(1)

قضیه وایرشتراس

دنباله (z_n) از اعداد مختلط داده شده است. فرض کنید $P_N=\prod_{n=1}^{N} z_n$. حاصلضرب بی‌نهایتی $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ را همگرا به P می‌نامیم در صورتی که $P_n \to P$، در این صورت می‌نویسیم $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = P$.

لم ۱ اگر $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ به حدی ناصفر همگرا باشد، برای هر $\varepsilon>0$، N وجود دارد که $N \le n < m$ نتیجه دهد $|z_{n+1}\cdots z_m - 1|<\varepsilon$. بالاخص با قرار دادن $m=n+1$ نتیجه می‌شود که جمله عمومی به ۱ میل می‌کند.

برهان فرض کنید $P=\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$. برای $\eta>0$ طبق محک کوشی، N وجود دارد که برای $N \le n < m$:

$$|P_m - P_n| < \eta$$

یا

$$|z_1\cdots z_n|\,|z_{n+1}\cdots z_m - 1| < \eta$$

چون $P\neq 0$، می‌توان N را آنقدر بزرگ گرفت که برای $n \ge N$ داشته باشیم:

$$|z_1\cdots z_n| > \frac{1}{2}P$$

حال اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد η بالا را به صورت $0<\eta\le\frac{P}{2}\varepsilon$ در نظر می‌گیریم حکم نتیجه می‌شود. ■

حاصلضرب بی‌نهایتی $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ را به طور مطلق همگرا می‌نامیم در صورتی که سری $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-1|$ همگرا باشد.

لم ۲ اگر $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ به طور مطلق همگرا باشد، همگرا نیز هست. به علاوه در این صورت $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ صفر است اگر و فقط اگر یکی از z_nها صفر باشد.

برهان قرار می‌دهیم $w_n = z_n - 1$، یا $z_n = 1 + w_n$. بنابراین همگرایی مطلق $\prod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ را یعنی همگرایی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ گرفته‌ایم. از آنجا که $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ همگرا فرض شده است، برای n به اندازه کافی بزرگ داریم $|w_n|<\frac{1}{2}$. با کنار گذاشتن تعداد متناهی z_n، فرض می‌کنیم $|w_n|<\frac{1}{2}$ برای هر n برقرار است. بنابراین می‌توان یک شاخه لگاریتم را برای z_nها در نظر گرفت. شاخه $\operatorname{Log} z$ را در نظر می‌گیریم که

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i\theta, \quad -\pi<\theta\le\pi$$

اگر بنویسیم $z = 1+w$، به طور کلی داریم:

$$|\operatorname{Log} z| = |\operatorname{Log}(1+w)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{w^k}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|w|^k}{k} = |w|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|w|^{k-1}}{k}$$

$$\leq |w| \sum_{k=1}^{\infty} |w|^{k-1} = \frac{|w|}{1-|w|} \leq 2|w|$$

(زیرا که $|w|<\frac{1}{2}$). پس با فرض $|w|<\frac{1}{2}$ داریم:

$$|\operatorname{Log} z| \leq 2|w|$$

بدین ترتیب

$$(*) \qquad \prod_{n=1}^{N} z_n = \prod_{n=1}^{N}(1+w_n) = \prod_{n=1}^{N} \exp(\operatorname{Log}(1+w_n))$$

$$= \exp\Big(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1+w_n)\Big)$$

چون $\sum_{n=1}^{N}|\operatorname{Log}(1+w_n)| \leq 2\sum_{n=1}^{N}|w_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ همگرا فرض شده است، نتیجه می‌گیریم که

$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}(1+w_n)$ همگرای مطلق همگراست، $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}(1+w_n)=L$. چون $\exp$ تابعی پیوسته است،

$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \exp L$ که شکل محدود $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ همگراست ولی ممکن است صفر شود مگر

اینکه در بین جملات آغازی حذف شده (قبل از فرض $|w_n|<\frac{1}{2}$) یک z_n صفر بوده باشد. ▨

<u>گزاره</u> U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و دنباله‌ای $U \to \mathbb{C}$: f_n از تابع‌های هولومورف داده شده است.

فرض کنید دنباله (c_n) از اعداد مثبت داده شده است که $\sum c_n < \infty$ و $|f_n(z)-1| < c_n$ به ازای هر n و

هر $z \in U$. در اینصورت $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت به تابعی هولومورف میل می‌کند.

