

بسمه تعالی

مدت : ۳ ساعت

آزمون اول ریاضی عمومی ۲ (بهار ۸۷)

۱. همه ماتریس‌های 2×2 (با درایه‌های حقیقی) متعامد متقارن با دترمینان ۱ را پیدا کنید.
(یادآوری: ماتریس A را متعامد گوئیم اگر $A^t A = I$). (۶ نمره)

۲. تبدیل‌های خطی $P, T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده‌اند: P انعکاس (تقارن آینه‌ای) نسبت به صفحه $y = -x$ است و $T(e_1) = e_2, T(e_2) = e_3, T(e_3) = e_1$ که در آن (e_1, e_2, e_3) پایه استاندارد \mathbb{R}^3 است.

- الف) نمایش ماتریسی $P, T, P \circ T$ را در پایه استاندارد بنویسید (نمایش استاندارد). (۳ نمره)
ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (حقیقی) $P \circ T$ را محاسبه نمایید. (۴ نمره)
ج) نمایش ماتریسی P, T را در پایه مرتب (e_2, e_3, e_1) به دست آورید. (۳ نمره)

۳. در \mathbb{R}^4 خط l به معادله $x - 1 = -y = z = t + 1$ و صفحه P به معادله $x + y - t = y + z - t = 0$ را در نظر بگیرید. معادله خطی را بنویسید که خط l و صفحه P را قطع کند و بر آنها عمود باشد. (۹ نمره)

۴. چهار بردار $OA = (1, 0, 0, 0), OB = (0, 1, 0, 0), OC = (1, -1, 1, 0), OD = (1, 1, 0, 1)$ را در \mathbb{R}^4 در نظر بگیرید.

- الف) حجم متوازی السطوحی که با چهار بردار فوق تولید می‌شود را محاسبه کنید. (۳ نمره)
ب) مساحت متوازی الاضلاعی که با دو بردار OD, OC تولید می‌شود را محاسبه کنید. (۳ نمره)
ج) دو بردار OB, OA را بر صفحه $x - y + z = x + y + t = 0$ تصویر عمود نمایید و آنها را OB', OA' بنامید. مساحت متوازی الاضلاعی که با دو بردار OB', OA' تولید می‌شود را به دست آورید. (۴ نمره)

۵. منحنی $r(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t)$ را در صفحه در نظر بگیرید.

- الف) طول این منحنی را از صفر تا t به دست آورید که $0 < t < 2\pi$. (۴ نمره)
ب) انحنای آن را برای $0 < t < 2\pi$ محاسبه نمایید. (۵ نمره)

۶. تمام منحنی‌های هموار $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ را به دست آورید که بر حسب طول پرمایش (پارامتری)

شده، دارای انحنای ثابت $\frac{1}{4}$ باشند، بردار شتاب بر محور Z -ها عمود باشد، $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ و

$$\gamma'(0) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

(۶ نمره)

موفق باشید.