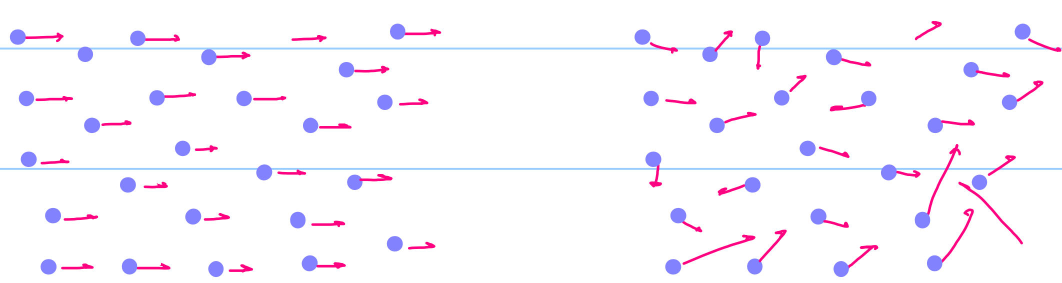
Statistical Physics-13

درس سیزدهم - سیستم‌های بوزونی ایده‌آل.

Note Title 5/31/2009

در درس مربوط به مکانیک آماری کوانتومی، روابط اساسی مربوط به سیستم‌های فرمیونی و بوزونی بدون برهم‌کنش را استخراج کردیم. در درس گذشته با استفاده از آن روابط گاز فرمیونی ایده‌آل را بررسی کردیم. در این درس گاز بوزونی ایده‌آل را مطالعه می‌کنیم. برای بوزون‌ها نیز خواهیم دید که خاصیت کوانتومی آن‌ها منجر به پدیده‌های عمیق و شگفت‌انگیز ماکروسکوپی خواهد شد. مهم‌ترین این پدیده‌ها، چگالش بوز-اینشتین Bose-Einstein Condensation است که طی آن کسر قابل توجهی از کل ذرات، یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات، در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می‌شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی‌های بسیار زیاد آنهم فقط برای بوزون‌ها رخ می‌دهد و منشاء پدیده‌هایی مثل ابرشارگی یا ابررسانایی است. از نظر کیفی به صورت بسیار ابتدایی می‌توان این پدیده را بدین شکل توضیح داد که قبل از چگالش پخش شدن ذرات در ترازهای مختلف به حرکت‌هایی که ذرات در جهات مختلف دارند باعث برخوردها و پراکندگی ذرات از یکدیگر باعث بروز مقاومت، ویسکوزیته یا گرانروی در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می‌شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک حالت پایه با انرژی و تکانه معینی باعث رفتار جمعی یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن ویسکوزیته در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابررساناها می‌شود.



بعد از چگالش — قبل از چگالش

باید دقت کرد که در یک ابررسانا، الکترون‌ها ۲ به ۲ تشکیل جفت‌هایی می‌دهند. به جفت‌ها کوپر یا Cooper pair می‌گویند. این

جفت‌های کوپر جمع شده به نوعی چگالیده شده و باعث ابررسانایی می‌شوند.

می‌توان گفت در هر دو حالت ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد از چگالش مثل یک مایع است.

این تفاوت در کیفیت این است که ذرات از نظر تراکم‌پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه، و نظایر آن دیده می‌شود.

بعد از این مقدمه می‌توانیم به بررسی دقیق ترمودینامیک آماری گاز بوزونی ایده‌آل بپردازیم. از درس‌های قبلی می‌توانیم روابط کلی را یادآوری کنیم: داریم:

$$\ln Q = -\sum_i \ln\left(1 - z e^{-\beta \epsilon_i}\right) \qquad ۱$$

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \qquad ۲$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} - 1} \qquad ۳$$

برای گاز ایده‌آل، ϵ_iها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک جعبه‌ی مکعبی که ابعاد آن را L می‌گیریم. هرگاه حجمی را که ذره

