

(۱) حجم درون بیضی‌گون $2 = 2xy - 6z^2 + 3y^2 + 3x^2$ را به دست آورید. (۱۵ نمره)

(۲) رابطه زیر بین چهار متغیر x, y, z, w داده شده است.

$$z^3 + w^2 + xy - x^2 + 3y^2 - wx^5 = 2$$

$$e^{x+y+w} - zx^2 + w - 2yz = 2$$

می‌دانیم در یک همسایگی نقطه $(x, y, z, w) = (1, -1, 1, 0)$ متغیرهای x و y توابعی مشتق‌پذیر از

z و w هستند. عبارت‌های $\frac{\partial y}{\partial w}$ و $\frac{\partial x}{\partial w}$ را در نقطه $(z, w) = (1, 0)$ بدست آورید. (۱۵ نمره)

(۳) انتگرال $\iint_T y^2 dS$ را روی سطح مثلث T با رئوس‌های $(1, 1, -1)$ ، $(1, -1, 1)$ و

$(-1, 1, 1)$ محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

(۴) مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ را که بین دو صفحه $z = x$ و $z = 2x$ قرار دارد بدست آورید. (۱۵ نمره)

(۵) فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه درون خم بسته، ساده و هموار C باشد و $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع دو بار مشتق‌پذیر باشند که g روی C صفر است. نشان دهید رابطه زیر برقرار است. (۱۵ نمره)

$$\iint_D (g_x h_y - g_y h_x) dA = 0.$$

(۶) الف) نشان دهید برای هر دو میدان برداری هموار F و G در \mathbb{R}^3 رابطه زیر برقرار است. (۵ نمره)

$$\operatorname{div}(F \times G) = (\operatorname{curl} F) \cdot G - F \cdot (\operatorname{curl} G)$$

ب) فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه درون یک بیضی‌گون در فضا باشد و F و f به ترتیب میدان برداری و تابع اسکالر همواری روی \mathbb{R}^3 باشند به طوری که مقدار تابع f روی سطح D ثابت است. نشان دهید (۱۰ نمره)

$$\iiint_D \nabla f \cdot (\operatorname{curl} F) dV = 0.$$

موفق باشید