

۱ بیشترین مساحت جانبی مکعب مستطیلی که درون بیضی گون به معادله  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{12} = 1$  محاط می شود را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۲ تابع  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $f(x, y) = (e^x, x + e^y)$  را در نظر می گیریم. فرض کنید  $D$  مربع واحد به راسهای  $(0, 0)$ ،  $(1, 0)$ ،  $(1, 1)$  و  $(0, 1)$  باشد. مساحت  $f(D)$ ، یعنی مساحت تصویر  $D$  تحت  $f$  را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۳ ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و میدان برداری  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $F(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  را در نظر می گیریم. الف) نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه  $F$  یک میدان برداری پایستار (بقا) باشد این است که  $A$  متقارن باشد. (۴ نمره)  
ب) برای  $a = 2$ ،  $d = 6$  و  $b = c = 1$  یک تابع پتانسیل برای  $F$  پیدا کنید. (۳ نمره)  
ج) فرض کنید  $C$  یک خم هموار باشد که نقطه  $A = (0, 0)$  را به  $B = (1, 1)$  وصل می کند و جهت آن از  $A$  به  $B$  باشد. مقدار  $\int_C F \cdot dr$  را برای میدان برداری قسمت (ب) پیدا کنید. (۳ نمره)

۴ عدد طبیعی  $n \geq 1$  را در نظر می گیریم. مساحت ناحیه محدود به خم بسته

$$r(t) = (\cos(t) + \frac{1}{n} \cos(nt), \sin(t) + \frac{1}{n} \sin(nt))$$

،  $0 \leq t \leq 2\pi$  را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۵ فرض کنید برای هر  $r > 0$  شار خروجی میدان برداری هموار  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  روی کره  $S_r$  به شعاع  $r$  حول مبدا برابر با  $\sin(r) - r$  باشد. دیورژانس  $F$  را در مبدا به دست آورید. (۱۰ نمره)

۶ مقدار انتگرال  $\iint_S (x^4 + y^4 + z^4) dS$  را حساب کنید که در آن کره واحد  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  است. (۱۰ نمره)

۷ کره  $S$  به معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  و صفحه  $P$  به معادله  $x + y + z = 0$  همدیگر را در دایره  $C$  قطع می کنند. فرض کنید جهت  $C$  چنان باشد که اگر از نقطه  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  به  $C$  نگاه کنیم جهت آن خلاف گردش عقربه های ساعت باشد. میدان برداری  $F = yi + zj + xk$  را در نظر می گیریم. مقدار  $\oint_C F \cdot dr$  را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۸ خانواده منحنی های  $x + y - \ln(xy) = C$  را برای  $C > 2$  در نظر می گیریم.  $(x, y)$  ها در ناحیه اول مختصات هستند یعنی  $x > 0$  و  $y > 0$ .

الف) مشخص کنید این خانواده از منحنی ها دقیقا چه زیر مجموعه ای از ناحیه اول مختصات را می پوشانند. (۳ نمره)  
ب) معادله دسته خم هایی را مشخص کنید که دقیقا همان زیر مجموعه را پوشانند و در هر نقطه تقاطع با خانواده بالا، بر آنها عمود باشند. (۵ نمره)

ج) نشان دهید دسته خم های پیدا شده در قسمت (ب) از یک طرف به یک نقطه همگرا هستند. آن نقطه را پیدا کنید. (۲ نمره)