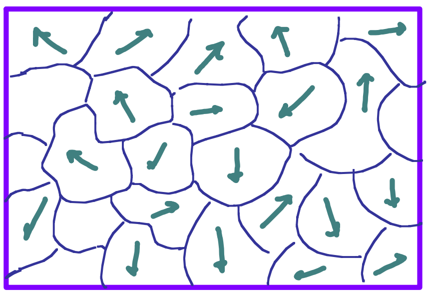
- **جامد پارامغناطیس**

یک مادهٔ جامد پارامغناطیس از ناحیه‌هایی تشکیل شده است موسوم به (Magnetic Domains)، هر کدام یک دوقطبی مغناطیسی کوچکی دارند.
به سادگی اندازهٔ این دوقطبی‌ها را μ می‌گیریم. در غیاب یک میدان مغناطیسی جهت این



دوقطبی‌ها کاملاً تصادفی است. اما یک میدان مغناطیسی سعی می‌کند که
این دوقطبی‌ها را با خودش هم‌جهت کند، اما افت‌وخیزهای گرمایی
مانع هم‌جهت شدن کامل دوقطبی‌ها با میدان مغناطیسی
خارجی می‌شوند. با استفاده از مکانیک آماری می‌توانیم این تعادل میان
میدان به‌عنوان عامل نظم‌دهندهٔ خارجی و دما به‌عنوان عامل بی‌نظمی را به‌طور کمی بفهمیم. در برخورد اول، با صرف‌نظر کردن از برهم‌کنش
بین دوقطبی‌ها با یکدیگر، تنها برهم‌کنش آنها با میدان مغناطیسی خارجی را در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$H = -(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \cdots + \vec{\mu}_N)\cdot\vec{B} \qquad (1)$$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که اتم‌ها در جای خود ساکن هستند و انرژی جنبشی ندارند. از آنجا که اندازهٔ دوقطبی‌ها ثابت است، هامیلتونی می‌شود:

$$H = -\mu(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \cdots \hat{n}_N)\cdot\vec{B} \qquad ۲$$

هر میکروحالت با بردارهای یکهٔ $(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots \hat{n}_N)$ مشخص می‌شود، هر بردار یکهٔ $\hat{n}_i$ با دو زاویهٔ θ_i, ϕ_i
مشخص می‌شود. اگر نماد $d\hat{n}_1$ را برای المان حجم زیر به کار ببریم: $d\hat{n}_1 = \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$ ← آنگاه

$$Z_N = \int d\hat{n}_1 \ldots d\hat{n}_N \, e^{+\beta\mu(\hat{n}_1 + \cdots \hat{n}_N)\cdot\vec{B}} = Z_1^N \qquad ۳$$

که در آن

$$Z_1 = \int d\hat{n}\, e^{+\beta\mu \vec{B}\cdot\hat{n}}$$ ۴

اگر جهت محور $\hat{z}$ را منطبق بر $\vec{B}$ بگیریم داریم.

$$Z_1 = \int e^{\beta\mu B\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{-1}^{1} e^{\beta\mu B x} dx = \frac{4\pi}{\beta\mu B} \sinh(\beta\mu B).$$ ۵

و در نتیجه.

$$Z_N = \left[\frac{4\pi}{\beta\mu B} \sinh(\beta\mu B) \right]^N$$ ۶

کمیتی که ما به آن علاقه‌مندیم، میزان مغناطش در راستای میدان مغناطیسی است. اگر به هامیلتونی دقت کنیم می‌بینیم که

$$H = -M_z B$$ ۷

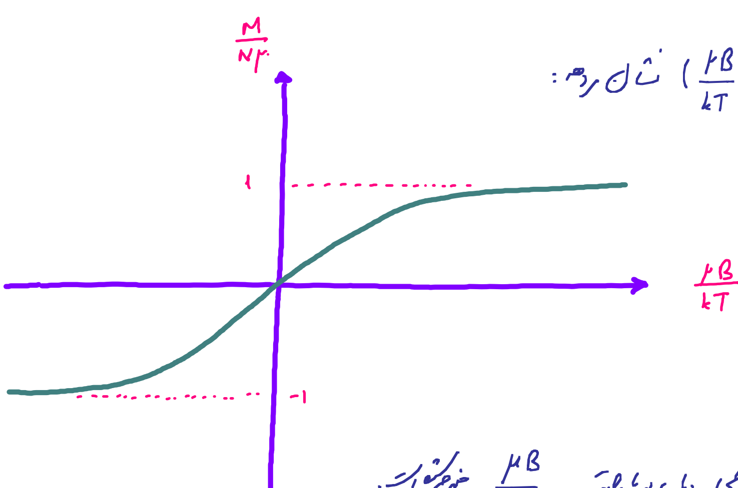
که در آن M_z مولفه مغناطش در راستای $\hat{z}$ است. بنابراین متوسط M_z که آن را با M نشان می‌دهیم برابر است با:

$$M = \langle M_z \rangle = \frac{+\partial}{\partial \beta B} \ln Z_N$$ ۸

پس کمی محاسبه بدست می‌آید:

$$\boxed{M = N\mu \left(\coth\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \left(\frac{kT}{\mu B}\right) \right)}$$ ۹

شکل زیر $\left(\frac{M}{N\mu}\right)$ را برحسب $\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$ نشان می‌دهد:



همانطور که انتظار می‌رفت رقابت میان میدان مغناطیسی و دما، در پارامتر $\frac{\mu B}{kT}$ خود را نشان داده است.

