Statistical Physics-12

درس دوازدهم - سیستم های فرمیونی ایده آل

Note Title 5/29/2009

در درس گذشته ابزارهای لازم را برای بررسی یک سیستم بوزونی همراه با شرح آن را فراهم آورده ایم. اکنون در این درس یک گاز ایده آل فرمیونی را در ابعاد d و جرم m تشکیل شده است بررسی می کنیم. فعلاً درجات آزادی اسپینی آن را در نظر نمی گیریم. فرض می کنیم N فرمیون که در درون ظرفی مکعبی با ابعاد L قرار گرفته اند. هم چنین شرایط مرزی را شرط مرزی ثابت فرض می کنیم. این ظرف مکعبی L به عبارت است

تحت این شرایط سطوح انرژی یک ذره را تعیین می کنیم. شرایط مرزی ثابت به ما می آموزد انرژی یک ذره در چنین جعبه ای برابر است با:

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\left(l_1^2+l_2^2+\dots l_d^2\right) \qquad ۱$$

که در آن l_1 تا l_d اعداد صحیح مثبت غیر صفر هستند. از روابط ۶۳، ۶۴، ۶۵ درس یازدهم می دانیم:

$$N = \sum_{l_1,\dots,l_d} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_l}+1}, \qquad ۲$$

$$U = \sum_{l_1,\dots,l_d} \frac{\epsilon_l}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_l}+1}, \qquad ۳$$

و

$$\frac{PV}{kT} = \sum_{l_1,\dots,l_d} \ln\left(1+z e^{-\beta\epsilon_l}\right). \qquad ٤$$

- یک تقریب ریاضی: تبدیل جمع در حالت ها به انتگرال

با همان استدلالی که در درس قبل که منجر به رابطه ۳۱ شد، می توانیم این جمع ها را به انتگرال تبدیل کنیم. با تغییر متغیر

$$k_i = \frac{\pi}{L} l_i \qquad ۵$$

می نویسیم:

$$\sum_{l_1\dots l_d} = \frac{1}{2^d}\int d^dk \left(\frac{\Delta n}{\Delta k}\right)$$ ۶

که در آن $\frac{\Delta n}{\Delta k} = \frac{V}{\pi^d}$.

بنابراین

$$\sum_{l_1\dots l_d} = \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^dk$$ ۷

در جاهایی که تابعی که بر روی آن جمع می‌زنیم تابعی باشد که فقط به اندازهٔ k بستگی داشته باشد و نه به جهت آن، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\sum_{l_1\dots l_d} = \frac{V S_{d-1}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty k^{d-1}dk}$$ ۸

که در آن S_{d-1} سطح کرهٔ $d-1$ بعدی با شعاع ۱ است. رابطهٔ ۸ یک رابطهٔ اساسی است که به اشکال مختلف در محاسبات مکانیک آماری و نظریهٔ کوانتومی ظاهر می‌شود و بهتر است که استخراج آن را خوب فرا گرفت.

در مواقعی که با آن سر و کار داریم، تابع زیر انتگرال تابعی است از $\beta\epsilon = \beta\frac{\hbar^2}{2m}k^2$. یعنی با انتگرال‌هایی از نوع زیر سر و کار داریم:

$$\sum_{l_1\dots l_d} F(\beta\epsilon_l) = \frac{V S_{d-1}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty k^{d-1}dk\, F(\beta\epsilon_k)$$ ۹

بنابراین بهتر است که متغیر انتگرال را $\beta\epsilon =: x$ بگیریم. از این کار می‌توان نوشت:

$$x = \beta\epsilon = \beta\frac{\hbar^2}{2m}k^2$$ ۱۰

و از آنجا

$$k = \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{1/2} x^{1/2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda}x^{1/2}$$ ۱۱

