تمرین‌های تکمیلی آنالیز مختلط Schlag

۱. ثابت کنید مرتبه قطب برای توابع گویا خوش‌تعریف است (استقلال از مختصات محلی).

۲. ثابت کنید عدد چرخش برای توابع گویا خوش‌تعریف است (فرض کنید همه داده‌ها در دو دستگاه مختصات جای گرفته‌اند و استقلال از مختصات محلی را نشان دهید).

۳. نشان دهید

$$n\geq 2:\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,dx = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

۴. فرض کنید $z_n \neq 0$ برای هر n. در این صورت $\prod z_n$ به عددی $\neq 0$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum \log z_n$ همگرا باشد. (در اینجا $\log$ شاخه اصلی $-\pi<\theta\leq\pi$ است)

۵. فرض کنید $z_n\neq 0$ برای هر n و شرط زیر برقرار است: برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد N که اگر $m>n\geq N$، آنگاه $|z_{n+1}\cdots z_m-1|<\varepsilon$. آیا $\prod z_n$ لزوماً به عددی (ناصفر) همگراست؟ اگر صحیح است، ثابت کنید، وگرنه نشان دهید با اضافه کردن چه شرط معقولی این حکم برقرار می‌شود.

۶. فرض کنید $p_n\geq 0$. نشان دهید $\sum p_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\prod(1+p_n)$ همگرا باشد.

۷. U یک زیرمجموعه باز همبند $\mathbb{C}$ است و X زیرمجموعه‌ای از U که در U نقطه حدی دارد. فرض کنید (f_n) یک دنباله تابع‌های هولومورف در U است که به طور یکنواخت کراندار است. ثابت کنید اگر (f_n) در $\cancel{X}$ همگرا باشد، آنگاه روی هر زیرمجموعه فشرده U به طور یکنواخت همگراست.

۸. U یک زیرمجموعه باز همبند $\mathbb{C}$ است و (f_n) یک دنباله تابع‌های هولومورف در U که در نقطه‌ای $z_0\in U$ همگراست. ثابت کنید اگر دنباله $(\mathrm{Re}(f_n))$ به طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده U همگرا باشد، آنگاه (f_n) نیز روی زیرمجموعه‌های فشرده U به طور یکنواخت همگراست.

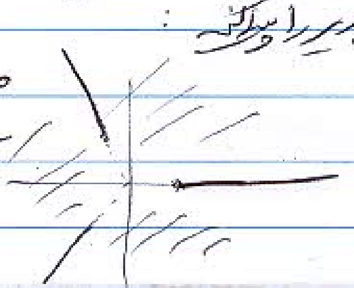
۹. فرض کنید R_1 و R_2 دو مستطیل باز در صفحه $\mathbb{C}$ هستند و $f:R_1\to R_2$ همریختی تحلیلی. می‌دانیم f به یک همسان‌ریختی $\overline{R_1}\to\overline{R_2}$ گسترش می‌یابد. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه رأس‌ها به رأس‌ها نگاشته شوند این است که دو مستطیل متشابه باشند.

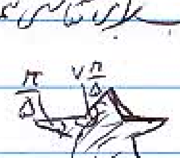
۱۰. فرض کنید $0<\alpha<1$، $0<\beta<1$. نگاشت همدیس تعریف شده توسط $f(z)=\int_0^z \frac{d\zeta}{(\zeta+1)^{\alpha}(\zeta-1)^{\beta}}$ را در نظر بگیرید. تصویر HUR را تحت f در سه حالت $\alpha+\beta<1$، $\alpha+\beta=1$ و $\alpha+\beta>1$ بررسی کنید.

۱۱. نشان دهید نگاشت همدیس تعریف شده توسط انتگرال $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta^2-1)}}\,d\zeta$ نیم‌صفحه بالا را به درون یک مربع می‌نگارد.

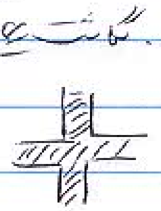
۱۲. نگاشت همدیس مناسبی برای نگاشتن نیم‌صفحه بالا به هر یک از اشکال زیر پیدا کنید:

صفحه منهای نیم‌خط‌های
ساطع از ریشه‌های
پنجم واحد در راستای





پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای با زوایای داخلی $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{7\pi}{5}$



۱۳. (الف) U زیرمجموعه‌ای باز و همبند از $\mathbb{C}$ است و $f,g: U\to\mathbb{C}$ دو تابع تحلیلی‌اند که $f(z)g(z)=0$ برای هر $z\in U$. ثابت کنید یا f در سراسر U صفر است و یا g.

(ب) فرض کنید $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ تحلیلی است و بطور پیوسته به $\overline{\mathbb{D}}$ توسیع می‌یابد. ثابت کنید اگر f در مرز $\mathbb{D}$ روی کمانی با طول ناصفر ثابت باشد، f در سراسر $\mathbb{D}$ ثابت است.

۱۴. f تابعی هولومورف روی گوی باز $|z|<R$ است. برای هر r که $0\le r<R$ قرار دهید $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. نشان دهید M تابعی پیوسته غیرنزولی روی $[0,R)$ است و اگر f ثابت نباشد، M صعودی اکید است.

۱۵. فرض کنید $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ هولومورف است و $f(0)=0$. ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ بطور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگراست. (راهنمایی: از لم شوارتس روی گوی $|z|<r$ استفاده کنید.)

