قضیه یکنواخت سازی

<u>صورت اول</u>: هر رویه ریمانی ساده همبند با یک (و فقط یکی از) سه رویه ریمانی $\mathbb{D}$، $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{C}P(1)$ هم‌ریخت تحلیلی است.

<u>صورت دوم</u>: هر رویه ریمانی نافشرده X که $H^1(X,\mathbb{R})=\{0\}$ با یکی از $\mathbb{D}$ یا $\mathbb{C}$ هم‌ریخت تحلیلی است.

در صفحات بعد به اثبات صورت دوم می‌پردازیم. در زیر نشان می‌دهیم که صورت دوم صورت اول را نتیجه می‌دهد. یک دستاورد توپولوژیک این امر این است که هر خمینه دو بعدی X که همبند باشد و $H^1(X,\mathbb{R})=\{0\}$ لزوماً ساده همبند است زیرا که چنین خمینه‌ها جهت‌پذیرند و هر رویه جهت‌پذیر دارای ساختار رویه ریمانی است.

فرض کنید صورت دوم قضیه یکنواخت سازی به اثبات رسیده است و X یک رویه ریمانی ساده همبند است. اگر X نافشرده باشد که چون ساده همبند بودن نتیجه می‌دهد $H^1(X,\mathbb{R})=\{0\}$، حکم صورت اول از صورت دوم نتیجه می‌شود. اگر X فشرده باشد، چون رویه‌های ریمانی جهت‌پذیرند، از رده‌بندی رویه‌های فشرده جهت‌پذیر نتیجه می‌شود که X با $\mathbb{C}P(1)$ به طور C^∞ هم‌ریخت است. نقطه‌ای $x_0 \in X$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $X'=X-\{x_0\}$. طبق صورت دوم، X' باید با یکی از $\mathbb{D}$ یا $\mathbb{C}$ هم‌ریخت تحلیلی باشد. هم‌ریختی با $\mathbb{D}$ ناممکن است زیرا اگر $h: X' \to \mathbb{D}$ یک چنین هم‌ریختی تحلیلی باشد، از کراندار بودن h نتیجه می‌شود که x_0 یک تکینگی برداشتنی برای h است و تابعی تحلیلی $X \to \mathbb{D}$ حاصل می‌شود. چون X فشرده است این تابع باید ثابت باشد که خلاف هم‌ریختی بودن $h: X' \to \mathbb{D}$ است. در نتیجه X' باید با $\mathbb{C}$ هم‌ریخت تحلیلی باشد. هم‌ریختی $h: X' \to \mathbb{C}$ با قرار دادن $h(x_0)=\infty$ به هم‌ریختی تحلیلی $X \to \mathbb{C}P(1)$ توسیع می‌یابد.

مراجع

Hubbard, J.H. <u>Teichmüller Theory I</u>

Forster, O. <u>Lectures on Riemann Surfaces</u>

یادآوری مسئله دیریشله: فرض کنید U زیرمجموعه بازی از یک رویه ریمانی است با مرز ∂U، و تابعی پیوسته $f: \partial U \to \mathbb{R}$ داده شده است. آیا تابعی پیوسته $F: \bar{U} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که در U هارمونیک باشد و $F|_{\partial U} = f$ ؟

این مسئله را به صورت مثبت برای زیرمجموعه‌های باز ساده همبند $\mathbb{C}$ که نگاشت ریمان $r: U \to \mathbb{D}$ آنها به صورت همسانریخت به مرزها توسیع می‌یابد حل کرده‌ایم.

فرض کنید X یک رویه ریمانی باشد. منظور از خانواده دیریشله، $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$، خانواده زیرمجموعه‌های باز U از X است که $\bar{U}$ در یک نقشه مختصاتی رویه ریمانی قرار می‌گیرد و مسئله دیریشله برای U حل‌پذیر است (برای هر تابع پیوسته $\partial U \to \mathbb{R}$). اگر U زیرمجموعه‌ای باز از X باشد، $f: U \to \mathbb{R}$ پیوسته و $D \in \mathcal{D}_U$، تابع پیوسته $\tilde{f}_D: U \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{f}_D(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin D \\ F(x) & x \in \bar{D} \end{cases}$$

که در آن F جواب (یکتای) مسئله دیریشله برای D است.

تابع $f: W \to \mathbb{R}$ را زیرهمساز (subharmonic) می‌نامیم اگر f پیوسته باشد و برای هر $D \in \mathcal{D}_W$ داشته باشیم:

$$\tilde{f}_D \geq f$$

تابع‌های زبرهمساز (superharmonic) با تعویض جهت نامساوی بالا تعریف می‌شوند.

