تمرین درس آنالیز پتانسیل

۱) برای هر یک از "تابع" های چندمقداری زیر رویه ریمانی مربوط را تا حدی که می‌توانید تشریح کنید (نقطه‌ها را مشخص کنید)

$(z^m)^{1/2}$ ، m عدد صحیح است ($m=1,2$ در کلاس انجام شد)

$(z^3-z^4)^{1/2}$ ، $(z^2-z^4)^{1/2}$ ، $((z^2-1)^2)^{1/2}$ ، $(1+z^{1/2})^{1/2}$

$(z-z^3)^{1/2}$ ، $(z^2-z^3)^{1/2}$

۲) طول خم‌های زیر را در هندسه هذلولوی حساب کنید:

الف) محیط دایره به شعاع هذلولوی R

ب) در U: طول قطعه‌ای از دایره $x^2+(y-1)^2=1$ برای $y\geq 1$.

پ) در U طول قطعه خم هم‌فاصله $y=mx$ ، $0<m<\infty$ ، بین $y=a$ و $y=b$ ، $0<a<b$ داده شده.

۳) مساحت‌های زیر را در هندسه هذلولوی حساب کنید (یادآوری: در U عنصر سطح هست $\frac{1}{y^2}dxdy$

و در D : $\frac{4}{(1-|z|^2)^2}dxdy$).

الف) مساحت دایره به شعاع هذلولوی R

ب) مساحت محصور بین دو دایره $x^2+(y-1)^2=1$ و دو دایره $y=1$ (برای $y\geq 1$).

پ) مساحت محصور بین دو دایره $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

ت) مساحت محصور بین دو خم هم‌فاصله $y=\pm mx$ و دو دایره $y=a$ و $y=b$ ، $0<a<b$.

۴) در D ژئودزیک $y=0$ را در نظر بگیرید. از هر نقطه $\pm a$ ، $0<a<1$ ، دو ژئودزیک می‌گذرند که برای $y=0$ مجانب هستند (در بینهایت با آن تماس می‌شوند). این دو ژئودزیک نسبت به محور yها متقارن‌اند. فرض کنید زاویه‌ای که هر یک از این دو ژئودزیک با محور yها می‌سازد $\frac{\pi}{4}$ است. در این صورت مقدار a را حساب کنید.

۵) در یک مثلث هذلولوی (یعنی سه ضلع و طول‌ها ژئودزیک هستند) رئوس (زوایای رئوس) را با A ، B ، C و طول (هذلولوی) ضلع‌های روبروی آنها را به ترتیب با a ، b ، c نمایش می‌دهیم. اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) (قانون کسینوس‌ها) $\cosh c=(\cosh a)(\cosh b)-(\sinh a)(\sinh b)\cos C$ (وقتی مثلث کوچک است به چه صورتی می‌شود؟)

ب) (دوگان قانون کسینوس‌ها) $\cos C=-(\cos A)(\cos B)+(\sin A)(\sin B)\cosh c$ (یعنی سه زاویه مثلث را مشخص می‌کند!)

پ) (قانون سینوس‌ها) $\frac{\sin A}{\sinh a}=\frac{\sin B}{\sinh b}=\frac{\sin C}{\sinh c}$

(۶) فرض کنید f یک نگاشت C^1 ، K-شبه‌همدیس باشد. ثابت کنید برای هر z در دامنهٔ f :

$$\|Df(z)\| \leq \sqrt{K(z)\cdot \det(Df(z))}$$

که در آن $\|\ \|$ نرم اپراتوری نگاشت خطی است.

(۷) U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $f: U \to \mathbb{C}$ یک نگاشت C^1

الف) نشان دهید $\overline{(f_z)} = (\bar{f})_{\bar{z}}$ و $\overline{(f_{\bar{z}})} = (\bar{f})_z$.

ب) فرض کنید $f(U)$ نیز باز است و $f(z)$ را با w نمایش می‌دهیم و $g: f(U) \to \mathbb{C}$ یک نگاشت C^1 می‌گیریم. "قاعده‌های زنجیره‌ای" زیر را ثابت کنید:

$$(g\circ f)_z = (g_w \circ f) f_z + (g_{\bar{w}} \circ f)\overline{(f_{\bar{z}})}$$

$$(g\circ f)_{\bar{z}} = (g_w \circ f) f_{\bar{z}} + (g_{\bar{w}} \circ f)\overline{(f_z)}$$

پ) از (ب) نتیجه بگیرید که

$$g_w \circ f = \frac{1}{\det Df}\left((g\circ f)_z \overline{(f_{\bar{z}})} - (g\circ f)_{\bar{z}} \overline{(f_z)}\right)$$

$$g_{\bar{w}} \circ f = \frac{1}{\det Df}\left((g\circ f)_{\bar{z}} f_z - (g\circ f)_z f_{\bar{z}}\right)$$

ت) فرض کنید f یک دیفئومورفیسم C^1 است یعنی f^{-1} وجود دارد و C^1 است. در این صورت نشان دهید:

$$(f^{-1})_w \circ f = \frac{\overline{(f_z)}}{\det Df}$$

$$(f^{-1})_{\bar{w}} \circ f = -\frac{f_{\bar{z}}}{\det Df}$$

(۸) روابط زیر را در مورد ضریب بلترامی (کشیدگی مختلط) تابع وارون و ترکیب تابع‌ها ثابت کنید.