درون آن قرار دارد یک مکعب با ضلع L بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج در دیواره‌ها صفر باشد خواهیم داشت:

$$\epsilon_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(n_1^2 + n_2^2 + \cdots n_d^2\right). \qquad ۴$$

در درس قبلی دیدیم که چگونه با داشتن این انرژی می‌توان جمع در بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با استفاده از رابطه‌ی ۱۳ درس قبلی به دست می‌آوریم:

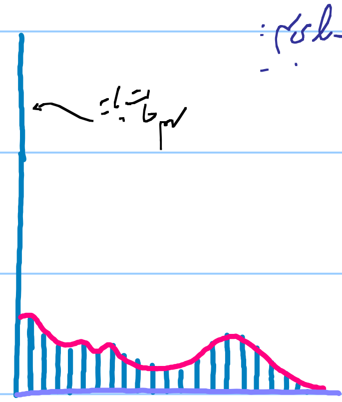
$$\ln Q = -\frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln\left(1 - z e^{-x}\right) dx. \qquad ۵$$

اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که به سادگی آن را تصحیح و رفع می‌کنیم. در عبارت ۱، سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1-z e^{-\beta\epsilon_0}) \qquad 6$$

است (از این حالت با عبارت ۱ برابر گرفته‌ایم). وقتی z به سمت $e^{\beta\epsilon_0}$ میل می‌کند، این جمله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ببینیم آیا این سهم در انتگرال ۵ در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت $x^{\frac{d}{2}-1}dx$ که در واقع نشان دهنده‌ی چگالی حالت‌ها در دماهای تر است نگاه کنیم متوجه می‌شویم که (برای $d \geq 2$) این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله $x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1-e^{-x})$ نیز به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی ۱ با انتگرال ۵ در این نقطه تفاوت فاحشی دارند. دلیل این امر هم روشن است. اگر به شکل زیر نگاه کنیم این تفاوت را می‌بینیم:



عبارت دقیق مجموع ارتفاع میله‌هاست یعنی عبارت (۱).

عبارت ۵، سطح زیر منحنی قرمز رنگ است و سهم حالت پایه را در نظر نگرفته است. دلیل این امر آن است که تبدیل جمع به انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالی جمع نسبت به هم تفاوت اندکی داشته باشند به طوری که بتوان آن‌ها را با یک تابع هموار تقریب زد. در اینجا سهم حالت پایه بسیار بیشتر با بقیه متفاوت است.

سوال مهمی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال ۵ نادیده گرفته شده است یا این

که شود سهم اولین، دومین، سومین و ... حالت برانگیخته نیز لازم است؟ برای پاسخ به این سوال لازم است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت پایه مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با ϵ_0 و انرژی حالت برانگیخته اول را با ϵ_1 نشان می‌دهیم. از رابطه ۴ روشن است که $\epsilon_1 - \epsilon_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. حال سهم این دو جمله در $\ln Q$ برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1}) \qquad ۷$$

از قبل در قسمت (ب) دیدیم که محدوده مجاز z برابر است با $[0, e^{\beta\epsilon_0}]$، یعنی $0 \le z \le e^{\beta\epsilon_0}$. بنابراین بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته یعنی جمله دوم می‌تواند اختیار کند برابر است با:

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) = \ln\left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\beta\right) \qquad ۸$$

حتی اگر مقدار دمای پایین به گونه‌ای باشد که 10^{-100} یا 10^{-200} شود باز لگاریتم آن عددی در حد 100 یا 200 است در حالی است که جمله اول در حد $z \to e^{\beta\epsilon_0}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین تصویری که در قسمت قبل کشیده‌ایم درست است و تنها سهم حالت پایه است که می‌بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می‌بایست روابط ۱ تا ۳ را برای بوزون‌ها بنویسیم. (برای سادگی و با قرارداد خود، انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته‌ایم).

