تمرین سری ۷ درس مکانیک تحلیلی ۲ـ بهار ۹۸

دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ تحویل: دوشنبه ۲۷ خرداد ماه ۱۳۹۸

لطفا جواب تمرین را اسکن و به آدرس ایمیل TA.baghram.1@gmail.com **ارسال کنید.**
در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

۱- در این مساله می‌خواهیم اثر جملات غیر خطی در نوسان ریسمان را بررسی کنیم و یک قدم این مساله را به واقعیت نزدیک کنیم. در پایان قصد داریم یاد بگیریم: در حالت بدون وجود جملات غیر خطی هر مد نوسان به تنهایی برای خود زندگی می‌کند و انرژی برانگیختگی‌اش پایسته است ولی با در نظر گرفتن جملات غیر خطی، مدهای مختلف (اصطلاحاً) می‌توانند با یکدیگر صحبت کنند، انرژی بین آنها پمپ می‌شود.

الف) ریسمان کشیده شده به کشش T که دو سر آن ثابت شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید معادله‌ی خم آن باشد: $y = y(x,t)$ که y راستای عمود بر طناب و x راستای طناب و $y(0,t) = y(L,t) = 0$. طول طناب را به صورت یک انتگرال بنویسید.

می‌دانیم انرژی پتانسیل طناب برابر با طول آن ضربدر T است، البته با این فرض که کشش ثابت بماند.

ب) انرژی پتانسیل را به صورت انتگرالی و تا مرتبه‌ی ۴ کوچکی $\partial_x y(x,t)$ بسط دهید. جمله ثابت انرژی را دور بریزید. از این رابطه استفاده کنید:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

ج) لاگرانژی‌ای برای طناب بنویسید که با جمله مرتبه چهارم تصحیح شده است. در نظریه‌ی میدان به جملات بالاتر از مرتبه ۲ جملات برهمکنشی گفته می‌شود. درست به همان معنا که وجود این جملات باعث می‌شود مدهای مختلف نوسان با هم برهمکنش کنند. معادله حرکت تصحیح شده‌ی طناب را بدست آورید.

د)فرض کنید موجی وجود دارد که بسط فوریه‌ی آن به صورت: $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) Cos(\omega_n t)$ است. در حالتی که تصحیح برهمکنشی وجود ندارد ω_n را بیابید.

در کوچکترین مرتبه‌ی تصحیح، در نظر گرفتن جمله برهمکنشی همانند این است که ثوابت a_n دیگر ثابت نباشند بلکه با زمان به کندی تغییر کنند: $a_n(t)$. با جاگذاری بسط فوریه در معادله‌ی حرکت تصحیح یافته به صورت: $f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) Sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) Cos(\omega_n t)$ رابطه‌ای برای $\frac{d}{dt}a_n(t)$ پیدا کنید.

راهنمایی: فرض کنید زمان ویژه‌ی تغییرات $a_n(t)$ که آن را با τ نشان می‌دهیم بسیار زیاد باشد(تغییرات کند). یعنی: $\frac{1}{\tau} \ll \omega_n$. به همین خاطر جمله‌ی $\frac{d^2}{dt^2}a_n(t)$ را که از مرتبه‌ی $\frac{1}{\tau^2}$ است را از محاسبات خود دور بریزید.

مشاهده خواهید کرد $\frac{d}{dt}a_n(t)$ به دامنه‌ی دیگر مدها (a_mها) مربوط است! این درست به این معنا است که انرژی میان a_n و سایر a_m ها مبادله می‌شود.

۲- طنابی را در نظر بگیرید که در آب نوسان می‌کند. اگر طول dx از آن با سرعت $\dot{y}$ حرکت عرضی انجام دهد، نیروی اصطکاک $-\eta\, \dot{y}\, dx$ را متحمل می‌شود.

الف) معادله‌ی حرکت این طناب را بنویسید. و رابطه‌ی پاشندگی بین ω و k را بدست آورید.