که در آن $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ طول موج گرمایی است. بنابراین

$$\frac{V S_{d-1}}{(2\pi)^d} k^{d-1} dk = \frac{V S_{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{2^d \pi^{d/2}}{\lambda^d} \frac{1}{2} x^{\frac{d}{2}-1} dx = \frac{V}{\lambda^d} \left(\frac{S_{d-1}}{2\pi^{d/2}}\right) x^{\frac{d}{2}-1} dx \qquad ۱۲$$

از آنالیز هم می‌دانیم که $S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$. بنابراین به رابطه‌ی ۱۳ می‌رسیم:

$$\boxed{\sum_{l_1 \dots l_d} F(\beta \epsilon_l) = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} dx \, F(x).} \qquad ۱۳$$

رابطه‌ی فوق بسیار مهمی است. این رابطه یک رابطه‌ی کلی است که بیان می‌کند جمع روی همه‌ی حالت‌ها را می‌توان با یک انتگرال تبدیل کنیم.
حال از این رابطه برای استفاده می‌کنیم و در عبارت‌هایی که در رابطه‌ی ۲، ۳، ۴ و بصورت انتگرال بازنویسی می‌کنیم. بدست می‌آوریم:

$$N = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{1 + z^{-1} e^x} \qquad ۱۴$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{1 + z^{-1} e^x} \qquad ۱۵$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 + z e^{-x}) dx \qquad ۱۶$$

نخست به رابطه‌ی ۱۶ دقت کنید. می‌توان با انجام یک انتگرال جزء به جزء طرف راست را به شکل دیگری نوشت:

$$\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}dx\,\ln(1+ze^{-x}) = \frac{1}{\frac{d}{2}}\, x^{\frac{d}{2}}\ln(1+ze^{-x})\Big|_0^\infty + \frac{1}{d/2}\int_0^\infty \frac{x^{d/2}}{1+z^{-1}e^{x}}\,dx \qquad ۱۷$$

عبارت اول در هر دو حد $x\to\infty$, $x=0$ برابر با صفر خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\,\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\int_0^\infty \frac{x^{d/2}}{1+z^{-1}e^{x}}\,dx \qquad ۱۸$$

در نتیجه با مقایسه‌ی این رابطه با رابطه‌ی ۱۵ به رابطه‌ی کلی زیر می‌رسیم که برای سیستم فرمیونی درست است:

$$\boxed{PV = \frac{2}{d}\,U} \qquad ۱۹$$

بنابراین اگر تابع فرمیونی $f_n(z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1+z^{-1}e^{x}} \qquad ۲۰$$

آنگاه، روابط اصلی به شکل زیر خواهند بود:

$$\boxed{N = \frac{V}{\lambda^d} f_{d/2}(z)\,, \qquad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z)\,, \qquad U = \frac{d}{2}PV.} \qquad ۲۱$$

توابع $f_n(z)$ خصوصیت جالب دارند. برای بدست آوردن آن دقت کنید که

$$z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z^{-1}e^{x}}\right)=\frac{1}{(1+z^{-1}e^{x})^{2}}\,z^{-1}e^{x}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+z^{-1}e^{x}}\right)$$ ۲۲

با استفاده از این رابطه و انجام یک انتگرال جزء به جزء در رابطه ۲۰ می‌رسیم به:

$$\boxed{z\frac{d}{dz}f_n(z)=f_{n-1}(z)}$$ ۲۳

برای محاسبه ظرفیت گرمایی ویژه، بعضی از خصوصیات دیگر احتیاج داریم. نخست $\left(\frac{dz}{dT}\right)_{N,V}$ را حساب کنیم. برای این کار از طرفین اولین رابطه بالا نسبت به T مشتق گرفته و با استفاده از این که

$$\frac{d\lambda}{dT}=\frac{-1}{2}\frac{\lambda}{T}$$ ۲٤

بدست می‌آوریم:

$$0=-dV\lambda^{-d-1}\frac{d\lambda}{dT}f_{d/2}(z)+V\lambda^{-d}\left(\frac{d}{dz}f_{d/2}(z)\right)\frac{dz}{dT}$$ ۲۵