تحقیق درستی گزاره‌های زیر سرراست است:

(i) زیرهمساز بودن یک ویژگی موضعی است، یعنی برای تحقیق زیرهمساز بودن $f: W \to \mathbb{R}$ کافی است نشان دهیم برای هر $x \in W$، باز V وجود دارد، $x \in V \subset W$، که $f|_V$ زیرهمساز است.

(ii) اگر f زیرهمساز باشد، پس $\tilde{f}_D$ نیز زیرهمساز است.

(iii) اصل ماکسیمم برای تابع‌های زیرهمساز برقرار است، یعنی اگر $f: W \to \mathbb{R}$ در یک نقطه درونی به ماکسیمم برسد، f لزوماً ثابت است.

تمرین ۱: برای زیرمجموعه باز W از $\mathbb{C}$ ثابت کنید هر یک از دو شرط زیر معادل زیرهمساز بودن است:

(الف) اگر گوی بسته $\{z_0 + re^{it} \mid 0 \leq r \leq r_0, t \in \mathbb{R}\}$ تماماً در W قرار گیرد، آنگاه $f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{it})\,dt$.

(ب) اگر f به علاوه C^2 باشد، $\Delta f \geq 0$ که در آن $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

X را یک رویه ریمانی می‌گیریم. خانواده $\mathcal{F}$ از تابع‌های زیرهمساز روی X را یک خانواده پرون (Perron) با کران M می‌نامیم در صورتی که (i) $|f| \leq M$ برای هر $f \in \mathcal{F}$، (ii) هرگاه $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$، آنگاه $\operatorname{Max}\{f_1, f_2\}$ نیز در $\mathcal{F}$ است، و (iii) اگر $f \in \mathcal{F}$ و $D \in \mathcal{D}_X$، آنگاه $\tilde{f}_D \in \mathcal{F}$.

تعمیم پرون: اگر $\mathcal{F}\neq\emptyset$ ، $F=\sup\mathcal{F}$ هارمونیک است.

زیرا هارمونیک بودن یک ویژگی موضعی است، پس کافی است ثابت کنیم F در یک همسایگی نقطهٔ دلخواه $z_0\in X$ هارمونیک است. نقشهٔ (φ,U) حول z_0 می‌گیریم که $\varphi(z_0)=0$ و $\overline{\Delta}\subset U$ که در آن $\Delta=\varphi^{-1}(\mathbb{D})$ (با انتقال و تجانس در $\mathbb{C}$، این امر امکان‌پذیر است). دنباله‌ای (f_n) در $\mathcal{F}$ هست که $f_n(z_0)\to F(z_0)$. با جایگزینی $\sup\{f_1,\dots,f_n\}$ به جای f_n، می‌توان فرض کرد که دنبالهٔ (f_n) یکنوای غیرنزولی است، و همچنان $f_n(z_0)\to F(z_0)$. $(f_n)_\Delta$ را با $\tilde f_n$ نشان می‌دهیم. داریم $\tilde f_n\in\mathcal{F}$ و $\tilde f_n(z_0)\to F(z_0)$. طبق اصل Harnack، $\sup_n\tilde f_n$ هارمونیک است. نشان خواهیم داد که در Δ داریم $F=\sup_n\tilde f_n$. نقطهٔ دیگر z_1 در Δ در نظر می‌گیریم و به همان شیوه‌ای که در مورد z_0 عمل کردیم، دنباله‌ای غیرنزولی (g_n) در $\mathcal{F}$ می‌یابیم که $g_n(z_1)\to F(z_1)$. حال $h_n=\max\{f_n,g_n\}$ نیز در $\mathcal{F}$ است و می‌توان $\tilde h_n=(h_n)_\Delta$ را در نظر گرفت. چون $\tilde h_n\in\mathcal{F}$ ، لزوماً داریم $\tilde h_n(z_0)\to F(z_0)$ و $\tilde h_n(z_1)\to F(z_1)$. توجه کنید که از غیرنزولی بودن (f_n) و (g_n) نتیجه می‌شود که $(\tilde h_n)$ و $(\tilde f_n)$ نیز غیرنزولی هستند، پس تابع $\sup_n\tilde h_n$ طبق اصل هارناک هارمونیک است. به این ترتیب تفاضل $\sup\tilde h_n-\sup\tilde f_n$ یک تابع هارمونیک است که غیرمنفی می‌باشد. ولی در نقطهٔ z_0 داریم $\sup\tilde h_n(z_0)-\sup\tilde f_n(z_0)=0$ ، و z_0 یک نقطهٔ درونی Δ است، پس این تفاضل در سراسر Δ صفر است و هارمونیک بودن F ثابت می‌شود. □

با در دست داشتن این قضیه می‌توانیم صورت کلی‌تری از مسئلهٔ دیریشله را مورد بررسی قرار دهیم.

