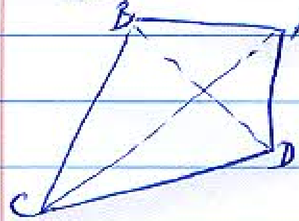
توجه: در تمرین (۳) طرف راست اشتباهاً به صورت $\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ نوشته شده است که باید به صورت $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ نوشته شود.

۲۵. با استفاده از مفهوم نسبت ضربی، قضیه بطلمیوس را ثابت کنید: اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محدب باشد، این چهارضلعی محاط شدنی در یک دایره است اگر و فقط اگر:



$$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

۲۶. «قضیه فیثاغورس» هذلولوی را به صورت زیر ثابت کنید: اگر $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث با زاویه قائمه A باشد و طول اضلاع مقابل زاویه‌های A، B، C را به ترتیب a، b، c بنامیم، داریم:

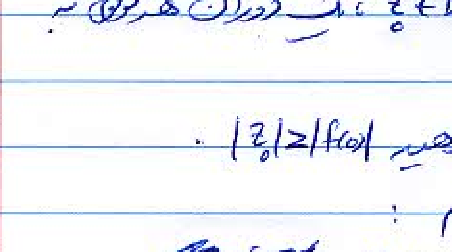
$$\cosh a=(\cosh b)(\cosh c)$$

توجه کنید که با تقریب درجه ۲، این با قضیه فیثاغورس (اقلیدسی) کاملاً جور است.

۲۷. خط راست هذلولوی l و نقطه P بیرون آن داده شده‌اند به گونه‌ای که دو خط راست هذلولوی گذرنده از P موازی با l در بی‌نهایت با هم زاویه $\frac{\pi}{2}$ می‌سازند. نشان دهید فاصله هذلولوی P از l برابر است با $\ln(1+\sqrt{2})$.

۲۸. محیط دایره به شعاع R و مساحت گوی به شعاع R هذلولوی را محاسبه کنید.

۲۹. مساحت و محیط «ذوزنقه» زیر در H را محاسبه کنید. در اینجا h_1 و h_2 دوایر ساعتی و e_1 و e_2 خط‌های هذلولوی هستند.



۳۰. نشان دهید تبدیل D به شکل $z\mapsto\frac{z_0-z}{1-\bar{z}_0 z}$، $z_0\in D$ یک دوران هذلولوی به زاویه π است. مرکز دوران را پیدا کنید.

۳۱. فرض کنید $f:D\to D$ کنفرمال است و $f(z_0)=0$. نشان دهید $|z_0|=|f(0)|$.

۳۲. تابع‌های به شکل زیر را حاصلضرب متناهی Blaschke می‌نامیم:

$$B(z)=\alpha z^m\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\right),\quad |\alpha|=1,\ m\in\mathbb{Z},\ |z_k|\neq 1$$

الف) نشان دهید $B(\frac{1}{\bar z})=\frac{1}{\overline{B(z)}}$. پس $B(\partial D)\subset\partial D$.

ب) اگر همه صفرهای B در D باشند، نشان دهید $B(D)\subset D$ و $B(\hat{\mathbb{C}}-D)\subset\hat{\mathbb{C}}-D$.

پ) نشان دهید z یک نقطه بحرانی f است (یعنی $f'(z)=0$) اگر و فقط اگر $\frac{1}{\bar z}$ یک نقطه بحرانی f باشد.

ت) نشان دهید اگر f یک تابع گویا باشد که $f(\partial D)\subset\partial D$، آنگاه f یک حاصلضرب بلاشکه متناهی است. (راهنمایی: $\overline{f(\frac{1}{\bar z})}$ نیز یک تابع گویا خواهد بود که با $\frac{1}{f(z)}$ روی ∂D یکی است.)

۳۳. (تعمیم لم شوارتس) فرض کنید $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ هلومورف است و $f(z_k)=0$، $k=1,\dots,n$. ثابت کنید:

$$|f(z)|\le\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\right|$$

اگر برای این نقطه‌ای $z\ne z_k$، $k=1,\dots,n$، تساوی حاصل شود، چه می‌توان گفت؟

۳۴. (قضیه Pringsheim) فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ که در آن c_n ها حقیقی نامنفی هستند دارای شعاع همگرایی 1 است و در $\mathbb{D}$ تابع f را تعریف می‌کند. نشان دهید نمی‌توان f را به نقطه $z=1$ ادامه تحلیلی داد.