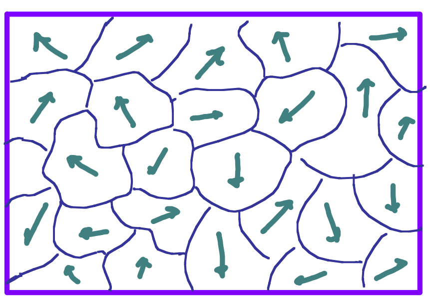
الف) با رسم چنین شکلی رابطه نشان می‌دهد که در دماهای پایین و میدان مغناطیسی بسیار قوی، M به حد اشباع می‌رسد. در دماهای بالا و میدان‌های مغناطیسی ضعیف که $\frac{\mu B}{kT}$ کوچک است با بسط $\mathrm{Cosh}\, x - \frac{1}{x}$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$M \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{N\mu^2}{k}\right)\frac{B}{T} = C\,\frac{B}{T} \qquad ۱۰$$

که در آن $C := \frac{1}{2}\frac{N\mu^2}{k}$ ثابت کوری نامیده می‌شود.

• پارامغناطیس کوانتومی

در مسئله قبلی فرض کردیم که دوقطبی‌ها رفتار کلاسیک دارند. به همین دلیل دوقطبی را با یک بردار نشان دادیم که می‌تواند هر جهتی را در فضا اختیار کند. این فرض معمولاً در دوقطبی‌های ماکروسکوپی یعنی دوقطبی‌هایی که ناشی از مناطق مغناطیسی Magnetic Domains در مواد فرومغناطیسی هستند، با تقریب خوبی درست است. زیرا هر کدام از این مناطق دارای هزاران هزار اتم هستند و دوقطبی مغناطیسی کل که در هر منطقه تشکیل شده است، برآیند دوقطبی‌های اتمی این هزاران هزار اتم است. پس چنین دوقطبی‌ای رفتار کلاسیک دارد یعنی امتداد و جهت دلخواه پیوسته‌ای را اختیار می‌کند.



این مناطق مغناطیسی با نواحی اتمی و با خاصیت‌های مشابهی در جامد از یکدیگر جدا می‌شوند. اما وقتی می‌خواهیم رفتار مغناطیسی اتم‌ها را در درون یک منطقه بررسی کنیم یا وقتی که با پارامغناطیسی سروکار داریم (که در آن مغناطش کل ناشی از تک‌تک اتم‌هاست) می‌بایست رفتار کوانتومی اتم‌ها را در نظر بگیریم.

مومنت اتم، چنانچه از فیزیک مقدماتی می‌دانیم گشتاور مغناطیسی متناسب است با گشتاور زاویه‌ای. یعنی

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S} \qquad ۱۱$$

که در آن γ ضریبی است که به خصوصیات الکتریکی و هم چنین به جرم ذره بستگی دارد. هامیلتونی برهم‌کنش این اتم‌ها با میدان

مغناطیسی خارجی برابر است با:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i \cdot \vec{B} = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i \cdot \vec{B} \qquad ۱۲$$

هرگاه میدان مغناطیسی خارجی در جهت z باشد این رابطه تبدیل می‌شود به:

$$H = -\gamma B \sum_{i=1}^{N} S_i^z \qquad ۱۳$$

که در آن S_i^z مؤلفه سوم عملگر اسپین است. در پایه‌ای که S^z قطری باشد درایه‌های قطری آن برابر با $\hbar$

باشد. در نتیجه مقادیر این عملگر برابر با $m\hbar$ که در آن m یک عدد صحیح یا نیم صحیح بین $-s$ و s است.

$$m \in \{-s, -s+1, -s+2, \ldots\ldots s-2, s-1, s\}. \qquad ۱۴$$

به این ترتیب تابع پارش عبارت است از:

$$Z_N = tr\left(e^{-\beta H}\right) = tr\left(e^{-\beta(H_1+H_2+\cdots H_N)}\right)$$

$$= \left[tr\left(e^{-\beta H_1}\right)\right]^N =: Z_1^N \qquad ۱۵$$

که در آن

$$Z_1 = tr\left(e^{\beta\gamma B S_z}\right) = \sum_{m=-s}^{s} e^{\beta\gamma B\hbar m} \qquad ۱۶$$

جمع یک تصاعد هندسی است

$$Z_1 = \frac{e^{-\beta\gamma\hbar B} - e^{\beta\gamma\hbar B(s+1)}}{1 - e^{\beta\gamma\hbar B}} \qquad ۱۷$$

که در آن از آن‌ها به شکل زیر گرفت :

$$Z_1 = \frac{\sinh \beta\gamma\hbar B(S+\frac{1}{2})}{\sinh \frac{\beta\gamma\hbar}{2} B}$$ ۱۸

برای اینکه بتوانیم نتیجه حاصل با حالت کلاسیک مقایسه کنیم $S\hbar\gamma$ را برابر μ می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$Z_N^{quantum} = \left(\frac{\sinh \beta\mu B(1+\frac{1}{2S})}{\sinh \frac{\beta\mu B}{2S}}\right)^N$$ ۱۹

و از رابطه (۷)

$$Z_N^{classical} = \left[\frac{4\pi}{\beta\mu B}\sinh(\beta\mu B)\right]^N$$ ۲۰

در حالت کوانتومی متوسط مغناطش برابر است با : $M = \frac{\partial}{\partial(\beta B)} \ln Z_N$ و یا

$$M = N\mu\left\{ \left(1+\frac{1}{2S}\right) \coth \frac{\mu B(1+\frac{1}{2S})}{kT} - \frac{1}{2S} \coth \frac{(\mu B/2S)}{kT} \right\}.$$ ۲۱

و یا

$$\frac{M}{N\mu} = f_S\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$ ۲۲

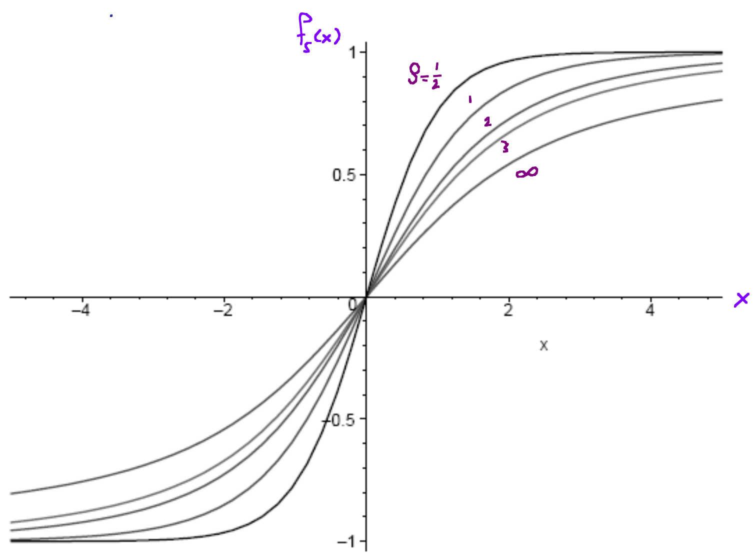
که در آن

$$f_S(x) = \left(1+\frac{1}{2S}\right) \coth \left(1+\frac{1}{2S}\right)x - \frac{1}{2S} \coth \frac{x}{2S}.$$ ۲۳

