امتحان پایان ترم - درخانه - درس نسبیت عام ۱ - بهار ۹۶

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه تحویلی مرقوم فرمایید.
- امتحان پایان ترم ۱ امتیاز از نمره کل این درس را تشکیل می دهد.
- امتحان در خانه take Home – ۵ امتیاز از نمره کل درس را تشکیل می دهد.
- امتحان در تاریخ ۱۵ خرداد۹۶ در وبگاه درس قرار گرفته است.
- ***لطفا امتحان درخانه را دوشنبه ۱۲ تیر ۹۶ تحویل دهید.***
- ***لطفا درس نامه نسبیت را دوشنبه ۱۹ تیر ۹۶ تحویل دهید.***

سوال ۱) معادلات لاندائو – ریچادوری و تکینگی هاوکینگ – پنروز

فرض کنید سیالی متشکل از ذرات بر روی منحنی های زمان گونه با سرعت $u^a(x)$ حرکت می کنند. مجموعه این منحنی ها را congruence می گویند، در صورتی که از هر نقطه از فضا و زمان یکی از منحنی ها رد شود. در صورتی که تمام منحنی ها ژئودزی باشند به آن geodesic congruence می گویند. بردار انحراف بین دو منحنی ذره که با ξ^a نمایش داده می شود بر روی congruence انتقال موازی داده می شود و در رابطه زیر صدق می کند:

$$L_u\xi = [u,\xi] = 0$$

الف) نشان دهید که

$$u^b\nabla_b\xi^a = \xi^b\nabla_b u^a = \xi^b Q_b^a \quad where \quad Q_b^a = \nabla_b u^a$$

سپس بحث کنید که چرا در مختصات همراه سیال Q_b^a فضایی است.

ب) در ادامه نشان دهید که مشتق هموردا سرعت سیال را می توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla_j u_i = \omega_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta P_{ij} - a_i u_j$$

که کمیت های فوق به ترتیب (تانسور تصویر، شتاب سیال، پارامتر انبساط، تانسور چرخش و تانسور تنش) به صورت زیر تعریف می شوند

$$P^i_j = \delta^i_j + u^i u_j$$

$$a_i = u^j\nabla_j u^i$$

$$\theta = \nabla_i u^i$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(P_j^m \nabla_m u_i - P_i^m \nabla_m u_j)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(P_j^m \nabla_m u_i + P_i^m \nabla_m u_j\right) - \frac{1}{3}\theta P_{ij}$$

ویژگی های کمیت های فوق را از نظر تقارن و رد را ذکر کنید.

ج) مشتق مستقیم direct derivative پارامتر انبساط را به دست آورید و نشان دهید برابر است با

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - R_{ab}u^a u^b$$

د) به معادله فوق معادله " لاندائو-ریچادوری" می گویند. بحث کنید که چگونه این معادله در لم تکینگی هاوکینگ-پنروز مهم می شود.

سوال ۲) ستاره ای متشکل از ماده تاریک

شکل کلی متریک برای تقارن کروی و توزیع ایستا ماده به شکل زیر می باشد:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

الف) نشان دادید که $A(r)$ و $B(r)$ را می توان به صورت زیر به دست آورد $\mu = \frac{2GM}{c^2}$:

$$A(r) = \frac{c^2}{4}\left[3\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3}\right)^{-1}$$

حال فرض کنید، ذراتی را که فقط برهم کنش گرانشی دارند (تعریف ساده شده ماده تاریک) را در داخل ستاره به شعاع R را بیابید بدین منظور

ب) ثوابت حرکت را برای ذرات ماده تاریک با لاگرانژی که از این المان فضا-زمانی به دست می آید را محاسبه کنید.

ج) معادله دیفرانسیلی را به دست آورید که تغییرات مختصه شعاعی این ذرات r را برحسب زمان به دست آورید.

د) معادله حرکت مربوط به مختصه شعاعی را بر حسب پارامتر بسط $\frac{GM}{Rc^2}$ بسط دهید و با این فرض که $r \sim R$ است بحث کنید که کدام جملات نیوتنی می باشند و کدام جملات منشا نسبیتی دارند.