و یا

$$0=+d\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{T}\right)f_{d/2}(z)+\frac{1}{z}f_{\frac{d}{2}-1}(z)\frac{dz}{dT}$$ ۲۶

$$\boxed{\left(\frac{dz}{dT}\right)_{N,V}=-\frac{z\lambda d}{2T}\frac{f_{d/2}}{f_{d/2-1}}.}$$ ۲۷ در اینجا

بعد از این مقدمات آماده‌ایم که گاز فرمی را در دماهای مختلف مطالعه کنیم. نخست به بررسی دمای صفر می‌رویم.

• گاز فرمی در دمای صفر.

اگر z را به شکل $z=e^{\beta\mu}$ تعبیر و مقدار μ را در دمای صفر با ϵ_F نشان دهیم آنگاه. به سادگی می‌بینیم که

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{1+z^{-1}e^{x}}=\begin{cases}1 & x<\beta\epsilon_F\\ 0 & x>\beta\epsilon_F.\end{cases} \qquad ۲۸$$

بنابراین ←

$$f_n(z)\equiv f_n(\epsilon_F)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\beta\epsilon_F}x^{n-1}dx=\frac{1}{\Gamma(n+1)}(\beta\epsilon_F)^n \qquad ۲۹$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ ۲۱ می‌فهمیم:

$$N=\frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(\beta\epsilon_F)^{d/2} \qquad ۳۰$$

و با توجه به اینکه

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}=\frac{h}{\sqrt{2\pi m}}\beta^{1/2} \qquad ۳۱$$

به عبارت دیگر:

$$N=\frac{V(2\pi m)^{d/2}}{h^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\epsilon_F^{d/2} \qquad ۳۲$$

$$\frac{PV}{kT}=\frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+3)}(\beta\epsilon_F)^{\frac{d}{2}+1} \qquad ۳۳$$

$$\boxed{PV = \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+3)} V \frac{(2\pi m)^{d/2}}{h^d} \epsilon_F^{\frac{d}{2}+1}}$$ و پس از ساده کردن ۳۴

نخست از ترکیب روابط ۳۲ و ۳۵ بدست می‌آید:

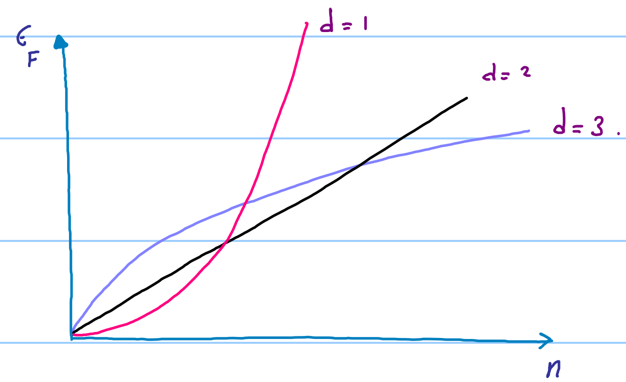
$$PV = \frac{2}{d+2} N \epsilon_F$$ ۳۵

$$U = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F .$$ ۳۶

مسئله ϵ_F باقی است، با توجه به رابطه ۳۲ بدست آورید. ϵ_F تابعی است از چگالی ذرات.

$$\boxed{\epsilon_F = \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right) \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\right]^{2/d} n^{2/d}}$$ ۳۷

بنابراین با افزایش چگالی انرژی فرمی نیز افزایش می‌یابد، اما چگونگی افزایش آن بستگی به بعد دارد. شکل زیر نحوه این افزایش را نشان می‌دهد.