بنابراین روابط ۱ تا ۳ به شکل زیر در می‌آیند:

$$\ln Q = -\ln(1 - z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x})\, dx \qquad ۹$$

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1}\,dx}{z^{-1}e^{x}-1} \qquad ۱۰$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}\,dx}{z^{-1}e^{x}-1} \qquad ۱۱$$

دقت کنید $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با N_0 نشان می‌دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1-z} \qquad ۱۲$$

این عبارت یعنی تعداد ذرات در حالت پایه با نزدیک شدن z به ۱ می‌تواند بدون هیچ حدودی بزرگ شود. البته این جمله سهمی ندارد یعنی در عبارت ۱۱ ندارد زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته‌ایم. حال ادامه رابطه ۹ ترجمه می‌کنیم. می‌توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم، در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$\int_0^\infty x^{d/2-1}\ln(1-ze^{-x})\,dx = \frac{1}{\frac{d}{2}}x^{\frac{d}{2}}\ln(1-ze^{-x})\Big|_0^\infty + \frac{1}{d/2}\int_0^\infty x^{d/2}\frac{1}{z^{-1}e^{x}-1}\,dx \qquad ۱۳$$

با توجه به این که عبارت اول برابر با صفر است، و با تعریف تابع

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{z^{-1}e^{x}-1} \qquad ۱۴$$

به دست می‌آوریم:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d}\, g_{\frac{d}{2}+1}(z). \\ N &= \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d}\, g_{d/2}(z) \\ \frac{U}{kT} &= \frac{d}{2}\,\frac{V}{\lambda^d}\, g_{\frac{d}{2}+1}(z). \end{aligned}}$$ ۱۵

توابع $g_n(z)$ نیز مثل توابع فرمیونی $f_n(z)$ دارای خاصیت زیر هستند:

$$z\, g_n'(z) = g_{n-1}(z)$$ ۱۶

اثبات این خاصیت مانند خاصیت توابع $f_n(z)$ است.

اگر به توابع $g_n(z)$ یعنی رابطه‌ی ۱۴ نگاه کنیم، می‌بینیم که با توجه به اینکه z یک [illegible] است، توابع $g_n(z)$ مثبت هستند. رابطه‌ی ۱۶ نشان می‌دهد که این توابع صعودی هستند.

همچنین از رابطه‌ی ۱۴ معلوم است که $g_n(0) = 0$.

• **تمرین**: نشان دهید که $g_n(1) = \zeta(n)$ که در آن $\zeta(n)$ تابع زتای ریمان است یعنی:

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$$ ۱۷

می‌دانیم که $\zeta(1) = \infty$ و $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$.

اگر به رابطه‌ی ۱۵ نگاه کنیم متوجه می‌شویم که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه و $\frac{V}{\lambda^d} g_{d/2}(z)$

تعداد ذرات موجود در تمامی حالات برانگیخته است. این دو را به ترتیب با N_0 و N_e نشان می‌دهیم،

یعنی: $N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{d/2}(z) \equiv N_0 + N_e$. ۱۸

با توجه به خواص اکیداً صعودی تابع $g_n(z)$ نتیجه معلوم می‌شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این

ظرفیت برابر است با: ۱۹

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d}\zeta\left(\frac{d}{2}\right).$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. حال اگر تعداد کل ذرات موجود در سیستم بیش از این مقدار باشد، تعداد ذرات مربوطه حتماً به حالت پایه می‌روند. در این حالت می‌گوییم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه یا بس‌گری شروع به چگالش کرده‌اند.

