

دانشگاه صنعتی شریف

جبر ۳ کارشناسی

امتحان میان‌ترم

تاریخ پنجشنبه ۷ اردیبهشت ۱۳۸۵

مدت: ۳ ساعت

- ۱ الف) صورت قضیه اساسی نظریه گالوا را به طور دقیق بنویسید.
ب) با استفاده از قضایای سیلو و قضیه اساسی نظریه گالوا، قضیه اساسی جبر را ثابت کنید. (۵ نمره)
- ۲ الف) فرض کنید L/K و K/F دو توسیع نرمال از درجه متناهی باشند، آیا L/F نیز یک توسیع نرمال است؟
ب) درجه میدان شکافنده $x^6 + 1$ را روی \mathbb{Q} و روی \mathbb{F}_2 محاسبه کنید. (۴ نمره)
- ۳ الف) F یک میدان است و $f(x) \in F[x]$ یک چندجمله‌ای از درجه n است. فرض کنید K/F یک توسیع از درجه m باشد. اگر n و m نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که $f(x)$ روی K نیز تحویل‌ناپذیر است.
ب) نشان دهید که چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ روی $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ تحویل‌ناپذیر است.
ج) آیا $p(x)$ روی $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/85))$ هم تحویل‌ناپذیر است؟ (۶ نمره)
- ۴ الف) G یک گروه است و $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ همومورفیسم‌های گروهی از G به گروه ضربی یک میدان K هستند. نشان دهید که اگر برای $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ رابطه $\sum_i c_i \tau_i(g) = 0$ برای هر $g \in G$ برقرار باشد، آنگاه $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.
ب) K/F یک توسیع گالوایی از درجه r است. فرض کنید M یک زیرمیدان میانی این توسیع باشد و $[M:F] = s$ و $(s-1)!$ و r/s نسبت به هم اول هستند. نشان دهید M/F یک توسیع نرمال است.
ج) قضیه فروبنیوس را ثابت کنید: اگر G یک گروه متناهی باشد و H یک زیرگروه G و $|H| = n$ و $[G:H] = m$ و هیچ مقسوم‌علیه کوچک‌تر از m نداشته باشد آنگاه H در G نرمال است. (۳ نمره)
- ۵ الف) F یک میدان متناهی است و $\text{char}(F) = p$. نشان دهید که F/\mathbb{F}_p یک توسیع گالوایی است و $\text{Gal}(F/\mathbb{F}_p)$ یک گروه دوری است که به وسیله اتومورفیسم فروبنیوس F تولید می‌شود.
ب) تعداد چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر از درجه ۲، ۳ و ۶ را روی \mathbb{F}_p محاسبه کنید. (۳ نمره)
- ۶ فرض کنید $\Psi_n(x)$ چندجمله‌ای دایره‌بر n ام باشد.
الف) نشان دهید که $\Psi_n(x)$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.
ب) $\Psi_{12}(x)$ را به طور صریح محاسبه کنید.
ج) درجه $\mathbb{Q}(\cos(\pi/9))$ را روی \mathbb{Q} پیدا کنید. (۴ نمره)
- ۷ الف) فرض کنید $\omega = \exp(2\pi i/3)$. نشان دهید که $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی است. همه زیرمیدان‌های میانی این توسیع را شناسایی کنید.
ب) فرض کنید $\omega = \exp(2\pi i/8)$. همه زیرمیدان‌های میانی توسیع $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ را شناسایی کنید. (۵ نمره)

جمع نمرات: ۸۰

موفق باشید