<u>برهان</u> به ازای هر $z \in U$ ثابت، همگرایی $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ از لم ۲ است، پس تابعی $f: U \to \mathbb{C}$ به صورت

$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ تعریف می‌شود که حد نقطه‌ای دنباله (f_n) است. چون طبق فرض c_n ها مستقل از

$z \in U$ فرض شده‌اند و طبق $(*)$ (در اثبات ۲):

$$\prod_{n=1}^{N} f_n(z) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1+(f_n(z)-1))\Big) \leq 2\sum_{n=1}^{N} c_n$$

همگرایی دنباله به گونه یکنواخت است، بنابراین تابع حدی، یعنی f، هولومورف می‌باشد. ▨

<u>تعریف عوامل مقدماتی وایرشتراس</u> تابع‌های هولومورف $f_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$، $n=0,1,2,\dots$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_0(z)=1-z, \qquad k \geq 1:\ E_k(z)=(1-z)\exp\Big(z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^k}{k}\Big)$$

لم ۳ عددی $C>0$ وجود دارد که برای هر k و هر $z\in\mathbb{C}$ که $|z|\le\frac{1}{2}$ داریم:

$$\left|1-E_k(z)\right| \le C|z|^{k+1}$$

برهان: برای $k=0$ بنا به عبارات بالا برای $C=1$ برقرار است. درستی حکم را برای $k\ge 1$ بررسی می‌کنیم. برای $|z|<\frac{1}{2}$ سری

$$\text{Log}(1-z) = -z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots$$

را در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب

$$E_k(z) = \exp(\text{Log}(1-z))\cdot\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{z^j}{j}\right)$$

قرار می‌دهیم $t=-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{z^j}{j}$ برای $|z|\le\frac{1}{2}$ داریم:

$$(**)\quad |t| = |z|^{k+1}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{|z|^{j-k-1}}{j}\right) \le |z|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j} = 2|z|^{k+1}$$

بنابراین:

$$\left|1-E_k(z)\right| = \left|1-\exp(t)\right| = \left|1-\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)\right|$$

$$= |t|\left|1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\cdots\right|$$

از $(**)$ داریم $|t|\le 1$، پس

$$\left|1-E_k(z)\right| \le 2(e-1)|z|^{k+1}$$

بدین ترتیب عدد $C=2(e-1)$ حکم را برقرار می‌کند. ■

قضیه وایرشتراس: فرض کنیم گسسته‌ای $\{a_1, a_2, \ldots\}$ در $\mathbb{C}$ داده شده است، عبارت

$$(***)\quad |z|^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

تابعی هلومورف در صفحه تعریف می‌کند که دارای m تا صفر در نقطه 0 به عنوان یک صفر تابع است (اگر $m=0$ تابع در 0 صفر نشود)، a_n ها صفرهای دیگر تابع هستند و هر a_n به تعداد تکرار آن به عنوان صفر تابع ظاهر می‌شود. تابع $(***)$ که با عبارت بالا تعریف می‌شود صفر دیگری در صفحه ندارد. اگر g تابع هلومورف دیگری با همین صفرها (همین تکرارها) در صفحه باشد، داریم

$$g(z) = e^{h(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

که در آن $h(z)$ یک تابع هلومورف است.

در حالت کلی هم از این نتیجه می‌شود که نقاط a_n (واقعاً $z=0$) برای g/f تکینه برداشتنی هستند، پس
$\frac{g}{f}$ می‌توان تابع هولومورف همه جا ناصفر در $\mathbb{C}$ تعریف کرد. از آنجا که $\mathbb{C}$ ساده همبند است، g/f
دارای لگاریتم است، پس $e^h = g/f$ که h یک تابع هولومورف است. بنابراین باید ثابت کنیم
(***) یک هولومورف با صفرهای مشخص شده مورد نظر را تعریف می‌کند. عامل z^m وضعیت $z=0$ به عنوان صفر
تابع مورد نظر را مشخص می‌کند، تنها باید به عامل $\prod_{n=1}^{\infty} E_n(\frac{z}{a_n})$ بپردازیم. $R>0$ دلخواهی در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم
(***) در $|z|<R$ دقیقاً صفرهای مورد نظر را دارد، و چون R دلخواه است حکم برای هر z
برقرار است. برای $R>0$ داده شده، a_nها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: a_nهایی که
$|a_n|\le 2R$ و a_nهایی که $|a_n|>2R$. چون مجموعه $\{z_1, z_2, \dots\}$ گسسته است تعداد a_nها در
دسته اول متناهی است و بخش حاصلضرب $\prod E_n(\frac{z}{a_n})$ مربوط به این a_nها یک حاصلضرب متناهی
تابع‌های هولومورف است که فقط در a_nهای مربوط به تعدادشان صفر می‌شود. برای a_nهایی که
$|a_n|>2R$، داریم $|\frac{z}{a_n}|<\frac{1}{2}$، پس طبق لم ۳:

$$\left|1-E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \le C\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} \le \frac{C}{2^{n+1}}$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که حاصلضرب $\prod_{|a_n|>2R} E_n(\frac{z}{a_n})$ به تابعی هولومورف همگرا است و طبق لم ۲ صفرهای
این تابع دقیقاً صفرهای مورد نظر هستند. ∎