگاه  $R$  یک میدان است.  
ک) هر دامنه صحیح متناهی میدان است.

۳ حلقه  $R = \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$  را در نظر می‌گیریم. همه عناصر وارون پذیر، پوچتوان، خودتوان و مقسوم علیه‌های صفر را در  $R$  مشخص کنید. (۱۰ نمره)

۴ الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه یک‌دار و  $c$  یک عضو پوچتوانی از آن باشد. نشان دهید  $1 + c$  در  $R$  وارون پذیر است. (۵ نمره)  
ب) نشان دهید تنها همومورفیسم حلقه‌ای  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  همومورفیسم صفر است. (۵ نمره)

۵ الف) همه چندجمله‌ای‌های تحویل ناپذیر به صورت  $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}/3[x]$  را مشخص کنید. (۵ نمره)

ب) یک میدان ۲۷ عضوی با نوشتن لیست اعضای آن و روش جمع و ضرب اعضای آن ارایه کنید. (۵ نمره)

ج) همه ریشه‌های گویای چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$  را پیدا کنید. (۵ نمره)

۶ الف)  $F$  یک میدان و  $L$  یک زیرمیدان از آن است. نشان دهید اولاً  $L^*$  و  $F^*$  با عمل ضرب گروه هستند ثانیاً  $L^*$  یک زیرگروه  $F^*$  است. (۵ نمره)

ب)  $F$  یک میدان ۳۲ عضوی است. نشان دهید اولاً  $\text{char} F = 2$  ثانیاً تنها زیر میدانهای  $F$ ،  $\{0, 1\}$  و خود  $F$  هستند. (۵ نمره)

۷ نشان دهید در  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  عدد ۲ تحویل ناپذیر است ولی اول نیست. (۵ نمره)

موفق باشید