اگر موجی بر روی این طناب با عدد موج k روشن کنیم، این موج همزمان با فرکانس $Re(\omega)$ نوسان کرده و منتشر می‌شود و با نمای $Im(\omega)$ به افت می‌کند.

ب) شرط اینکه موج بتواند منتشر شود چیست؟ اگر این شرط برقرار نباشد، برانگیختگی ایجاد شده روی طناب صرفاً درجا نابود می‌شود، نیمه عمر نابودی را بدست آورید. اگر موج بتواند منتشر شود، سرعت فاز و گروه آن چیست؟

۳- n گوی متصل به یک طناب سبک که در فواصل یکسان از هم قرار دارند مطابق شکل در نظر بگیرید. طناب از نقطه‌ای بر روی سقف آویزان شده است، طول کل طناب L و شتاب گرانش g و به سمت پایین است. فرض زاویه‌ی کوچک را همواره در مساله اعمال کنید، یعنی زاویه‌ی طناب متصل کننده بین گوی i و $i+1$ همواره کوچک خواهد ماند و طناب از خط قائمی که از نقطه آویزش می‌گذرد، خیلی دور نخواهد شد. فاصله‌ی افقی گوی i ام با خط عمود را x_i می‌نامیم.

الف)کشش طنابی که از بالا به گوی i ام متصل است را T_i می‌نامیم. از تعادل عمودی گوی‌ها (تا مرتبه‌ی نخست تقریب کوچکی زاویه) T_i را بیابید. معادله‌ی حرکت گوی i را بنویسید(برحسب مکان خود گوی و همسایگانش.) اگر این گوی در سر یا ته طناب باشد چطور؟

زندگی زیباتر خواهد شد اگر معادله‌ی تان را به فرم ماتریسی زیر درآورید:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ب) این چینش مدهای نوسانی بسیار زیادی دارد (تقریبا به تعداد گوی‌ها) برای یافتن این مدها کافیست ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس فوق را بیابید، به کمک هر نرم‌افزار دلخواهی(مثلا متمتیکا) ماتریس فوق را به ازای تعداد خوبی از گوی‌ها(مثلا ده‌تا) تشکیل داده(مقادیر عددی را به دلخواهد خود وارد کنید) و قطری کنید. مثلاً این کار در نرم‌افزار متمتیکا اگر ماتریس مورد نظر را M نامیده باشید با دستور U=Eigenvectors[M] انجام می‌شود. همزمان با اجرای دستور Eigenvalues[M] می‌توانید ویژه مقادیر متناظر با ویژه‌بردارهای داده شده را ببینید. با دستور ListPlot[U[[5]]] می‌توانید چینش گوی‌ها وقتی در حال نوسان در مد پنجم هستند را ببینید. نمودار این چینش‌ها برای فرکانس‌ها(انرژی های) مختلف را رسم کنید. آیا می‌توانید با نوسان دادن یک رشته در (دنیای واقع) این مدها را بسازید؟

ج) در حد پیوسته مثل حالت گسسته، مد کمترین فرکانس همان مد بدون گره است. فرکانس این مد را ω_0فرض کنید. این خم در چه معادله‌ی دیفرانسیلی صدق می‌کند؟ در صورت تمایل این معادله دیفرانسیلی را با فرض دانستن ω_0به کمک متمتیکا حل کنید. احتمالاً این معادله را با دو ثابت حرکت و به کمک توابع بسل(Bessel)، برای شما حل خواهد کرد. دو تابع بسل داده شده را تحقیق کنید و بگویید شرط مرزی متصل بودن سر طناب به سقف چه قیدی روی این ثوابت می‌گذارد؟

