

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی یک - دی ماه ۱۳۸۵

گروههای ۱ تا ۱۸ - تعداد سؤالات : ۶ - مدت امتحان : ۳ ساعت

توجه: سؤالات ۱ و ۳، ۱۰ نمره، سؤالات ۲ و ۵، ۸ نمره و سؤالات ۴ و ۶، ۱۲ نمره دارد (مجموع ۶۰ نمره).

۱. عدد  $t$  را طوری بدست آورید که مساحت زیر نمودار تابع  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2 + x + 1}$  و بالای محور  $x$  روی فاصله  $[t, t + 2\pi]$  حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد؟

۲. ناحیه زیر نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x} e^x$  و بالای محور  $x$  محصور بین خطوط  $x = 0$  و  $x = 1$  را حول محور  $x$  دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

۳. تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

الف) نشان دهید  $f(x)$  در تمام نقاط مشتق اول و دوم دارد، مشتقهای اول و دوم را به دست آورید.  
ب) نشان دهید  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  واگراست.

۴. الف) نشان دهید  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  همگراست و مقدار آن را حساب کنید.

ب) نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n-1} + \sqrt{\frac{n-2}{2}} + \sqrt{\frac{n-3}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n-1}}) = \frac{\pi}{4}$

۵. ثابت کنید  $n! < \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}}$  وقتی  $n \geq 2$  یک عدد طبیعی باشد.

(راهنمایی: از روش دوزنقه برای تقریب انتگرال  $\ln x$  روی  $[1, n]$  استفاده کنید.)

۶. سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$  داده شده است.

الف) شعاع همگرایی سری را حساب کرده و در نقاط انتهایی فاصله بدست آمده، همگرایی یا واگرایی سری را بررسی کنید.

ب) تعیین کنید که در داخل فاصله همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است؟

موفق باشید.