از رابطه ۳۵ می‌توان فشار را به شکل زیر نوشت:

$$P = \alpha n^{\frac{2}{d}+1}$$ ۳۸

که در آن α یک ضریب ثابت است. این رابطه می‌گوید که برخلاف گاز ایده‌آل کلاسیک که فشار متناسب با چگالی

است. برای گاز فرمی در دمای صفر، فشار متناسب با توان $\frac{2}{d}+1$ است. این فشار بیشتر ناشی از دافعه ای است که فرمیون ها برای هم دارند. جالب است که هرچه بعد بیشتر باشد این افزایش فشار بیشتر است. این موضوع نیز از نظر فیزیکی قابل فهم است.

• گاز فرمی در دماهای خیلی زیاد $(T \gg T_F)$.

در این حد، پتانسیل شیمیایی z کوچک است. این را از رابطه $n\lambda^d = f_{d/2}(z)$ و این که $f_{d/2}(z) = z + \cdots$ نیز می‌توان فهمید. وقتی که $T \gg T_F$ است، یعنی $n\lambda^d \ll 1$ است، به معنی این است که طول موج دوبروی ذرات نسبت به فاصله متوسط آنها خیلی کم است، یعنی گاز رفتار شبه کلاسیک دارد. در این حد می‌توان تابع $f_n(z)$ را بر حسب توانی از z بسط داد و با حذف z در رابطه ۲۱، بسط معادله حالت و هم چنین انرژی را بر حسب توانی از $n\lambda^d$ به دست آورد.

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1+z^{-1}e^{x}} \qquad ۳۹$$

برای آنکه بسط توانی این تابع را برای z های کوچک به دست آوریم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: کسر داخل انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم. داریم:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}\,dx\; z e^{-x}\,\frac{1}{1+z e^{-x}} \qquad ۴۰$$

حال ze^{-x} کوچکتر از ۱ است، می‌توانیم از بسط دوجمله‌ای استفاده کنیم. ←

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty x^{n-1}\,dx\; z e^{-x}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l z^l e^{-lx} \qquad ۴۱$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} (-1)^l z^{l+1} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x(l+1)} dx$$

ا) انتگرال بالا برابر است با $\Gamma(n)$ $\frac{1}{(l+1)^n}$. بنابراین ←

$$\boxed{f_n(z) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{l+1}}{(l+1)^n}} \qquad ۴۲$$

چند جمله اول این بسط بصورت زیر است:

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \cdots \qquad ۴۳$$

بنابراین می‌توانیم در رابطه ۲۱ ، از این بسط استفاده کنیم. یعنی بنویسیم:

$$n\lambda^d = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^{d/2}} \quad , \quad \frac{PV}{kT} = \left(\frac{V}{\lambda^d}\right) \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}+1}} \qquad ۴۴$$

با محاسبه سری‌ها است، بسته به تیک برتری سری اول l را وارون کرد، و z را برحسب توان‌های $(n\lambda^d)$ نوشت. تا مرتبه kام

این بسط بصورت زیر خواهد بود:

$$z = n\lambda^d + \sum_{l=2}^{K} a_l (n\lambda^d)^l + \cdots \qquad ۴۵$$

یعنی ضریب جمله اول حتماً یک خواهد بود و علامت ... بخش توان‌ها در بالا آمده است.

با قرار دادن این بسط در $f_{\frac{d}{2}+1}(z)$ بدست می‌آید:

$$f_{\frac{d}{2}+1}(z) = (n\lambda^d) + \sum_{l=2}^{K} b_l\,(n\lambda^d)^l + \cdots \qquad ۴۶$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\left(n\lambda^d + \sum_{l=2}^{K} b_l\,(n\lambda^d)^l + \cdots \right) \qquad ۴۷$$

و

$$\boxed{\frac{PV}{kT} = N\left(1 + \sum_{l=2}^{K} b_l \left(\frac{N}{V}\lambda^d\right)^{l-1} + \cdots \right)} \qquad ۴۸$$

این رابطه تصحیحات اعمال شده به معادله حالت گاز ایده‌آل را برحسب توان‌های متوالی $n\lambda^d$ به دست می‌دهد. هر چه قدر که $n\lambda^d$ کوچک‌تر باشد می‌توان توان‌های کمتری را نگاه داشت و گاز رفتار نزدیک‌تری به یک گاز کلاسیک خواهد داشت. اما با نزدیک‌تر شدن $n\lambda^d$ به یک جملات بیشتری را نگاه داشت. که در این صورت رفتار گاز از حالت گاز کلاسیک دورتر و دورتر می‌شود.