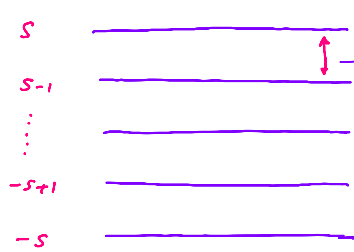
اگر $S \to \infty$ ، تابع $f_S(x)$ تبدیل می‌شود:

$$f_\infty(x) = \coth x - \frac{1}{x} \qquad (۲۴)$$

که همان نتیجه‌ی کلاسیک است. شکل زیر تابع $f_S(x)$ را برای Sهای مختلف نشان می‌دهد.



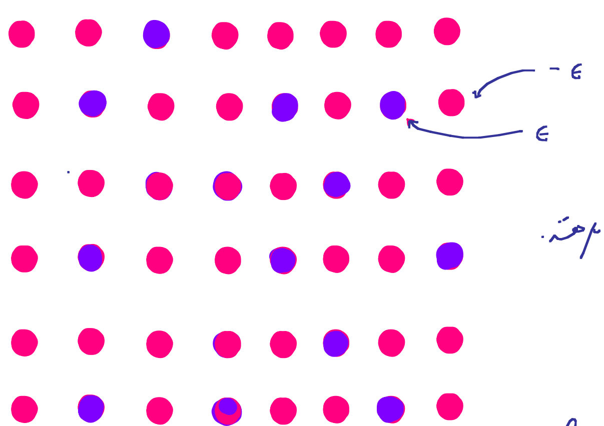
در این شکل نکته‌ی بسیار جالب وجود دارد و آن این که به ازای هر مقدار ثابت $x = \frac{\mu B}{kT}$ ، هر چه که مقدار S را زیاد کنیم در نتیجه $f_S(x)$ و M کمتر می‌شود. به عبارت دیگر اثرات افت و خیزهای و تاثیر آن در بی‌نظم کردن جهت دوقطبی‌ها در Sهای بزرگ بیشتر از Sهای کوچک است. دلیل این امر هم واضح است، زیرا به ازای هر S، تعداد سطوح انرژی یک اتم برابر با $2S+1$ است و افت و خیز حرارتی می‌تواند اتم را به $2S+1$ تراز انرژی (یا جهت اسپین) می‌کشاند.



$$\Delta\varepsilon = \gamma\hbar B = \frac{\gamma\hbar B S}{S} = \frac{1}{S}(\mu B)$$

• سیستم‌های دوحالته   Two-level systems.

مجموعه‌ای متشکل از N سیستم که هرکدام در دو تراز انرژی ϵ و $-\epsilon$ می‌توانند قرار بگیرند، سیستمی است که به دلیل گستردگی کاربردهای آن اهمیت زیادی دارد. بسیاری از سیستم‌های فیزیکی متفاوت یعنی سیستم‌هایی خارج از حوزه‌ی فیزیک را می‌توان به این سیستم‌ها نگاشت. بنابراین جا دارد که در این بخش این موضوع را به دقت مطالعه کنیم. اما قبل از مطالعه‌ی این سیستم بهتر است با چند مدل مختلف که به چنین سیستمی نگاشته می‌شوند آشنا شویم.



• مغناطیس و دی‌الکتریک.

مجموعه‌ای از اتم‌ها را در نظر بگیرید که دارای دوقطبی مغناطیسی ثابتی به اندازه μ هستند. اگر این مجموعه را در یک میدان مغناطیسی خارجی B قرار دهیم، در ساده‌ترین مدل می‌توانیم فرض کنیم که هر اتم دو جهت مختلف را در راستای میدان اختیار می‌کند. جهت موافق با انرژی $-\epsilon = -\mu B$ و جهت مخالف با انرژی $\epsilon = \mu B$. در اینجا از برهمکنش بین اتم‌ها با یکدیگر صرف‌نظر کرده‌ایم و تنها برهمکنش ممان دوقطبی اتم‌ها را با میدان خارجی در نظر گرفته‌ایم.

مثال دیگر از این نوع یک دی‌الکتریک است که متشکل از اتم‌هایی با دوقطبی الکتریکی به اندازه p است. هرگاه یک اتم در جهت میدان الکتریکی $\mathcal{E}$ قرار بگیرد انرژی آن $-p\mathcal{E} = -\epsilon$ و هرگاه در خلاف آن قرار بگیرد انرژی آن $p\mathcal{E} = \epsilon$ است.

• اتم‌های ناخالصی در یک شبکه‌ی جامد

یک شبکه‌ی جامد را در نظر بگیرید که N تا اتم ناخالصی در آن قرار داده‌اند:

این اتم‌ها در جای خود ثابت هستند و انرژی جنبشی ندارند یا این‌که انرژی آنها آنقدر کوچک است که قابل صرف نظر کردن است.

هر اتم ناخالصی می‌تواند در حالت پایه خود با انرژی 0 و یا در حالت برانگیخته با انرژی ϵ قرار بگیرد.