ه) فرض کنید که ماده تاریک فرضی شما در طول زمان واپاشی داشته باشد و از محصولات واپاشی فوتون نیز موجود باشد. در صورتی که ذره ماده تاریک در فاصله r بر روی مدار سقوط آزاد با انرژی E و اندازه حرکت زاویه ای L باشد. چه درصدی از انرژی فوتون در بی نهایت نسبت به دستگاه سکون ذره دیده می شود. (با این فرض که فوتون رها شده در ستاره جذب نشده و به بی نهایت برسد.) فرض کنید که فوتون در صفحه مداری ذره با اندازه حرکت زاویه ای در واحد انرژی ℓ حرکت می کند. این مسئله را به صورت کاملا نسبیتی حل کرده و تقریبی را که در قسمت د به دست آورده اید را استفاده نکنید.

سوال۳) انتشار امواج گرانشی در کیهانی فریدمنی مختل شده

کشف امواج گرانشی توسط تداخل سنج لایگو در ابتدای سال میلادی ۲۰۱۶ و سومین کاندید آن در هفته گذشته، دریچه جدیدی را برای فهم کیهان در اختیار ما گذاشته است. آشکارسازی امواج گرانشی اطلاعات ارزشمندی درباره منبع ایجاد موج و همچنین محیطی که در آن منتشر شده است، در اختیار ما می گذارد. هدف این سوال این است که از امواج گرانشی برای بررسی ویژگی های محیط منتشر شونده استفاده شود. متریک را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g_{ab} = \gamma_{ab} + \epsilon h_{ab}$$

که γ_{ab} متریک زمینه است. h_{ab} متریک مربوط به امواج گرانشی است و ϵ پارامتر کوچکی است که برای محاسبه مرتبه اختلال از آن استفاده می شود. در انتهای محاسبات می توان ϵ را برابر واحد گذاشت. متریک زمینه را می توان به صورت $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}^{(0)} + \gamma_{ab}^{(1)}$ نوشت که بالاندیس نشان دهنده مرتبه متریک است. در این مسئله فرض متریک زمینه را FRW تخت در نظر بگیرید ($\gamma_{ab}^{(0)} = a^2\eta_{ab}$.) که η_{ab} متریک مینکوفسکی است.

برای بخش اختلالی متریک زمینه فقط جمله های اسکالر را در نظر بگیرید. $\gamma_{ab}^{(1)} = a^2\delta\eta_{ab}$ بدین ترتیب که:

$$\delta\eta_{ab}dx^a dx^b = -2\left[\Phi d\tau^2 + \Psi\eta_{ij}dx^i dx^j\right]$$

که τ زمان همراه است.

الف) نشان دهید که معادلات اینشتین خطی شده تا مرتبه ϵ به صورت زیر است:

$$\nabla_c\nabla^c\bar{h}_{ab} + 2R_{cadb}\bar{h}^{cd} = -16\pi \text{Ŧ}_{ab} - 8\pi[\bar{h}_{cd}T^{cd}\gamma_{ab} + \bar{h}_{cd}\gamma^{cd}(T_{ab} - \frac{1}{2}T\gamma_{ab})]$$

که R_{abcd} تانسور ریمان، T_{ab} تانسور انرژی – تکانه و ∇_a مشتق هموردا نسبت به متریک γ_{ab} است. Ŧ_{ab} تانسور انرژی–تکانه مربوط به h_{ab} است که تانسور رد معکوس *trace reversed* عبارت است از:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}h\gamma_{ab}$$

که h و T رد نسبت به متریک پس زمینه است.

ب) نشان دهید که برای به دست آوردن معادله اینشتین خطی فوق باید از پیمانه لورنتس به صورت زیر استفاده کنیم.