بنابراین شرط چگالش این است که:

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d}\zeta\left(\frac{d}{2}\right). \qquad ۲۰$$

و یا

$$\boxed{n\lambda^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right)} \qquad ۲۱$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که آن را می‌توان به صورت بازتر و با توجه به اینکه $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ است،

به صورت زیر نوشت:

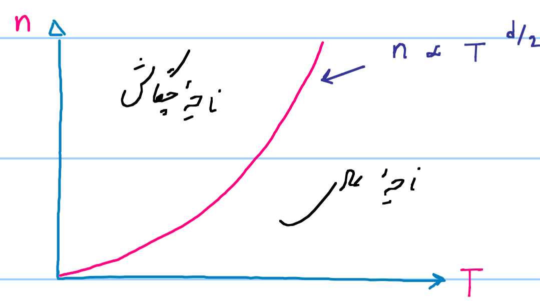
$$n\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right) . \qquad ۲۲$$

از این رابطه چند نکته مهم می‌گیریم:

۱- برای یک گاز دوبعدی بوزونی ($d=2$)، چگالش رخ نمی‌دهد، زیرا شرط چگالش $\zeta(1) = \infty$ هرگز محقق نمی‌شود (مگر در دمای صفر مطلق).

۲- ناحیه‌ای که در آن چگالش رخ می‌دهد به شکل زیر نشان داده شده است:

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}\right)^{d} \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right) . \qquad ۲۳$$



بنابراین به ازای هر چگالی محدود و ثابت، در دماها از یک حد بحرانی کمتر، چگالش اتفاق می‌افتد و به ازای هر دمای محدود هرگاه چگالی از یک مقدار بحرانی بیشتر شود، چگالش آغاز خواهد شد. این دما و چگالی بحرانی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

یا

$$n_c = \zeta\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2\pi m k T}}{h}\right)^{d} . \qquad ۲۴$$

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k}\left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{d}} \qquad ۲۵$$

۳- رابطهٔ ۲۲ نشان می‌دهد که هر چه جرم ذره کم‌تر باشد چگالش زودتر اتفاق می‌افتد. هم‌چنین حضور h در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیدهٔ کوانتومی است.

• خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده‌آل.

حال آنکه ترمودینامیک گاز بوزونی را مطالعه کنیم می‌بایست دو رژیم متفاوت را از هم تمیز دهیم. یکی وقتی که هنوز چگالش رخ نداده است و دیگری وقتی که چگالش رخ داده است.

• الف - قبل از چگالش

در این رژیم z هنوز برابر ۱ نشده است، بنابراین عبارات $\frac{z}{1-z}$ و $\ln(1-z)$ ها را می‌توان در تقریب، ناچیز دانست، در نتیجه روابط ۱۵ به شکل زیر است:

$$n\lambda^d = g_{d/2}(z) \quad , \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\, g_{\frac{d}{2}+1}(z) \quad , \quad U = \frac{d}{2} PV \tag{26}$$

از آنجا که همواره $1 > z > 0$ است، می‌توان $g_n(z)$ ها را بر حسب توان‌های z بسط داد،

• تمرین: نشان دهید که تابع $g_n(z)$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد.

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n} \tag{27}$$

در این صورت می‌رسیم:

$$n\lambda^d = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{d/2}} \tag{28}$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}+1}} \qquad ۲۹$$

سری ۲۸ را می‌توان وارون کرد به این معنی که z را بر حسب سری توانی $n\lambda^d$ بنویسیم:

$$z = \sum_{l=1}^{\infty} a_l (n\lambda^d)^l \qquad ۳۰$$

جایگذاری این سری در رابطهٔ ۲۹، به دست می‌دهد:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (n\lambda^d)^l . \qquad ۳۱$$

یا

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V}\lambda^d\right)^l$$

$$= N \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V}\lambda^d\right)^{l-1} \qquad ۳۲$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N \left\{ 1 + b_2 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \cdots \right\} \qquad ۳۳$$

که رابطهٔ آخر بسط ویریال را برای معادلهٔ حالت به دست می‌دهد. با این کار، می‌توان رتبه به رتبه، ضرایب a_l را بر حسب b_l ها به دست آورد. دقت کنید که اگر $\frac{\lambda^d}{v}$ کوچک باشد به معنای این است که طول موج گرمایی نسبت به فاصلهٔ میانگین بین ذرات کوچک است و آثار کوانتومی اهمیت کمی دارند. به همین دلیل در بسط ویریال بالا، طرف راست بر حسب سری توانی این پارامتر یعنی $\frac{\lambda^d}{v}$ نوشته شده است. در حدی که پارامتر $\frac{\lambda^d}{v}$، کاملاً قابل صرف‌نظر کردن باشد، معادلهٔ حالت به معادلهٔ حالت گاز معمولی

یعنی گاز به ماکسول بولتزمن تبدیل می‌شه.