پس از این مثال‌ها می‌خواهیم یک مجموعه N ذره‌ای از سیستم ۲ حالته را در آنسامبل کانونیک مطالعه کنیم. هر ذره را می‌توان با تغییر مبدأ انرژی، انرژی دو حالت هر ذره را $+\epsilon$ و $-\epsilon$ گرفت. هر پیکربندی حالت این سیستم را با یک مجموعه N تایی از اعداد ۱ و ۱- به شکل $(s_1, s_2, \ldots\ldots s_N)$ نشان می‌دهیم که هر کدام آن یک عدد است. s_i نشان دهنده وضعیت اتم i ام است. انرژی چنین پیکربندی‌ای برابر است با:

$$E = (s_1 + s_2 + \cdots s_N)\,\epsilon \qquad ۲۵$$

بنابراین تابع پارش مساوی است:

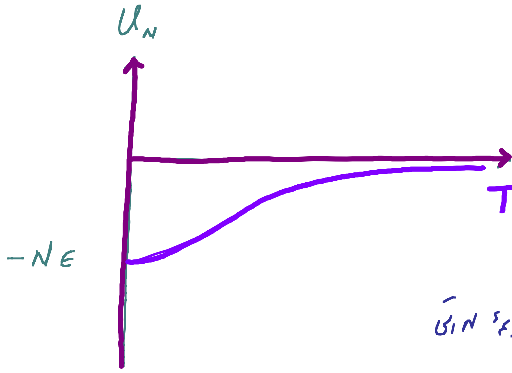
$$Z_N = \sum_{s_1, s_2, \ldots s_N} e^{-\beta\epsilon(s_1+s_2+\cdots s_N)} = \prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{s_i} e^{-\beta\epsilon s_i}\right) = (2\cosh\beta\epsilon)^N \qquad ۲۶$$

از این تابع پارش می‌توان کمیت‌های زیر را بدست آورد:

- انرژی متوسط U

$$U_N = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -N\epsilon\tanh\frac{\epsilon}{kT} \qquad ۲۷$$

شکل زیر انرژی متوسط را برحسب دما نشان می‌دهد.



حال می‌توان پرسید که احتمال آنکه i-امین اتم در حالت +1 و یا -1 باشد چقدر است؟ پاسخ به این سوال ساده است. در واقع احتمال اینکه مجموعه N اتمی در حالت $s_i=\pm 1$ $(s_1, s_2, \dots s_N)$ باشد برابر است با:

$$P_N(s_1, s_2, \dots s_N) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta(s_1+s_2+\cdots s_N)\epsilon} \qquad ۲۸$$

در نتیجه برای i-امین اتم مثل اتم شماره 1 خواهیم داشت:

$$P_1(s_1) = \sum_{s_2,\dots s_N} P_N(s_1, s_2, \dots s_N) = \frac{1}{Z_1} e^{-\beta\epsilon s_1} \qquad ۲۹$$

که در آن $Z_1 = 2\cosh\beta\epsilon$. این جواب بطور خیلی حتمی نتیجه را می‌دهد. بنابراین

$$P_+ = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{2\cosh\beta\epsilon}, \qquad P_- = \frac{e^{\beta\epsilon}}{2\cosh\beta\epsilon}. \qquad ۳۰$$

می‌توان پرسید که با چه احتمالی تعداد N_+ اتم در حالت +1 و N_- اتم در حالت -1 هستند. پاسخ این است که:

$$P(N_+, N_-) = \binom{N}{N_+} P_+^{N_+} P_-^{N-N_+} \qquad ۳۱$$

از نتیجه توزیع دوجمله‌ای می‌دانیم که تعداد متوسط اتم‌ها در حالت + برابر است با:

$$\overline{N_+} = N P_+ = N \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{2\cosh\beta\varepsilon} \qquad ۳۲$$

و انحراف حول مقدار متوسط برابر است با:

$$\overline{N_+^2} - \overline{N_+}^2 = N P_+ P_- = N \frac{1}{4\cosh^2\beta\varepsilon} \qquad ۳۳$$

و در نتیجه:

$$\boxed{\frac{\overline{N_+^2} - \overline{N_+}^2}{\overline{N_+}^2} = \frac{1}{N} e^{\frac{2\varepsilon}{kT}}} \qquad ۳۴$$

• مدل آیزینگ

در مدل‌هایی که در بالا برای بررسی رفتار ترمودینامیکی اتم‌ها در میدان مغناطیسی مطالعه کردیم، برهم‌کنش دوقطبی‌ها با یکدیگر را در نظر نگرفتیم. در یک مدل واقعی‌تر باید برهم‌کنش این دوقطبی‌ها را نیز با هم در نظر گرفت. با توجه به اینکه مدل مغناطیسی متناسب با اسپین است، هامیلتونی مناسب برای توصیف چنین مجموعه‌ای عبارت است از:

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij}\, \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j - \vec{B}\cdot\sum_i \vec{S}_i \qquad ۳۵$$

که در آن ضریب تناسب را در $\vec{S}_i$ ها مانند $\vec{B}$ ضرب کردیم. J_{ij} شدت برهم‌کنش بین دو اسپین iام و jام را نشان می‌دهد. هرگاه میدان مغناطیسی را در راستای z در نظر بگیریم و فرض کنیم که برهم‌کنش‌ها فقط بین نزدیک‌ترین همسایه‌ها عمل می‌کنند، مدل ساده‌تر زیر به دست می‌آید:

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j - B\sum_i S_i^z \qquad ۳۶$$

که در آن علامت $\langle i,j\rangle$ به این معنی است که جمع فقط روی همسایه‌های نزدیک انجام می‌گیرد.

