

امتحان میان ترم ریاضی عمومی یک - آذر ماه ۱۳۸۵

گروههای دکتر بحرینی، غلامزاده محمودی، فنائی و نجومی

تعداد سؤالات : ۶ - مدت امتحان : ۳ ساعت - توجه : هر سؤال، ۱۰ نمره دارد (مجموع ۶۰ نمره).

۱. الف) فرض کنید z_0, z_1, z_2 سه نقطه متمایز در صفحه اعداد مختلط هستند. نشان دهید مثلث تشکیل شده بوسیله این سه نقطه، یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با زاویه قائمه در رأس z_0 است اگر و تنها اگر داشته باشیم :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \pm i.$$

ب) همه اعداد مختلط z را پیدا کنید بطوریکه مثلث تشکیل شده بوسیله نقاط $1, z, z^2$ یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.

۲. با ذکر دلیل عدد صحیح مثبت n را پیدا کنید که اگر n جمله اول از سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

را با هم جمع کنیم، خطای این حاصل جمع در مقایسه با مقدار دقیق سری از 10^{-2} کمتر باشد.

۳. فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی از اعداد حقیقی در فاصله $[0, 1]$ باشد بطوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. همچنین $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی بگیرید. تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall n, x \neq a_n \\ b_n & x = a_n \end{cases}$$

شرطی لازم و کافی برای دنباله $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیابید بطوریکه :

الف) تابع $f(x)$ در صفر پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در صفر از راست مشتق پذیر باشد.

۴. فرض کنید تابع $f(x)$ بر مجموعه اعداد حقیقی با ضابطه $f(x) = x^3 + x^2 - x$ تعریف شده است. نشان دهید $f'(x)$ فقط در یک نقطه صفر میشود و این نقطه مینیمم مطلق تابع $f(x)$ است.

۵. تابع حقیقی پیوسته f با دامنه $[1, +\infty[$ مفروض است. فرض کنید $f(x)$ بر $[1, +\infty[$ مشتق پذیر بوده و داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1)$. نشان دهید نقطه‌ای مانند $c > 1$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = 0$.

۶. تابع $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ تعریف شده است.

الف) چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ این تابع را حول $a = 0$ پیدا کنید. در یک شکل نمودار تابع $f(x)$ و تقریبهای خطی و درجه دو آن را رسم کنید.

ب) مقدار تقریبی برای $\frac{1}{\sqrt{1.01}}$ از طریق تقریب خطی به دست آورید و مقدار خطا را تخمین بزنید.

ج) چنانچه لازم باشد مقدار $\frac{1}{\sqrt{1.01}}$ با دقت 10^{-6} یا بهتر محاسبه شود از تقریب درجه چند f باید استفاده کرد؟ جواب خود را به طور دقیق توجیه کنید.

موفق باشید.