$$\nabla_b \bar{h}^{ab} = 0$$

در نظر داشته باشید که تانسور انرژی – تکانه را نیز می توان به صورت زیر بسط داد

$$T_{ab} = T_{ab}^{(0)} + T_{ab}^{(1)}$$

که مرتبه صفر به صورت زیر تعریف می شود:

$$T^{(0)ab} = (\rho + p)U^{(0)a}U^{(0)b} + p\gamma^{(0)ab}$$

که ρ چگالی انرژی سیال کیهانی و p فشار آن می باشد. مرتبه یک اختلال عبارت است از

$$T^{(1)00} = a^{-2}(\delta\rho - 2\rho\Phi)$$

$$T^{(1)0j} = a^{-2}(\rho + p)v^j$$

$$T^{(1)ij} = a^{-2}(\delta\rho + 2p\Psi)\eta^{ij}$$

که $\delta\rho$ و δp اختلال در چگالی و فشار می باشد و v^i سه سرعت فضایی است. توجه داشته باشید که چهاربردار سرعت را نیز می توان به صورت زیر بسط داد:

$$U^a = U^{(0)a} + U^{(1)a}$$

که $U^{(0)a} = a^{-1}(1, \vec{0})$ و $U^{(1)a} = (-\Phi, \vec{v})/a$ می باشد.

ج) نشان دهید که در پیمانه TT معادله خطی اینشتین تبدیل به رابطه زیر می شود:

$$\nabla_c \nabla^c \bar{h}_{ab} + 2R_{cadb}\bar{h}^{cd} = 0$$

در به دست آوردن رابطه بالا فرض کردیم که اثر پاسخ ماده به حضور امواج گرانشی قابل صرف نظر است ($\mp_{ab} = 0$)

حال در حد اپتیک هندسی متریک مربوط به امواج گرانشی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\bar{h}_{ab} = A_{ab}e^{\frac{i\phi}{\epsilon}} = e_{ab}Ae^{\frac{i\phi}{\epsilon}} = e_{ab}h$$

که A و ϕ توابع حقیقی هستند و تابعی از زمان تاخیری است: $u = \tau - r$ که r فاصله تا منبع و e_{ab} قطبش امواج گرانشی را نشان می دهد.

د) حال نشان دهید که معادلات میدان به شکل ساده شده زیر برای امواج گرانشی به دست می آیند:

$$\epsilon^{-2}[-k^c k_c A_{ab}] + i\epsilon^{-1}[2k^c\nabla_c A_{ab} + A_{ab}\nabla_c k^c] + [\nabla^c\nabla_c A_{ab} + 2R_{cadb}A^{cd}] = 0$$

که $k_a = \nabla_a \phi$ بردار موج امواج گرانشی است:

ه) نشان دهید که k_a یک بردار نورگونه است و $\frac{dx^a}{dl} = k^a$ یک ژئودزی نورگونه می باشد و در رابط زیر صدق می کند:

$$\frac{Dk^a}{Dl} = k^b \nabla_b k^a$$

که ∇ مشتق هم وردا نسبت به متریک زمینه است. سپس نشان دهید که تانسور قطبش به صورت موازی بر روی ژئودزی های نورگونه منتقل می شود:

$$k^c \nabla_c e_{ab} = 0$$

و سپس نشان دهید که دامنه امواج گرانشی با واگرا شدن پرتوهای نورگونه کاهش می یابد.

و) نشان دهید که چاربردار k^a را می توان به صورت زیر بر حسب چاربردار سرعت و بردارهای پایه فضایی e^a بسط داد

$$k^a = E(u^a - e^a)$$

که $e^a u_a = 0$ و1 $e^a e_a =$ و فرکانس امواج گرانشی به صورت زیر به E مرتبط است:

$$E = 2\pi\nu = -u_a k^a$$

در نهایت نشان دهید که انتقال به سرخ منبع گرانشی با زیر اندیس GW برای مشاهده گر با زیر اندیس 0را می توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$1 + z_{GW} \equiv \frac{\nu_{GW}}{\nu_o} = \frac{u^a_{GW} k_a(l_{GW})}{u^a_o k_{a(l_o)}}$$

❋ فوتون های تابش زمینه کیهان پس از آخرین سطح پراکندگی تا زمانی که به مشاهده پذیر برسند وارد چاه پتانسیل ساختارهای کیهانی (اختلالات خطی در این مسئله) می شوند و از آن خارج می شوند. فوتون هایی که وارد چاه پتانسیل می شوند انرژی می گیرند و فوتون هایی که از چاه پتانسیل خارج می شوند انرژی از دست می دهند. در صورتی که چاه پتانسیل در زمان ورود و خروج فوتون ها تغییر نکند. انرژی فوتون های تابش زمینه کیهانی تغییر نمی کنند. حال در کیهانی که انرژی تاریک غالب است چاه پتانسیل ثابت نیست و از عمق آن کاسته می شود به بیان کمیت های تعریف شده در متریک $\dot{\phi} \neq 0$ می باشد. تغییر چاه پتانسیل باعث می شود که انرژی فوتون های تابش زمینه کیهانی تغییر کند. به این اثر، اثر تجمعی زکس و ولف Integrated Sachs Wolfe می گویند.