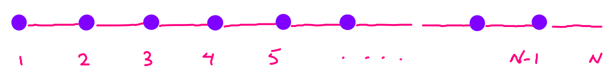
این مدل را نخستین بار آیزینگ برای مطالعه فرومغناطیس‌ها ارائه داد. هرگاه فرض کنیم که $\vec{S}_i$ ها به جای بردار، کمیت‌هایی هستند،

تنها دو مقدار +1 و -1 را اختیار می‌کنند (اندازه‌ی برهمکنش را به صورت ضریب J در آن‌ها ضرب می‌کنیم)، مدلی به دست می‌آید که به عنوان آیزینگ مدل Ising نامیده می‌شود. بنابراین مدل آیزینگ با هامیلتونی زیر تعریف می‌شود:

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j - B\sum_i s_i \qquad ۳۷$$

- حل مدل آیزینگ در یک بعد:

شبکه‌ی یک بعدی زیر را در نظر بگیرید:



می‌خواهیم تابع پارش مدل آیزینگ را روی این شبکه حساب کنیم. شرایط مرزی را پریودیک در نظر می‌گیریم. (قضیه‌ای کلی در ترمودینامیک آماری ثابت شده است مبنی بر این که در حد ترمودینامیک $(N\to\infty)$ نوع شرایط مرزی در نتایج ترمودینامیکی تاثیری ندارد). تحت این شرایط اسپین $N+1$ ام همان اسپین اول است. مثل این که شبکه‌ی اسپین‌ها روی یک حلقه تشکیل شده باشد. در این صورت هامیلتونی را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \frac{B}{2}\sum_{i=1}^{N}(s_i + s_{i+1}) \qquad ۳۸$$

و تابع پارش برابر است با:

$$Z = \sum_{s_1\cdots s_N}\prod_{i=1}^{N} e^{\frac{\beta B}{2}(s_i+s_{i+1}) + \beta J s_i s_{i+1}} \qquad ۳۹$$

حال می‌توان جمله درون $\prod_{i=1}$ را به صورت درایه‌ی یک ماتریس ۲×۲ مثل T در نظر گرفت. این ماتریس برابر است با:

$$T = \begin{bmatrix} e^{\beta J+\beta B} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J-\beta B} \end{bmatrix} \qquad ۴۰$$

و ماتریس انتقال یا Transfer Matrix خوانده می‌شود. بنابراین تابع پارش برابر است با:

$$Z = \sum_{s_1, s_2, \ldots s_N} T_{s_1 s_2} T_{s_2 s_3} T_{s_3 s_4} \cdots T_{s_N s_1} = \mathrm{Tr}(T^N) \qquad ۴۱$$

بنابراین کافی است که ویژه‌مقادیر ماتریس T را حساب کنیم. این ویژه‌مقادیر را λ_1 و λ_2 می‌نامیم. ←

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N \qquad ۴۲$$

در حد ترمودینامیک تنها بزرگترین ویژه مقدار T مهم است. این ویژه مقدار را λ_1 می‌گیریم. در این حد داریم:

$$Z = \lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right) \to \lambda_1^N \qquad ۴۳$$

و از اینجا تابع انرژی آزاد برحسب دما، میدان مغناطیسی و ثابت جفت‌شدگی J بدست می‌آید:

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \lambda_1 . \qquad ۴۴$$

مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh \beta\mu B \pm \sqrt{e^{2\beta J} \cosh^2 \beta\mu B - 2 \sinh 2\beta J} \qquad ۴۵$$

کمیتی که مورد علاقه ما است، مقدار متوسط مغناطش است که برابر است با:

$$M = \left\langle \sum_{i=1}^{N} s_i \right\rangle = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu B)} \ln Z = N \frac{\partial}{\partial(\beta\mu B)} \ln \lambda_1 \qquad ۴۶$$

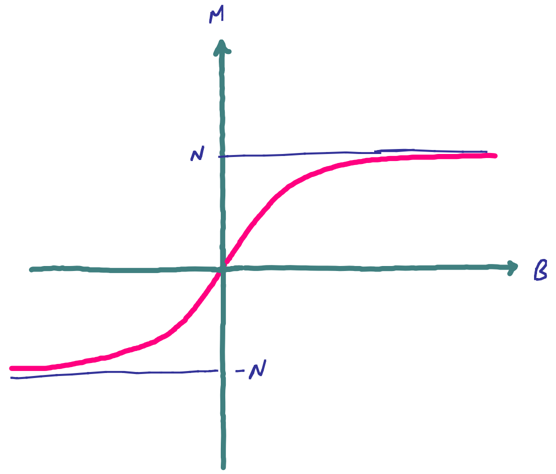
هرگاه عبارت زیر رادیکال را در λ_1، Δ بنامیم، M خواهد شد:

$$M = N \frac{e^{\beta J} \sinh \beta\mu B + \Delta^{-1} \sinh \beta\mu B \cosh \beta\mu B \, e^{2\beta J}}{e^{\beta J} \cosh \beta\mu B + \Delta} \qquad ۴۷$$

ما به خصوص به این سوال علاقمندیم که آیا در غیاب میدان مغناطیسی، مغناطش می‌تواند وجود داشته باشد یا نه؟ در مدل آیزینگ یک بعدی پاسخ این سوال منفی است، زیرا اگر B را مساوی صفر قرار دهیم، از عبارت بالا بدست می‌آید

$$M(B=0) = 0 .$$

رفتار M برحسب B به شکل زیر است:



مدل آیزینگ در ابعاد بالاتر

حل دقیق مدل آیزینگ تنها در یک بعد ساده است. حل دقیق آن در دو بعد تنها وقتی امکان‌پذیر است که $B=0$ است. تا کنون روش‌های مختلفی برای حل این مدل در بعد ۲ ارائه شده است که نخستین آنها کارِ Lars Onsager در سال 1949 بوده است. این حل را در بعضی از کتاب‌های پیشرفته مکانیک آماری مثل کتاب‌های زیر می‌توانید ببینید:

1) Kerson Huang ; Statistical Mechanics.

2) Richard Feynman ; Statistical Mechanics, a set of lectures.

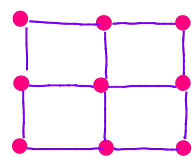
هم چنین می‌توانید به کتاب‌های «نظریه میدان آماری» نیز رجوع کنید. اما مدل سه بعدی آیزینگ حتی بدون میدان مغناطیسی نیز تا کنون حل نشده است. بنا بر این ناچار می‌بایست بجای حل دقیق، به حل‌های تقریبی اکتفا کنیم. این نوع حل‌ها بسیاری از خصوصیات اصلی و کیفی مدل را روشن می‌کنند. یکی از مهمترین این تقریب‌ها، تقریب میدان متوسط یا Mean field approximation نام دارد. این نوع تقریب نه تنها برای مدل آیزینگ بلکه برای هر نوع مسئله بس ذره‌ای دیگری نیز به کار می‌رود. در این جا این روش را برای حل تقریبی مدل آیزینگ در یک بعد دلخواه به کار می‌بریم.