۱۶. فرض کنید $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تحلیلی است، z_0 و a دو عدد ثابت‌اند و

$$F(z)=z-z_0-af(z)$$

نشان دهید اگر $|a|$ به اندازه کافی کوچک باشد، یک ناحیه حول z_0 وجود دارد که در آن $F(z)=0$ دقیقاً یک ریشه دارد. فرض کنید $f(z_0)\neq 0$. در این صورت اگر $|z_1-z_0|$ به اندازه کافی کوچک باشد، ثابت کنید می‌توان a را به گونه‌ای انتخاب کرد که z_1 ریشه $F(z)=0$ باشد.

۱۷. نشان دهید دقیقاً دو تابع هولومورف f تعریف شده در $|z|<1$ وجود دارند که

$$f(z)^2+2f(z)-z=0$$

سری تیلور هر یک از دو تابع حول $z=0$ را پیدا کنید.

۱۸. تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-\pi^2n^2}\ ,\quad \frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-\pi n)^2}$$

۱۹. حاصلضرب‌های نامتناهی زیر را ثابت کنید:

$$\sinh(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\pi^2n^2}\right),\quad e^z-1=ze^{\frac{1}{2}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)$$

۲۰. U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و f یک تابع هولومورف روی U. مشتق شوارتسی f، $\{f,z\}$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{f,z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

(الف) ثابت کنید $\{f,z\}=0$ اگر و تنها اگر f یک نگاشت موبیوس باشد. (ب) اگر g یک نگاشت موبیوس باشد، ثابت کنید $\{g\circ f,z\}=\{f,z\}$. (پ) قرار دهید $w=f(z)$ و فرض کنید $f'(z)\neq 0$. در این صورت داریم

$$\{w,z\}=-\left(\frac{dw}{dz}\right)\{z,w\}$$

(فرضاً z تابعی هولومورف از w است زیرا $f'(z)\neq 0$)

(ت) قرار دهید $w=f(z)$ و فرض کنید $g(w)$ تابع هولومورف از w است. در این صورت:

$$\{g\circ f,z\}=\{g,w\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\{w,z\}$$

۲۱. (الف) U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است. ثابت کنید دنباله‌ای (K_n) از زیرمجموعه‌های فشردهٔ U وجود دارد که در شرط‌های زیر صادق است:

(i) $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1} \subset K_{n+1} \subset \cdots$

(ii) $\bigcup K_n = U$

(iii) هر مؤلفهٔ همبندی $\hat{\mathbb{C}} - K_n$ شامل مؤلفه‌ای از $\hat{\mathbb{C}} - U$ است.

(ب) قضیهٔ Runge برای مجموعه‌های باز: فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و S زیرمجموعه‌ای از $\hat{\mathbb{C}}$ که از هر مؤلفهٔ همبندی $\hat{\mathbb{C}} - U$ نقطه‌ای دارد. اگر $f: U \to \mathbb{C}$ تحلیلی باشد، ثابت کنید دنباله‌ای از توابع گویا مانند (R_n) وجود دارد که $R_n \to f$ به صورت یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U.

تمرین‌های زیر از کتاب Schlag حل شود یا اگر طرح شده (به صورت جزئی کامل کنید)

1.1, 1.2, 1.3, 1.9, 1.10, 1.14

2.1, ~~2.5~~ 2.3 تا 2.5 (آشنایی با تابع گاما), 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13

---

۲۲. به کمک قضیهٔ Runge تابع تحلیلی $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ را بیابید که برای هر شعاع (ثابت $= \theta$) مقادیر $\{f(re^{i\theta}) \mid 0<r<1\}$ در $\mathbb{C}$ چگال باشد. راهنمایی: زیرمجموعه‌های فشردهٔ K_n و L_n را به صورت زیر تعریف کنید:

$K_n =$ قرص بسته $|z| \le 1-2^{-n}$ ، $L_n = \{(1-2^{-n-1}) e^{it} \mid 2^{-n} \le t \le 2\pi\}$ $(n \ge 1)$

فرض کنید $\{z_n\}$ ~~مجموعه~~ مجموعه‌ای شمارا و چگال در $\mathbb{D}$ است. دنبالهٔ چندجمله‌ای‌های (p_n) را به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم: $p_1 \equiv z_1$، با فرض اینکه p_{n-1} تعریف شده باشد، به کمک قضیهٔ Runge چندجمله‌ای p_n را ~~به گونه‌ای~~ به گونه‌ای می‌یابیم که:

$|p_n(z) - z_n| < 2^{-n}$ برای $z \in L_n$ و $|p_n(z) - p_{n-1}(z)| < 2^{-n}$ برای $z \in K_n$

ثابت کنید $f(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z)$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۲۳. مقدار انتگرال‌های زیر را با انتخاب شاخه‌ای مناسب پیدا کنید:

(الف) $\int_0^z \sqrt{1-\zeta^2}\, d\zeta$ (شاخه‌ای برای $\sqrt{1-z^2}$ با برش روی خط $[-1,1]$ در نظر بگیرید)

(ب) $\int_0^z \frac{1}{(\zeta^2-1)^2}\, d\zeta$

۲۴. همهٔ مقادیر ممکن برای $\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$ را به دست آورید که در آن γ مسیری هموار از $-i$ به $+i$ است.