از رابطه بالا معادله انرژی را به دست می‌آوریم

$$U = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}NkT\left(1 + b_2\left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3\left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \cdots\right) \qquad ۳۲'$$

ظرفیت گرمایی ویژه را نیز می‌توان از رابطه $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ به دست آورد.

• مثال: فرض کنید ضریب b_2 را برای گاز سه‌بعدی یعنی برای $d=3$ به دست بیاورید. از رابطه ۲۸ داریم:

$$y \equiv n\lambda^3 = z + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} + \cdots \qquad ۳۳$$

بنابراین خواهیم داشت: $z = y + ay^2 + \cdots$.

این را به جای z در طرف راست رابطه قبل قرار می‌دیم:

$$y = \left(y + ay^2 + \cdots\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(y^2 + \cdots\right) \qquad ۳۴$$

که از آن نتیجه می‌گیریم: $a = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. بنابراین:

$$z = y - \frac{1}{2\sqrt{2}}y^2 + \cdots \qquad ۳۵$$

حال این معادله را در رابطه ۲۹ قرار می‌دیم: و به دست می‌آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3}\left\{ z + \frac{z^2}{2^{5/2}} + \cdots \right\} = \frac{V}{\lambda^3}\left\{ y - \frac{1}{2\sqrt{2}}y^2 + \frac{1}{2\sqrt{5}}y^2 + \cdots \right\}$$

و یا

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3}\left\{ y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) y^2 + \cdots \right\} \qquad ۳۶$$

و یا با توجه به این که $y = \frac{\lambda^3}{v} \leftarrow$

$$\frac{PV}{kT} = N\left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{\lambda^3}{v} + \cdots \right\} \qquad ۳۷$$

دیده می‌شود که فشار کمتر از یک گاز ایده‌آل معمولی است. این کاهش فشار ناشی از تمایل بوزون‌ها برای جذب یکدیگر است.

۲- بعد از چگالش

چگالش وقتی رخ می‌دهد که حالت‌های برانگیخته به اندازه ظرفیت‌شان از ذره پر شوند. می‌دانیم که این ظرفیت ماکزیمم برابر است با

$$N_c = \frac{V}{\lambda^d}\,\zeta\!\left(\frac{d}{2}\right). \qquad ۳۸$$

در نتیجه بقیه ذرات حتماً به حالت پایه می‌روند. اگر تعداد کل ذرات را N بگیریم و تعداد ذراتی که به حالت پایه می‌روند را N_0 بگیریم آنگاه:

$$N_0 = N - N_c = N - \frac{V}{\lambda^d}\,\zeta\!\left(\frac{d}{2}\right).$$

از آنجا که $N_0 = \frac{z}{1-z}$، می‌توانیم مقدار z را از این جا حساب کنیم: بنابراین

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1} \qquad ۳۹$$

که در آن N_0 از مرتبه‌ی ... دارد. می‌شود. باید دقت کرد که در جاهایی که حالت‌ها نیست و با هست است. اساساً نمی‌شود

می‌توان z را مساوی ۱ گرفت. حال می‌توانیم مقدار z بدست آمده در رابطهٔ بالا را به رابطه ۱۵ قرار دهیم تا معادلات حالت بعد از چگالش معین شوند. داریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d}\, g_{\frac{d}{2}+1}(z). \qquad ٤٠$$