تقریب میدان متوسط برای مدل آیزینگ

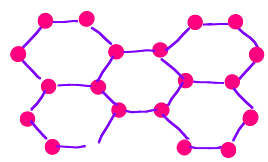
شبکه‌ای از اسپین‌ها را در نظر بگیرید که برهم‌کنش آنها با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = -J\sum_{<ij>} S_i S_j - B\sum_i S_i \qquad ۴۸$$

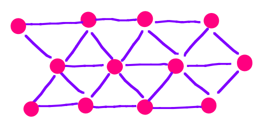
که در آن علامت $<,>$ به معنای جمع روی اسپین‌های همسایه است. وضعی که به ساختمان شبکه بستگی دارد این است که هر اسپین تعداد z تا همسایهٔ نزدیک دارد. جدول زیر z را برای انواع شبکه‌ها نشان می‌دهد.



شبکهٔ d بعدی مکعبی $\qquad z = 2d$



شبکهٔ زنبور عسلی دو بعدی $\qquad z = 3$



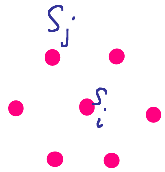
شبکهٔ مثلثی دو بعدی $\qquad z = 6$

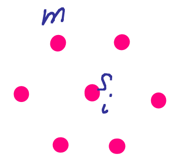
تابع پارش برابر است با:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{\beta J\sum_{<ij>} S_i S_j + \beta B\sum_i S_i}$$

که در آن $\sum_{\{S\}}$ به معنای جمع روی تمام جهت‌گیری‌های اسپین در شبکه است. اگر شبکه دارای N تا اسپین باشد، تعداد این جهت‌گیری‌ها برابر است با 2^N. همین امر یعنی این که تعداد جهت‌گیری‌ها نسبت به تعداد اسپین‌ها به صورت نمایی رشد می‌کند هرگونه محاسبهٔ دقیق تابع پارش را توسط کامپیوتر برای N دلخواه غیرممکن می‌سازد. در تقریب میدان متوسط به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. در عبارت $\sum_{<ij>} S_i S_j$، به جای S_j مقدار متوسطی از اسپین‌ها را به جای S_j که آن را برابر با m می‌گیریم قرار می‌دهیم و جاگذاری زیر را انجام می‌دهیم:

$$\sum_{<ij>} S_i S_j \simeq \sum_i S_i (m z) \qquad ۴۹$$

$\sum_j$ 

$\simeq \sum_j$ 

$= S_i\,(m z)$

(تقریب میدان متوسط)

معلوم است که هر چه که تعداد همسایگی بیشتر باشد، این تقریب، تقریب بهتری است. معنای فیزیکی این تقریب این است که اسپین i در شرایط افت و خیز حرارتی دائماً جهت خود را عوض می‌کند، بنابراین اسپین شماره i، در محیطی کوچک از همسایه‌ها خود را گرفتار است که اسپین متوسط آن‌ها m است. با این تقریب محاسبه تابع پارش بسیار ساده می‌شود:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{\beta J z m \sum_i S_i + \beta B \sum_i S_i} \qquad ۵۰$$

$$= \sum_{S_1, S_2, \dots S_N} \prod_{i=1}^{N} e^{\beta (J z m + B) S_i} = \left[2 \cosh \beta (J z m + B)\right]^N$$

که در آن N تعداد کل اسپین‌ها است. حال می‌توان از روی تابع پارش مقدار متوسط مغناطش را برای هر اسپین حساب کرد. تقریب مادامی صحیح است که مقدار متوسط اسپین همان m یعنی مقداری باشد که در تقریب اول فرض کرده‌ایم. بنابراین

$$m = \frac{1}{N} M = \frac{1}{N} \langle S_1 + S_2 + \cdots + S_N \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta B} \ln Z \qquad ۵۱$$

و یا

$$m = \frac{\partial}{\partial \beta h} \ln \left[2 \cosh \beta (J z m + B)\right] \qquad ۵۲$$

که منجر به معادله زیر می‌شود.

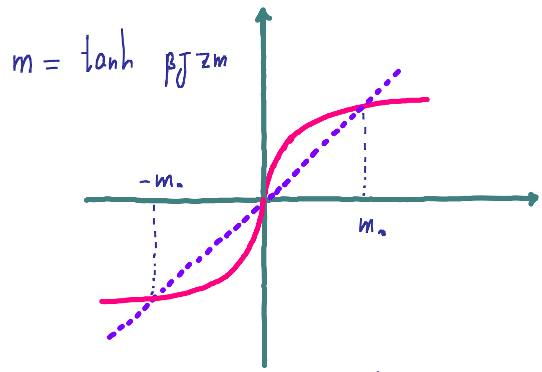
$$\boxed{m = \tanh \beta (J z m + B)} \qquad ۵۲$$

این رابطه مقدار m را برحسب J، T، و B بدست می‌دهد. البته مقدار m را بایست با حل این رابطه به صورت نموداری تعیین کرد. سوال مهمی که می‌خواهیم به آن پاسخ دهیم این است که آیا امکان دارد در غیاب میدان مغناطیسی مقدار m غیرصفر شود؟

منجر به حل معادله‌ی

$$m = \tanh(\beta J z m) \qquad ۵۴$$

که به صورت نموداری حل می‌کنیم: شکل زیر:

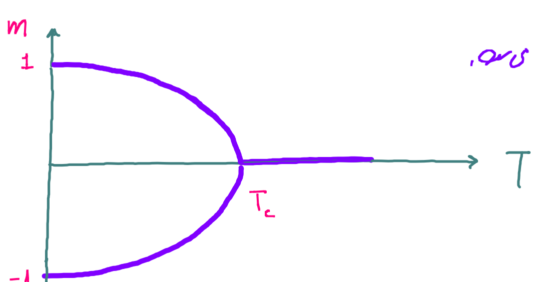


از روی شیب نمودار $\tanh \beta J z m$ در مرکز دیده می‌شود که هرگاه $\beta J z > 1$ باشد، سه نقطه تقاطع 0 و $\pm m_0$
وجود دارد و هرگاه $\beta J z < 1$ باشد تنها یک جواب $m=0$ وجود دارد. بنابراین یک دمای بحرانی وجود دارد که از معادله
$\beta J z = 1$ بدست می‌آید. این دما برابر است با:

$$T_c = \frac{J z}{k} \qquad ۵۵$$

که در پایین‌تر از آن مغناطش خود به خود پدید می‌آید. اصطلاحاً می‌گوییم که با پایین آمدن دما، در نقطه‌ی بحرانی گذار فاز رخ می‌دهد و
سیستم از فاز بی‌نظم ($\langle s_i \rangle = 0$) به فاز منظم ($\langle s_i \rangle = m$) می‌رود.

رفتار m برحسب T به شکل زیر است:



نکته: وقتی که $T < T_c$ است، $m=0$ نیز یک جواب معادله است ولی با رسم شکل می‌توان نشان داد که این جواب
یک جواب ناپایدار از معادله ۵۴ است.

دقت کنید که حل میدان متوسط پیش‌بینی می‌کند که حتی در بعد ۱ نیز مغناطش خودبخود در مدل آیزینگ وجود خواهد داشت و حال آنکه قبلاً با حل دقیق مدل آیزینگ (درس ۱۰) که چنین نیست. بنابراین تقریب میدان متوسط در بعد ۱ نتیجه غلطی بدست می‌دهد. دلیل آن هم از نظر فیزیکی این است که در بعد ۱، هر اسپین تنها دو همسایه دارد و عوض کردن $s_1 + s_2$ با $2m$ تقریب چندان خوبی نیست. اما در بعد ۲ و بالاتر حل دقیق هم چنین پیش‌بینی را با کمک اثبات‌های دقیق وجود گذار فاز را پیش‌بینی می‌کند که با نتایج تقریب میدان متوسط همخوانی دارد. به طور کلی تقریب میدان متوسط هر چه که تعداد همسایه‌ها بیشتر شود اعتبار بیشتری می‌یابد.

در این جا یک سؤال مهم مطرح و آن این که علت این است که در غیاب میدان مغناطیسی هامیلتونی نسبت به تبدیل $s_i \to -s_i$ متقارن است،

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \qquad (۵۶)$$

پس بنابراین حتماً داریم که

$$P(s_1, s_2, \dots, s_N) = P(-s_1, -s_2, \dots, -s_N) \qquad (۵۷)$$

در نتیجه متوسط $\langle s_i \rangle$ می‌بایست برابر با صفر باشد، زیرا در رابطه بالا اگر ببینیم که همان قدر که احتمال دارد s_i مثبت باشد همان قدر هم احتمال دارد که منفی باشد. این پدیده یعنی غیرصفر شدن یک مشاهده‌پذیر با وجود آنکه تقارن هامیلتونی حکم به صفر شدن آن می‌دهد را شکست خودبخود تقارن یا Spontenous Symmetry Breaking می‌نامند.

حال سؤال این است که چگونه برقراری این تقارن‌ها با وجود مغناطش خودبخود آشتی دارد؟ پاسخ در چیزی است که آن را شکست خاصیت ارگودیک بودن یا Ergodicity Breaking می‌گویند.

برای درک این نکته می‌بایست به بحث‌هایی که در توجیه اصل موضوع‌ها نیست آورده بودیم باز گردیم. نکته اساسی این بود که هر گاه متوسط‌گیری‌ها روی زمان‌های بسیار طولانی انجام شود بینهایت زمانی تغییرات میکروحالات یک سیستم بسیار زیاد باشد آنگاه این فرض که سیستم تمامی میکروحالات را با

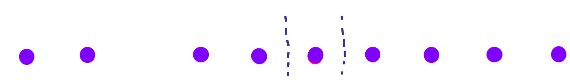
احتمال تکثیر این اشتعال‌ها بسیار کوچک است. اما ممکن است که سیستم در ناحیه‌ای از فضای پیکربندی حالات‌ای که در دسترس است گیر کرده و زمان بسیار زیادی لازم باشد تا از آن ناحیه بیرون بیاید و به کل فضای پیکربندی حالات سر بزند. در این شرایط خاصیت ارگودیک بودن از بین می‌رود. برای فهم این پدیده گفته‌شده به مدل آیزینگ یک بعدی توجه می‌کنیم. در این مدل می‌دانیم که گذار فاز رخ نمی‌دهد. دلیلش این است که در مدل یک بعدی آیزینگ خاصیت ارگودیک بودن شکسته نمی‌شود. فرض کنید که سیستم در پیکربندی حالت زیر گیر کرده است:


۵۸

اسپین‌های − را با ●، اسپین‌های + را با ● نشان می‌دهیم. انرژی هر پیکربندی حالت اسپین‌ها را می‌توان با هامیلتونی زیر نوشت:

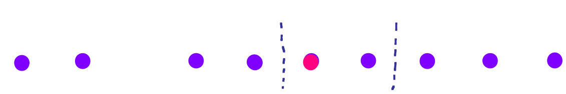
$$H = -J\sum_{i} (S_i S_{i+1} - 1) \qquad ۵۹$$

همانطور که می‌بینید یک مقدار ثابت به هامیلتونی اضافه کرده‌ایم. مسلم است که انرژی پیکربندی حالت ۵۸ برابر با صفر است. حال سوال می‌کنیم که چه مقدار انرژی لازم است تا یکی از اسپین‌ها برگردانده شود. یک نگاه نشان می‌دهد که مقدار انرژی لازم برابر با $2J$.