مثال: می‌خواهیم بسط ویریال معادله حالت یعنی رابطهٔ ۴۸ را تا مرتبهٔ 1 از $n\lambda^d$ به دست بیاوریم.

داریم.

$$y \equiv n\lambda^d = z - \frac{z^2}{2^{d/2}} + \cdots$$

قرار می‌دهیم

$$z = y + a\,y^2 + \cdots$$

با جایگذاری رابطهٔ دوم در رابطهٔ اول ←

$$y = (y + ay^2 + \cdots) - \frac{1}{2^{d/2}}(y + \cdots)^2$$

با مقایسهٔ طرفین ← $a = \frac{1}{2^{d/2}}$ ، نتیجه می‌گیریم

$$z = y + \frac{1}{2^{d/2}}\,y^2 + \cdots$$

در نتیجه ←

$$f_{\frac{d}{2}+1}(z) \cong z - \frac{z^2}{2^{\frac{d}{2}+1}} + \cdots$$

$$= y + \frac{1}{2^{d/2}} y^2 + \cdots - \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1}} y^2 + \cdots = y + \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1}} y^2 + \cdots$$

که در آن عبارات ... از مرتبهٔ y^3 به بالا هستند. بنابراین ⟵ $b_2 = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1}}$ و در نتیجه

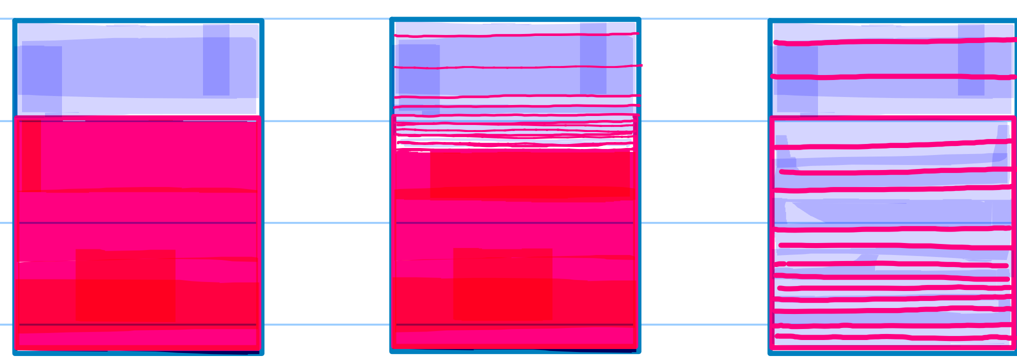
$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{d}{2}+1}}(n\lambda^d) + \cdots\right)$$

ه.

دیده می‌شود که فشار گاز از حالت کلاسیکی کمی بیشتر است و این به خاطر دافعهٔ فرمیون‌هاست.

• گاز فرمی در دمای کم $(T \ll T_F)$.

وقتی که T صفر است، گاز فرمی کاملاً واگن خوانده می‌شود. در این دما $n\lambda^3$ بیشترین مقدار خود را دارد و در واقع ∞ است. تمام ترازهای انرژی زیر سطح فرمی کاملاً پر، و تمام ترازهای بالای سطح فرمی کاملاً خالی هستند. با افزایش دما طول موج دوبروی ذرات و در نتیجه $n\lambda^3$ کم می‌شود، و مقدار بسیار بزرگ ولی محدودی را اختیار می‌کند و تابع توزیع ذرات نیز هموار می‌شود: (شکل زیر). خطوط قرمز به معنای لایه‌های دارای ذره و خطوط خاکستری به معنای لایه‌های خالی هستند.