بنابراین با کمک رابطهٔ ۳۹ در این رابطه بدست می‌آید:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln\left(\frac{1}{N_0+1}\right) + \frac{V}{\lambda^d}\, g_{\frac{d}{2}+1}\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right) \qquad ٤١$$

که در آن $N_0 = N - \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2})$. دقت داشته باشید که N_0 تعدادی از مرتبهٔ ۱ دارد، می‌توان در محاسبات بالا تقریبی بعمل آورد. اما تنها کمی بعد از چگالش، بلافاصله N_0 از مرتبهٔ 10^2 یعنی 10^{1} می‌شود، می‌توان با تقریب خیلی خوب $\frac{N_0}{N_0+1}$ را برابر ۱ گرفت. در نتیجه رابطهٔ ۴۱ به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{PV}{kT} = \ln N_0 + \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2}+1) \qquad ۴۲$$

از آنجا که $\ln N_0$ نسبت به جملهٔ دوم بسیار کوچک است می‌توان از آن صرف نظر کرد. در نتیجه خواهیم داشت،

$$\boxed{P = kT\,\frac{1}{\lambda^d}\,\zeta(\frac{d}{2}+1)} \qquad ۴۳$$

و یا

$$\boxed{P = c\,T^{1+\frac{d}{2}}} \qquad ۴۴$$

که در آن c یک ثابت است.

این رابطه نشان می‌دهد که بعد از چگالش فشار مستقل از حجم شده است و در نتیجه تراکم‌پذیری گاز برابر با صفر شده است.

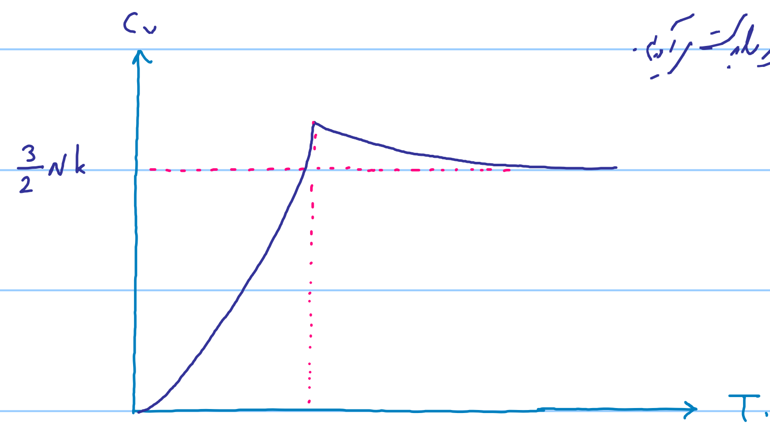
درست مثل این که گاز تبدیل به مایع شده باشد. همچنین از رابطهٔ $U = \frac{3}{2} PV$ بدست می‌آوریم:

$$U = \frac{3}{2} c V T^{1+\frac{d}{2}}. \qquad (45)$$

از این رابطه ظرفیت گرمایی ویژه به شکل زیر بدست می‌آید:

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \frac{3}{2}\left(1+\frac{d}{2}\right) c V T^{d/2} \qquad (46)$$

هرگاه این رابطه را با رابطهٔ ۳۲ که از آن مقدار ظرفیت گرمایی ویژه برای قبل از چگالش بدست آمد، ترکیب کنیم و ظرفیت گرمایی ویژه را برحسب دما رسم کنیم منحنی زیر بدست می‌آید.



بقیهٔ خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده‌آل را می‌توان به همین ترتیب به دست آورد.

در اینجا بررسی مقدماتی خواص گازهای کوانتومی به پایان می‌رسد و به همراه آن بررسی نسبتاً کامل ما از درس ترمودینامیک و مکانیک آماری نیز به پایان می‌رسد. در دورهٔ بعدی تدریس این درس (نیمسال دوم ۸۹-۸۸) امیدوارم که درس را کامل‌تر ارائه کنم.