حال که در قسمت قبل سوال نشان دادید که امواج گرانشی در ابرسطح نورگونه منتشر می شود این ایده به ذهن متبادر می شود که شاید بتوان اثر تجمعی زکس و ولف را برای امواج گرانشی ساطع از یک منبع کیهانی یا حتی برای امواج گرانشی زمینه را نیز محاسبه کنیم.

با توضیحات بالا می توان ژئودزی نورگونه امواج گرانشی را که با $x^a(\ell)$ که با متریک زمینه $\gamma_{ab} = a^2(\eta_{ab} + \delta\eta_{ab})$

داده می شود دقیقا معادل است با ژئودزی های $\tilde{x}^a(\lambda)$ با پارامتر افین جدید λ که در زمینه اختلالی مینکوفسکی زندگی می کند $\tilde{\gamma}_{ab} = \eta_{ab} + \delta\eta_{ab}$ در این جا روابط زیر برقرار است:

$$d\ell = a d\lambda, \quad \gamma_{ab} = a^2\tilde{\gamma}_{ab}, \quad k^a = a^{-2}\tilde{k}^a$$

که $\tilde{k}^a$ بردار موج در متریک مینکوفسکی اختلالی است. حال ژئودزی امواج گرانشی و عدد موج را به سیاق گذشته به صورت جمله زمینه و مرتبه یک اختلال به صورت زیر بنویسید:

$$\tilde{x}^a(\lambda) = \tilde{x}^{(0)a} + \tilde{x}^{(1)a}, \qquad \tilde{k}^a = \tilde{k}^{(0)a} + \tilde{k}^{(1)a}$$

* ۱) با استفاده از معادله ژئودری نورگونه در متریک مینکوفسکی اختلالی نشان دهید:

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{k}^{(1)a} = \partial_\tau(\Psi + \Phi) - 2\frac{d\Phi}{d\lambda}$$

با انتخاب دستگاه مختصات مناسب و با فرض این که مبدا برروی گیرنده در زمان همراه τ_r باشد نشان دهید:

$$\tilde{k}^{(1)0} = -(\Phi + \Psi)|_{\lambda_e} - 2\Phi|_{\lambda_e}^{\lambda} + I_{ISW}$$

که I_{ISW} به صورت زیر به دست می آید: (زیر اندیس e به معنی منبع و زیر اندیس r به معنی دریافت کننده است)

$$I_{ISW} = \int_{\lambda_e}^{\lambda} \partial_\tau(\Phi + \Psi) d\lambda'$$

*۲) در این قسمت با تعریف بردارهای موج فضایی عمود و موازی راستای دید به صورت زیر

$$\tilde{k}^{(1)i} = \tilde{k}_{||}^{(1)i} + \tilde{k}_{\perp}^{(1)i}, \quad \tilde{k}_{||}^{(1)i} = \tilde{k}^{(0)i}\tilde{k}_j^{(0)}\tilde{k}^{(1)j}, \quad \tilde{k}_{\perp}^{(1)i} = \left(\delta_j^i - \tilde{k}^{(0)i}\tilde{k}_j^{(0)}\right)\tilde{k}^{(1)j}$$

تغییرات فاز امواج گرانشی را بر حسب تغییرات پارامتر افین به دست آورید و نشان دهید که این تغییرات به صورت زیر است:

$$\frac{d}{d\lambda}\phi = \tilde{k}^{(0)a}\nabla_a\phi = \Psi + \Phi, \qquad \delta\phi = \phi - \phi_e = \int_{\lambda_e}^{\lambda}(\Psi + \Phi)d\lambda'$$

*۳) در این قسمت ابتدا با توجه به تعریف فرکانس امواج گرانشی ω در دستگاه همراه سیال کیهانی با چهاربردار سرعت $U^a = (1-\Phi, v^i)/a$ نشان دهید که

$$\omega = a^{-1}[1 - \Psi(\lambda_e) - \Phi|_{\lambda_e}^{\lambda} + \vec{n}.\vec{v} + I_{ISW}]$$

