(۵۱) فرض کنید a_j ، $j=0,1,2,3$ اعداد حقیقی متمایز هستند. نشان دهید انتگرال

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}\,dx$$

را می‌توان با تعویض متغیر به شکل زیر درآورد:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{چندجمله‌ای درجه ۳ مناسب}}}\,dt$$

راهنمایی: قرار دهید $t=\frac{1}{x-a_0}$

(۵۲) فرض کنید $z_1+z_2+z_3=0$. ثابت کنید:

$$\det\begin{bmatrix}\wp(z_1) & \wp'(z_1) & 1\\ \wp(z_2) & \wp'(z_2) & 1\\ \wp(z_3) & \wp'(z_3) & 1\end{bmatrix}=0$$

راهنمایی: تابعی به شکل $f(z)=\wp'(z)-\alpha\wp(z)-\beta$ در نظر بگیرید. برای z_1 و z_2 داده شده، α و β را طوری تعیین کنید که $f(z_1)=f(z_2)=0$.

(۵۳) (الف) ثابت کنید

$$\wp(z)-\wp(w)=-\frac{\sigma(z-w)\,\sigma(z+w)}{\sigma(z)^2\,\sigma(w)^2}$$

راهنمایی: نشان دهید طرف راست نسبت به z تناوبی است و ثابت را از تحلیل سری لوران به دست آورید.

(ب) ثابت کنید

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(w)}=\zeta(z-w)+\zeta(z+w)-2\zeta(z)$$

(۵۴) فرمول‌های زیر را ثابت کنید

$$\zeta(z+w)=\zeta(z)+\zeta(w)+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}$$ (فرمول جمع برای ζ)

$$\wp(z+w)=-\wp(z)-\wp(w)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2$$ (فرمول جمع برای $\wp$)

(برای حکم دوم کافیست توجه کنید که $\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2$)

(۵۵) برای η_1 و η_2 که از رابطهٔ $\zeta(z+\omega_j)=\zeta(z)+\eta_j$ به دست آمده‌اند ثابت کنید:

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i$$

راهنمایی: روی مرز یک متوازی‌الاضلاع مناسب انتگرال‌گیری کنید.

(۵۶) در معادلهٔ دیفرانسیل $\wp$ نشان دهید $g_2^3-27g_3^2\neq 0$.

(۵۷) فرض کنید $p(x)=1+ax^2-x^4$ که در آن a عددی ثابت است. ثابت کنید:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}+\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}=\int_0^C \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$$

که در آن

$$C=\frac{A\sqrt{p(B)}+B\sqrt{p(A)}}{1+A^2B^2}$$