گاز تقریباً کلاسیک — $z \ll 1,\ T \gg T_F,\ n\lambda^d \ll 1.$

گاز کمی واگن — $z \gg 1,\ T \ll T_F,\ n\lambda^d \gg 1$

گاز فرمی کاملاً واگن — $z = \infty,\ T = 0,\ n\lambda^d = \infty$

در این حد که z بسیار بزرگ است کافی است از بسط توانی توابع $f_n(z)$ بر حسب توانی z استفاده کنیم.

در ضمیمه این درس نحوه به دست آوردن این بسط شرح داده شده است.

چند جمله اول تابع $f_n(\zeta)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{f_n(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \left[1 + n(n-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\zeta^2} + \cdots\right].}$$ ۵۱

که در آن $\zeta = \ln z$. با استفاده از این بسط‌ها می‌توانیم خواص ترمودینامیکی گاز فرمی را در دماهای پایین مطالعه کنیم. مثلاً

اگر توابع f_n را تا جمله دوم بسط دهیم داریم:

$$n\lambda^d = \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \zeta^{\frac{d}{2}} \left[1 + \frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}-1\right)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\zeta^2} + \cdots\right]$$ ۵۲

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+2)} \zeta^{\frac{d}{2}+1} \left[1 + \left(\frac{d}{2}+1\right)\frac{d}{2}\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\zeta^2} + \cdots\right].$$ ۵۳

$$U = \frac{d}{2} PV$$ ۵۴

با به دست آوردن معادله حالت و انرژی و دیگر توابع ترمودینامیکی بر حسب $\zeta = \ln z$ باید ζ را بین این روابط حذف کنیم. این کار را می‌توان مرتبه به مرتبه انجام داد. در این جا تفصیل این محاسبات را نمی‌آوریم. فقط اشاره می‌کنیم که نخستین تقریب‌ها برای این روابط به شکل زیر به دست آمده: (در سه بعد $d=3$)،

$$\mu = \epsilon_F\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right)$$

$$\frac{PV}{kT} = g\frac{V}{\lambda^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\zeta_0^{5/2}\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right)$$

که در آن $\zeta_0 = \ln \epsilon_F$. توجه: روابط ۵۱ به بعد کاملاً اختیاری هستند و دانشجویان می‌توانند از مطالعه آنها صرف نظر کنند.

● ضمیمه: بسط مجانبی تابع $f_n(z)$ برای z های بزرگ

برای تابع $f_n(z)$ به شکل $f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1+z^{-1}e^x}$ تعریف شده است. حال بررسی می‌کنیم که حال که z بزرگ است، این تابع را برحسب توان‌های متوالی z^{-1} بسط دهیم. این کار صحیح نیست، زیرا درست است که z^{-1} کوچک است ولی در زیر انتگرال، و با افزایش x، بالاخره e^x آنقدر بزرگ می‌شود تا اینکه $z^{-1}e^x$ از ۱ بزرگتر می‌شود و بسط در جاهایی را از اعتبار می‌اندازد. پس راه درست این است که دامنه انتگرال را به دو قسمت تبدیل کنیم، یعنی قسمتی در $z^{-1}e^x<1$ و دیگری در ناحیه $z^{-1}e^x>1$ و برای هر کدام یک گونه متفاوت بسط اختیار کنیم. بهتر است پارامتر ξ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$z = e^{\xi} \quad \text{یا} \quad \xi = \ln z. \qquad \text{A-1}$$

همچنین فعلاً از ضریب $\frac{1}{\Gamma(n)}$ صرف‌نظر می‌کنیم و تابع $\tilde{f}_n(z)=\Gamma(n) f(z)$ را حساب می‌کنیم.

$$\tilde{f}_n(z) = \int_0^{\xi} \frac{x^{n-1}\,dx}{1+e^{x-\xi}} + \int_{\xi}^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{1+e^{x-\xi}} \qquad \text{A-2}$$