(۶۰)

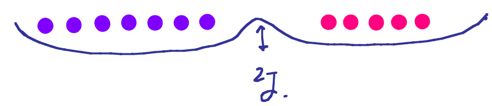
در واقع رابطهٔ ۵۹ می‌گوید که به ازای هر دیواره (که در شکل بالا با ¦ مشخص شده است)، به اندازهٔ J انرژی لازم است.

حال سوال می‌کنیم که برای آنکه بجای ۱ اسپین، ۲ اسپین کنار هم را برگردانیم چه مقدار انرژی لازم است. نگاهی به شکل زیر نشان می‌دهد که هیچ مقدار بیشتری انرژی لازم نیست!



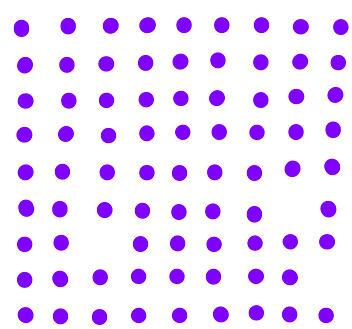
بنابراین اگر به همین ترتیب اسپین‌ها را یک به یک برگردانیم تنها همان انرژی اولیه $2J$ را لازم خواهیم داشت تا تمام زنجیره را

توانیم بگردانیم. یعنی این دو حالت $\langle s_i s_j \rangle = 1$ و $\langle s_i s_j \rangle = -1$ تنها با یک سد انرژی ماکروسکوپی به اندازه $2J$ از همدیگر جدا شده‌اند: (شکل زیر).



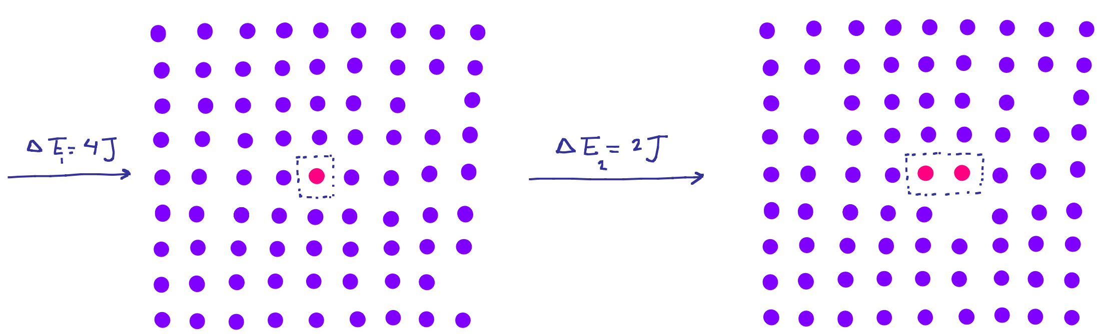
افت و خیزهای حرارتی براحتی قادر است به یک تک اسپین که در یک سر زنجیره است انرژی را فراهم کند و در نتیجه سیستم براحتی از یک می‌بینیم تک اسپین را بچرخانیم که دیواره را و در نتیجه آزادانه ایستایی وجود خواهد داشت و متوسط $\langle s_i s_j \rangle$ برابر با صفر خواهد شد. حال همین استدلال را در دو بعد بکار ببریم تا ببینیم چرا در ۲ بعد و بالاتر امکان گذار فاز و شکست تقارن وجود دارد. تصویر حالت زیر را در نظر بگیرید.

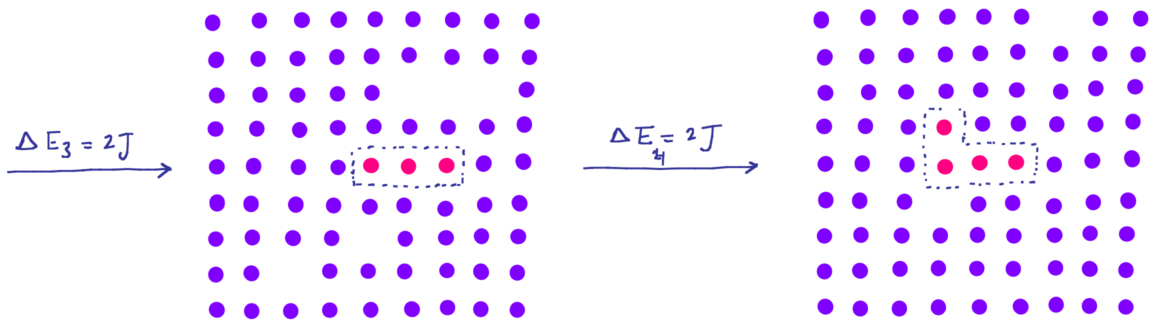
$$H = -J \sum_{ij}{}' (s_i \cdot s_j - 1).$$



$E = 0.$

حال اگر بخواهیم یک اسپین را برگردانیم احتیاج به $4J$ انرژی داریم و برگرداندن اسپین‌های بیشتر باز هم به انرژی بیشتری نیاز دارد:





شکل‌های بالا نشان می‌دهند که برای برگرداندن اسپین‌ها از سدهای انرژی‌ای باید عبور کرد که به ازای افزایش تعداد 2J به شکلی که متناسب با سایز سیستم است به دست آمده است یعنی سد انرژی‌ای که دو کمینه متفاوت آن‌ها را از هم جدا می‌کند ارتفاعی از مرتبهٔ $O(NJ)$ دارد که در آن N تعداد اسپین‌ها است.

بنابراین برای این که افت و خیزهای گرمایی بتوانند تمام اسپین‌ها را برگردانند احتیاج به مقداری ماکروسکوپی انرژی داریم، این کار با احتمال بسیار کم و تنها بعد از گذشتن زمانی که ممکن است حتی از عمر جهان نیز گذشته باشد اتفاق خواهد افتاد. بنابراین عملاً سیستم در یکی از کمینه‌ها در خط گیر خواهد کرد و گذار فاز رخ خواهد داد.