۳۵. (قضیه شکاف‌های Hadamard) فرض کنید شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ برابر 1 است و $c_n=0$ مگر برای دنباله‌ای $n=n_k$ که در شرط $\frac{n_{k+1}}{n_k}\ge 1+\delta$ است ($\delta>0$ مقداری ثابت). نشان دهید تابع تعریف شده توسط سری توانی بالا را نمی‌توان به طور تحلیلی به هیچ نقطه‌ای از دایره واحد توسیع داد. (راهنمایی: در غیر اینصورت تابع $g(w)=f\left(\frac{1}{2}(w^m+w^{m+1})\right)$ را در نظر بگیرید که در آن m عدد صحیحی به اندازه کافی بزرگ است و نشان دهید $g(w)$ دارای شعاع همگرایی بزرگتر از 1 است. از این نتیجه بگیرید که سری $f(z)$ در بازه‌های $1\le|z|<\rho$ همگرا است.)

۳۶. نشان دهید تابع‌های تعریف شده توسط سری‌های زیر را نمی‌توان به هیچ نقطه $|z|=1$ ادامه تحلیلی داد:

(الف) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$، (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^{2^n}$، (پ) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$، (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^{n!}$

۳۷. فرض کنید تابع هلومورف یک به یک $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ به شکل

$$f(z)=z+a_3z^3+a_5z^5+\cdots,\quad |z|<1 \quad \text{(فقط توان‌های فرد)}$$

است. نشان دهید $f(\mathbb{D})$ گوی باز شعاع $\frac{1}{2}$ حول 0 را در بر می‌گیرد.

۳۸. دو تابع هلومورف یک به یک $f,g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ را متنافر می‌نامیم در صورتی که برای هر $z_1,z_2\in\mathbb{D}$ داشته باشیم $f(z_1)\ne g(z_2)$ و f و g به شکل زیر باشند:

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots,\quad g(z)=1+b_1z+b_2z^2+\cdots,\quad |z|<1$$

با تعمیم مناسب اثبات قضیه مساحت، Grönwall، ثابت کنید: $\sum_{n=1}^{\infty}n(|a_n|^2+|b_n|^2)\le 1$

۳۹. فرض کنید U ... $f:\mathbb{D}\to U$ یک به یک و پوشای هلومورف است که $f(0)=0$ و $g:\mathbb{D}\to U$ یک تابع هلومورف دلخواه با شرط $g(0)=0$. نشان دهید برای هر r که $0<r<1$ داریم $g(B_r(0))\subset f(B_r(0))$.

۴۰. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز و ساده همبند از $\mathbb{C}$ است که $U\ne\mathbb{C}$، و $f:U\to\mathbb{D}$ یک به یک و پوشا و تحلیلی که $f(z_0)=0$، z_0 نقطه‌ای ثابت در U. اگر $g:U\to\mathbb{D}$ تابعی هلومورف باشد، نشان دهید $|g'(z_0)|\le|f'(z_0)|$ و حالت تساوی رخ می‌دهد که $g=e^{it}f$ برای $t\in\mathbb{R}$ مناسب.

۴۱. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز همبند و ساده همبند از $\mathbb{C}$ است که $U\ne\mathbb{C}$، و $f:U\to U$ نگاشتی هلومورف. احکام زیر را ثابت کنید (راهنمایی: با استفاده از قضیه نگاشت ریمان موضوع را به $\mathbb{D}$ منتقل کنید):

(الف) اگر f بیش از یک نقطهٔ ثابت داشته باشد، f همانی است.

(ب) اگر $f(z_0)=z_0$، آنگاه $|f'(z_0)|\le 1$.

(پ) اگر $f(z_0)=z_0$ و $|f'(z_0)|=1$، آنگاه f یک خودریختی U است.

(ت) اگر $f(z_0)=z_0$ و $f'(z_0)=1$، آنگاه f همانی است.

(ث) نشان دهید حکم (ت) برای هر ناحیهٔ باز همبند و کراندار U در $\mathbb{C}$ برقرار است. (راهنمایی: نشان دهید که خانوادهٔ $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}$ نرمال است و سری تیلور f^n حول z_0 را در نظر بگیرید.)

۴۲. فرض کنید f تابعی schlicht است و $0<r<1$. نشان دهید مساحت $f(B_r(0))$ بزرگتر یا مساوی πr^2 است.

۴۳. U زیرمجموعه‌ای باز و همبند از $\mathbb{C}$ است. دنبالهٔ (z_n) از عناصر U را فرار به مرز گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از U، عدد صحیح N_K وجود داشته باشد که $z_n\notin K$ برای $n\ge N_K$. حال تابع هارمونیک h روی U را در نظر بگیرید و فرض کنید $M>0$.

