

# دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ پنجشنبه ۲ آذر ۱۳۸۵

امتحان میان ترم

جبر ۲

مدت: ۳ ساعت

۱ الف) گروه تقارن‌های یک چهاروجهی منتظم چند عضو دارد؟  
ب) تعداد رنگمیزی‌های وجه‌های یک چهاروجهی منتظم را با ۲ رنگ پیدا کنید (رنگمیزی‌هایی که با یک تقارن چهار وجهی به همدیگر تبدیل شوند یکسان فرض می‌شوند).  
ب)  $S_n$  گروه متشکل از همه جایگشت‌های مجموعه  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  است. فرض کنید  $n > 1$  و  $G$  یک زیرگروه  $S_n$  باشد که به طور تراگذاری روی  $X$  عمل می‌کند. ثابت کنید عضوی در  $G$  وجود دارد که هیچ نقطه ثابتی تحت این عمل ندارد.

۲ الف) صورت هر سه قضیه سیلو را به طور دقیق بیان کنید و یکی از آنها را به دلخواه ثابت کنید.  
ب) نشان دهید گروه‌های از مرتبه ۱۶۵، ۴۵۰، ۹۶ و ۱۱۵۲ ساده نیستند.

۳ الف) نشان دهید گروه  $D_n$  (گروه تقارن‌های یک  $n$  ضلعی منتظم) حلپذیر است.  
ب)  $N$  یک زیرگروه نرمال گروه  $G$  است به طوری که  $N$  و  $G/N$  پوچتوان هستند آیا می‌توان نتیجه گرفت که  $G$  پوچتوان است؟

۴ الف) مفهوم سری ترکیبی را تعریف کنید و همه سری‌های ترکیبی گروه  $D_4$  را به دست آورید.  
ب) با ذکر یک مثال نشان دهید گروه متناهی  $G$  وجود دارد که ساده نیست ولی با گروه مشتق خود برابر است.

۵ الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار باشد و  $S$  یک زیرمجموعه ناتهی از  $R$  که نسبت به ضرب بسته باشد و شامل ۰ نباشد. نشان دهید ایده‌آل اول  $P$  از  $R$  وجود دارد به طوری که  $P \cap S = \emptyset$ .  
ب)  $n$  یک عدد صحیح مثبت است. رادیکال پوچ حلقه  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  را به دست آورید.

۶ الف) همه اعضای وارون پذیر حلقه‌های زیر را به دست آورید.

$\mathbb{Z}[i]$  (i)

$R = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \equiv 1 \pmod{2}\}$  (با ضرب و جمع معمولی اعداد گویا). (ii)

$X = \{1, 2, 3\}$  که  $(P(X), \Delta, \cap)$  (iii)

$R = \{a + b\varepsilon : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$  (با جمع و ضرب  $(a + b\varepsilon) + (a' + b'\varepsilon) = ((a + a') + (b + b')\varepsilon)$  و (iv)

$(a + b\varepsilon)(a' + b'\varepsilon) = ((aa') + (ab' + ba')\varepsilon)$  (v)

ب) کدامیک از حلقه‌های معرفی شده در قسمت الف) تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارند؟

موفق باشید