الف)
$$\mu_{f^{-1}} \circ f = \left(-\left(\frac{f_z}{|f_z|}\right)^2 \mu_f\right)$$

ب)
$$\mu_{g\circ f} = \frac{\mu_f + \frac{\overline{f_z}}{f_z}(\mu_g \circ f)}{1 + \frac{\overline{f_z}}{f_z}\overline{\mu_f}(\mu_g \circ f)}$$

پ) فرض کنید f همدیس است و g شبه‌همدیس. در این صورت:

$$\mu_{f\circ g} = \mu_g \quad ، \quad \mu_{g\circ f} = (\mu_g \circ f)\frac{\overline{f_z}}{f_z}$$

(ت) فرمول زیر را که حالت خاص آن در کلاس ثابت شد نتیجه بگیرید (f دو شبه همدیس) :

$$\mu_{g\circ f^{-1}}\circ f=\left(\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\frac{\mu_g-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\,\mu_g}$$

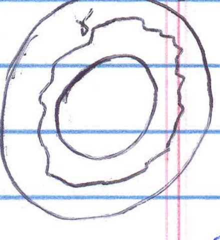
(۹) فرض کنید f_1 نگاشتی K_1-شبه همدیس و f_2 نگاشتی K_2-شبه همدیس است و ترکیب $f_1\circ f_2$ معنی دارد. نشان دهید $f_1\circ f_2$ نگاشتی K_1K_2-شبه همدیس است.

(۱۰) برای حلقه $R=\{z \mid r_1<|z|<r_2\}$، مدول R ($m(R)$) به صورت $\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ تعریف می‌شود. فرض کنید یک نگاشت K-شبه همدیس حلقه R را به حلقه R' می‌نگارد به طوری که دایره‌های مرزی R به دایره‌های مرزی متناظر R' نگاشته شوند. نشان دهید:

$$\frac{1}{K}m(R)\le m(R')\le K\,m(R)$$

(مسئله Grötzsch برای حلقه‌ها) [راهنمایی: تقلید سر راست مسئله Grötzsch برای مستطیل‌ها. می‌توانید از حلقه استاندارد به شکل $R_r=\{z \mid 1<|z|<r\}$ استفاده کنید.]

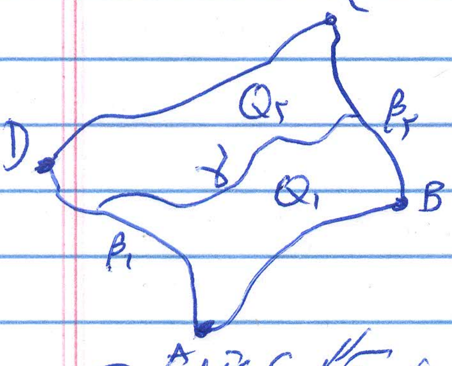
(۱۱) برای حلقه $R=\{z \mid r_1<|z|<r_2\}$، Γ را خانواده خم‌های کاملاً در R می‌گیریم که دایره‌های مرزی بیرونی و درونی را از هم جدا می‌کنند. $\lambda(\Gamma)$ را محاسبه کنید و نشان دهید مترک بهینه منحصر به فرد است (با تقریب ضرب کردن در یک عدد ثابت).



(۱۲) فرض کنید Q یک چهارضلعی تعمیم یافته است و γ یک خم ساده است که دو ضلع متقابل Q را به هم وصل می‌کند و Q را به دو چهارضلعی تعمیم یافته Q_1 و Q_2 تجزیه می‌کند. نشان دهید

$$m(Q)\ge m(Q_1)+m(Q_2)$$

شرط لازم و کافی برای تساوی را بیان و اثبات کنید.



(۱۳) ثابت کنید اگر همسانریختی $f: U\to V$ از نوع 1-شبه همدیس باشد، آنگاه f تحلیلی است.

(راهنمایی: از تمرین ۱۲ استفاده کنید.)

(۱۲) خواص اساسی زیر در مورد مشتق شوارتزی را ثابت کنید :

الف) $(S(f\circ g))(z) = Sf(g(z))\cdot g'(z)^2 + Sg(z)$

ب) اگر $f(z)\neq 0$ آنگاه $Sf = S(\frac{1}{f})$

(۱۳) فرض کنید $f'\neq 0$، تعریف کنید

$$Nf = (2!)\lim_{w\to z}\frac{\partial}{\partial w}\log\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

الف) ثابت کنید $(N(f\circ g))(z) = Nf(g(z))\cdot g'(z) + Ng(z)$

ب) ثابت کنید $Nf = \frac{f''}{f'}$

(۱۴) الف) ثابت کنید

$$Sf = (Nf)' - \frac{1}{2}(Nf)^2$$
$$= (-2)(f')^{\frac{1}{2}}\left((f')^{-\frac{1}{2}}\right)''$$

(که در سطر دوم همان شاخه ضریب را برای هر دو عبارت متناظر گرفته‌ایم)

ب) از الف نتیجه بگیرید که اگر $Sf=0$ آنگاه f یک نگاشت موبیوس است.