(الف) اگر h حقیقی باشد و $\overline{\lim}\, h(z_n)\le M$ برای هر دنبالهٔ فرار در U، نشان دهید $h(z)\le M$ برای هر $z\in U$.

(ب) اگر h مختلط باشد و $\overline{\lim}\,|h(z_n)|\le M$ برای هر دنبالهٔ فرار در U، نشان دهید $|h(z)|\le M$ برای هر $z\in U$.

۴۴. فرض کنید $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ هولومورف باشد و $\lim\limits_{|z|\to 1}|f(z)|=1$. نشان دهید f تابعی ثابت است.

۴۵. تحقیق کنید که لاپلاسین به مختصات قطبی در صفحه $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$. نشان دهید اگر تابع هارمونیک h تعریف شده در حلقهٔ $a<|z|<b$ فقط به r بستگی داشته باشد، آنگاه

$$h(r)=\alpha\log r+\beta$$ برای $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ مناسب.

۴۶. نشان دهید که هستهٔ پواسون در $\mathbb{D}$ را می‌توان به صورت

$$P(e^{it},re^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}$$

نمایش داد که در آن این سری نسبت به (t,θ) به طور یکنواخت همگرا است برای هر $0\le r<1$.

۴۷. فرض کنید $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,a<|z|<b\}$ و $h:A\to\mathbb{C}$ هارمونیک است. نشان دهید:

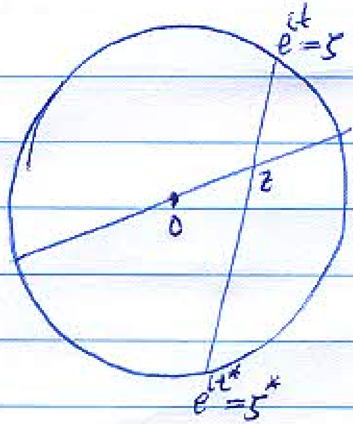
$$\int_0^{\pi} h(re^{it})\,dt=\alpha\log r+\beta$$ برای α و β مناسب در $\mathbb{C}$.

نتیجه بگیرید که هر تابع هارمونیک کراندار تعریف شده در گوی محذوف قابل توسیع به نقطهٔ حذف شده است.

۴۸. U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $h:U\to\mathbb{R}$. نشان دهید h هارمونیک است اگر و فقط اگر برای هر $z\in U$ و هر $r>0$ که $\overline{B_r(z)}\subset U$ داشته باشیم:

$$h(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(z)} h(x,y)\,dx\,dy$$

۴۹. (تعبیر هندسی هستهٔ پواسون منسوب به شوارتس) نقطهٔ z در $\mathbb{D}$ را ثابت کنید و برای $\zeta=e^{it}\in\partial\mathbb{D}$



نقطه $\zeta^*=e^{it^*}$ را طبق شکل در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}=\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

(راهنمایی: از هندسه شکل توجه کنید که $1-|z|^2=|e^{it}-z||e^{it^*}-z|$

$$=-(e^{it}-z)(e^{-it^*}-\bar{z})$$

و نسبت به t مشتق بگیرید.)

ب) نتیجه بگیرید که برای تابع هارمونیک h،

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{it^*})\,dt$$

۵) فرض کنید $h\in L^1(\partial\mathbb{D})$ (یعنی $\int_{\partial\mathbb{D}}|h|<\infty$) و در نقطه $\zeta_0=e^{it_0}$، h دارای حد راست و چپ است: $a^+=\lim_{t\to t_0^+}h(e^{it})$ و $a^-=\lim_{t\to t_0^-}h(e^{it})$. ثابت کنید که

$$\lim_{\substack{r\zeta_0\to\zeta_0\\ r<1}} P[h](r\zeta_0)=\frac{1}{2}(a^++a^-)$$

(راهنمایی: اثبات قضیه سوال قبل در حالتی که h در ζ_0 پیوسته باشد را باید کمی تغییر دهید. بازه I به مرکز ζ_0 را به صورت $I=I^+\cup\{t_0\}\cup I^-$ بنویسید و در نظر بگیرید $J=\partial\mathbb{D}-I$ ، $h_J=h\cdot\chi_J$ ، $h_{I^+}=h\cdot\chi_{I^+}$ ، $h_{I^-}=h\cdot\chi_{I^-}$. با توجه به تقارن هسته پواسون نتیجه بگیرید که $\int_{I^+}P(e^{it})\,dt=\int_{I^-}P(e^{it})\,dt$ ، و غیره.)