و همچنین نشان دهید که اثرداپلر برای موج گرانشی برابر است با

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{1-\chi}{1+z}$$

که $\frac{a_r}{a_e} = 1 + z$ و χ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\chi = \phi|_e^r - \vec{n}.\vec{v}|_e^r - I_{ISW}(\lambda_r)$$

پس نکته بسیار جالب این است که اثردوپلر امواج گرانشی تصحیح اثر تجمعی زکس و ولف را همره ا خود دارد.

***) علاوه بر اثر تجمعی زکس و ولف می توان اثر همگرایی گرانشی را در کیهان مختل شده و در حضور امواج گرانشی محاسبه کرد. نشان دهید که جمله فضایی چاربردار تکانه به صورت زیر تغییر خواهد کرد*

$$\tilde{k}^{(1)i} = -\frac{1}{a^2}(\Psi + \Phi)e^i - \frac{1}{a^2}\int_{\eta_0} d\eta' \partial^i(\Psi + \Phi)$$

به تبع آن انحراف قسمت فضایی ژئودزی به صورت زیر به دست می آید: (رابطه زیر رابه دست آورید).

$$\tilde{x}^{(1)i} = -\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta'[e^i(\Psi + \Phi) + (\eta - \eta')\left(\delta_j^i - e^i e_j\right)\partial^j(\Phi + \Psi)$$

که η زمان همراه هست که در محل منبع گرانشی و دریافت کننده می تواند تعریف شود.

در ادامه مسئله می توانید تمام تصحیحات حاصل از متریک فریدمن مختل شده را بر روی امواج گرانشی حساب کنید این تصحیحات برابر خواهند بود با :

$$h = Ae^{i\phi} = \frac{Q(1+z)}{d_L}(1+\xi)e^{i(\phi_e + \delta\phi)}$$

که $Q = A^0 ar$ که A^0 دامنه بدون اختلال امواج گرانشی است. $d_L = ar(1+z)$ فاصله درخشندگی است.

تغییرات فاز را شما قبلا محاسبه کرده اید . حال نشان دهید:

$$\xi = -\Psi|_{\lambda_e}^{\lambda} - \frac{1}{2}\left(\delta_j^i - \tilde{k}^{(0)i}\tilde{k}_j^{(0)}\right)\int_{\lambda_e}^{\lambda}\int_{\lambda_e}^{\lambda\prime}\partial_{ij}(\Psi+\Phi)d\lambda'' d\lambda'$$

پواسون و ویل *Poisson, Eric et al. Phys.Rev. D52 (1995)* نشان دادند که برای یک دوتایی که دور هم دوران می کنند در تقریب نیوتنی، دامنه موج گرانشی و فاز به صورت زیر به جرم M_e ، *chirp* و فرکانس ذاتی f_e ربط دارد

$$Q = M_e(\pi f_e M_e)^{\frac{2}{3}}, \quad \phi_e = \phi_c - \frac{(\pi f_e M_e)^{-\frac{5}{3}}}{16}$$

که ϕ_c در فرکانس بی نهایت تعریف می شود. حال با توجه به تصحیحاتی که به خاطر اثر تجمعی زکس و ولف به دست آورده اید. نشان دهید که برای امواج گرانشی خواهیم داشت:

$$h = \frac{M_r}{D_L}(\pi f_r M_r)^{\frac{2}{3}} e^{i\phi_r}$$

که D_L فاصله زاویه درخشندگی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_L = \frac{d_L}{1-\chi+\xi}$$

ایده: حال می توان تبدیل فوریه χ و ξ را محاسبه کرد و توان آن ها را به طیف توان ماده در کیهان ربط داد.

محاسبه طیف توان ضربدری اثر تجمعی زکس ولف امواج گرانشی یا همگرایی گرانشی با توزیع ماده در کیهان می تواند دریچه جدیدی برای آزمون گرانش در مقیاس های کیهانی و تست مدل های انرژی تاریک و گرانش تعمیم یافته باشد.

با احترام

شانت باغرام

۱۵ خرداد۹۶