راهنمایی: برای حل معادله دیفرانسیل(مثلا معادله دیفرانسیل نوسانگر هماهنگ) ازین دستور در متمتیکا استفاده کنید:

$$\mathrm{DSolve}[f''[x] + \omega^2 f[x] == 0, f[x], x]$$

۴- موج درون یک سیال: یک گاز کامل با معادله‌ی حالت $P = nK_BT$ در نظر بگیرید که n تعداد ذرات در واحد حجم، P فشار، Tدمای گاز که در این مساله کمیتی ثابت فرض می‌شود و K_B ثابت بولتزمن است. فرض کنید این گاز به عنوان یک سیال در نقاط مختلف خود اندکی سرعت پیدا کند: $\delta\vec{v}(x)$. همزمان فشار نیز از حالت تعادل خود منحرف می‌شود: $P = P_0 + \delta P(x)$، چگالی ذرات دستخوش تغییر می‌شود: $n = n_0 + \delta n(x)$ و دما بالا و پایین می‌رود: $T = T + \delta T(x)$. برای سادگی فرض کنید راستای بردار $\delta\vec{v}(x)$ همواره جهت x است. همه‌ی محاسبات را تا مرتبه‌ی اول وردش‌ها انجام دهید.

حال فرض کنید انتقال گرما در این سیال وجود ندارد، قطرات آن فرایند بی‌دررو طی می‌کنند که نتیجه می‌دهد: ثابت $= PT^{-\alpha}$. α را یک ثابت دانسته فرض کنید.

الف) یک حجم مکعبی کوچک از سیال را در نظر بگیرید و با در نظر گرفتن اینکه از شش جهت به آن نیروی فشار وارد می‌شود، برای آن معادله‌ی حرکت بنویسید.

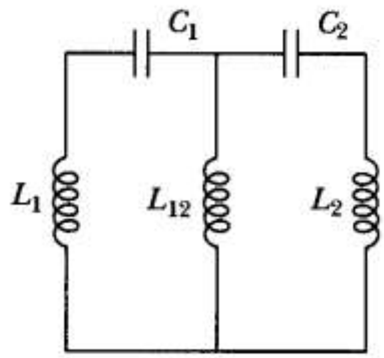
ب) یک مکعب کوچک از فضا که ساکن است را در نظر بگیرید. بخاطر اینکه سیال درون این مکعب سرعت دارد $\delta\vec{v}(x)$، مقدار ذره‌ی درون این مکعب با زمان تغییر می‌کند. چه رابطه‌ای میان مشتقات مکانی و فضایی $\delta\vec{v}(x)$ و $\delta n(x)$ وجود دارد؟

ج) با وردش دادن $P = nK_BT$ و استفاده از روابط بدست آمده در دو قسمت قبل، یک معادله‌ی تنها برای مشتقات $\delta\vec{v}(x)$ بدست آورید. رابطه‌ی پاشندگی موج در این سیال را بنویسید. سرعت صوت چقدر است؟

د) فرض کنید $\alpha = 7/2$. باقی مقادیر مورد نیاز را تحقیق کرده و جاگذاری کنید و سرعت صوت در هوای اطرافمان را به صورت عددی بیابید.

ه) مرتبه‌ی سرعت صوت در سطح خورشید را با فرمول خود بدست آورید؟

۵- بسامدهای مشخصه مدارهای جفت شده شکل زیر را پیدا کنید؟



۶- جرم M در امتداد یکمسیر صاف افقی حرکت می کند . آونگی از M آویخته شده است. این آونگ از میله‌ی بی وزنی تشکیل شده که به انتهای آن جرم m متصل است. ویژه بسامدها را بیابید و مدهای بهنجار را تشریح کنید.

۷- ریسمان بینهایت بلند پیوسته ای را با چگالی طولی جرم ρ_1 به ازای $x < 0$ و $x > L$ و چگالی $\rho_2 > \rho_1$ به ازای $0 < x < L$ در نظر بگیرید. اگر یک قطار موج نوسانی با بسامد ω از سمت چپ بر قسمتی از ریسمان فرود آید که چگالی بیشتری دارد، شدتهای بازتابی و عبوری را در قسمتهای مختلف رسمان پیدا کنید. L را چنان تعیین کنید ه بخش اعظم عبور از قسمت چگالتر را مجاز می دارد. در خصوص ارتباط این مسئله با کاربرد اندود غیر بازتابی در عدیسهای به اختصار اپتیکی بحث کنید.