در هر دو انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم: در انتگرال اول $x-\xi=-u$ ، در انتگرال دوم $x-\xi=u$. ←

$$\tilde{f}_n(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{(\xi-u)^{n-1}}{1+e^{-u}}\,du + \int_0^{\infty} \frac{(\xi+u)^{n-1}}{1+e^{u}}\,du \qquad \text{A-۳}$$

$$= \int_0^{\xi} (\xi-u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^{l}\,du + \int_0^{\infty} e^{-u} (\xi+u)^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{-u})^{l}\,du$$

در انتگرال اول، جمع ها را تا بی‌نهایت $l=0$ و ... حذف کرد. در تمت ... حول حد برابر است

با ... جمله‌ها به ترتیب خیلی خوب ... جملات انتگرال ها است ... میل دارد. بنابراین پس از اینکه انتگرال جملات ... را جمع کردیم

عبارت ←

$$\tilde{f}_n(\xi) = \frac{1}{n} \xi^n + \int_0^\infty \left[(\xi-u)^{n-1} - (\xi+u)^{n-1} \right] \sum_{l=1}^{\infty} (-e^{-u})^l \, du \qquad \text{A-٤}$$

$$= \frac{1}{n} \xi^n + \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \xi^{n-1-k} u^k \left[(-1)^k - 1 \right] \right) \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l e^{-lu} \, du$$

$$= \frac{1}{n} \xi^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} \binom{n-1}{k} \xi^{n-1-k} (-1)^l \left[(-1)^k - 1 \right] \int_0^\infty u^k e^{-lu} \, du$$

مقدار انتگرال آخر برابر است: $\frac{k!}{l^{k+1}}$. بنابراین ←

$$= \frac{1}{n} \xi^n + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=\text{odd}}^{n-1} (-1)^{l-1} \frac{1}{l^{k+1}} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \xi^{n-1-k} \qquad \text{A-۵}$$

می‌توانیم طرف ها را به صورت فشرده تر بنویسیم. جمع روی l را انجام می‌دهیم. قرار می‌دهیم:

$$\eta(k) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{4^{k+1}} \cdots \qquad \text{A-۶}$$

با تعریف تابع $f_n(\xi) := \frac{\tilde{f}_n(\xi)}{\Gamma(n)}$ داریم:

$$\boxed{f_n(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \xi^n \left[1 + 2 \sum_{k=\text{odd}}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!} \frac{\eta(k)}{\xi^{k+1}} \right].} \qquad \text{A-۷}$$

می‌توان از این هم بیشتر رفت و تابع $\eta(k)$ را با تابع زتای ریمان ربط داد. برای این کار کافی است به طرفین رابطه

A-۷ ، عبارت $2\left[\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{6^{k+1}}+\cdots\right]:=A$ را اضافه کنیم، و به دست آوریم:

$$\eta(k)+A = 1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\cdots = \zeta(k+1) \qquad \text{A-۸}$$

که در آن $\zeta(k):=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^k}$ تابع زتای ریمان Riemann Zeta Function است.

اما نکته جالب این است که A را نیز می‌توان بر حسب این تابع نوشت، زیرا:

$$A = 2\,\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{k+1}} = \frac{1}{2^k}\,\zeta(k+1). \qquad \text{A-۹}$$

بنابراین:

$$\boxed{\eta(k) = (1-2^{-k})\,\zeta(k+1).} \qquad \text{A-۱۰}$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$\zeta(1)=\infty,\quad \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)=2.612,\quad \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}=1.645,\quad \zeta(3)=1.202,\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ldots$$

چند جملهٔ اول تابع $f_n(\varsigma)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{f_n(\varsigma) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\varsigma^n\left[1+n(n-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\xi^2}+n(n-1)(n-2)(n-3)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\xi^4}+\cdots\right]}$$