نخست فرض کنید V زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $x\in\partial V$. نقطهٔ x را یک نقطهٔ منظم مرز V می‌نامیم در صورتی که گوی باز $B_r(c)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $x\in\overline{B_r(c)}$ ، یعنی $|x-c|=r$ ، و $\overline{B_r(c)}\cap V=\emptyset$ (یا دقیقاً $\overline{B_r(c)}\cap V=\emptyset$ زیرا V و $B_r(c)$ هر دو باز هستند). اگر x یک نقطهٔ منظم باشد، می‌توان c و r را به گونه‌ای تغییر داد که x تنها نقطهٔ $\partial V\cap\overline{B_r(c)}$ باشد: مثلاً c' را نقطه‌ای اکیداً مابین c و x در پاره‌خط مستقیم به طول r می‌گیریم و قرار می‌دهیم $r'=|x-c'|$. در این صورت همهٔ نقاط مرزی $\overline{B_{r'}(c')}$ از c فاصلهٔ اکیداً بیش از r خواهند داشت، بنابراین $\overline{B_{r'}(c')}\cap\overline{V}=\{x\}$. حال در وضعیتی که $\overline{B_r(c)}\cap\overline{V}=\{x\}$ ، اگر $p\in B_r(c)$ نقطه‌ای دلخواه در این گوی باشد، تابع $V\to\mathbb{C}$ که به صورت $\frac{x-p}{z-p}$ تعریف می‌شود تحلیلی ناصفر است، پس $\log\left|\frac{x-p}{z-p}\right|$ یک تابع هارمونیک است. این تابع در سراسر V منفی است ولی حد آن وقتی $z\to x$ برابر صفر است. این نکته‌ای است که در مورد نقطهٔ مرزی منظم به کار خواهیم گرفت.

اکنون فرض کنید W زیرمجموعه‌ای باز از رویهٔ ریمانی X است. نقطهٔ $x\in\partial W$ را یک نقطهٔ مرزی منظم می‌نامیم هرگاه نقشهٔ (φ,U) وجود داشته باشد که $x\in U$ و $\varphi(x)$ یک نقطهٔ مرزی منظم $\varphi(W\cap U)$ باشد. مرز W را منظم می‌نامیم در صورتی که هر نقطهٔ آن منظم باشد.

مثال: گوی باز $0<|z|<1$ در صفحه را در نظر بگیرید. در اینجا نقاط z که $|z|=1$ نقاط مرزی منظم

(۳)

هستند ولی $z=0$ یک نقطه‌ی مرزی منتظم نیست. در مورد حوزه‌ی باز

$$U=\{z \mid |z|<1,\ z\neq iy,\ 0\leq y<1\}$$

نقاط z که $|z|=1$ منتظم هستند ولی نقاط iy که $0\leq y<1$ منتظم نیستند. اگر حوزه‌ی باز U به گونه‌ای باشد که $\bar U$ یک زیرخمینه‌ی دوبعدی لبه‌دار $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ است، آنگاه ∂U منتظم است.

حل مسأله دیریشله. فرض کنید Y یک رویه‌ی ریمانی است و $X\subset Y$ یک زیررویه‌ی بازی از Y که ∂X منتظم است. اگر $f:\partial X\to[m,M]$ پیوسته باشد، $m,M\in\mathbb{R}$، آنگاه تابعی پیوسته $\tilde f: \bar X\to[m,M]$ وجود دارد که با f در ∂X برابر است و روی X هارمونیک است.

اثبات. $\mathcal{F}$ را خانواده‌ی تابع‌های پیوسته‌ی $g:\bar X\to[m,M]$ می‌گیریم که $g\leq f$ روی ∂X و g در X زیرهمساز است. $\mathcal{F}$ تهی نیست زیرا تابع ثابت با مقدار m در $\mathcal{F}$ است. $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی پرون کامل است، پس تابع $\tilde f=\sup\mathcal{F}$ در درون X هارمونیک است. باید نشان دهیم که $\tilde f$ با f در ∂X برابر است و $\tilde f$ پیوسته است (در ∂X). این حکم موضعی است بنابراین می‌توان با گرفتن یک نقشه حول نقطه‌ی $x\in\partial X$ موضوع را به $\mathbb{C}$ منتقل کرد. به این ترتیب اگر (z,U) نقشه‌ای حول x باشد، کافی است U را محدود کنیم و فرض کنیم $U\subset\mathbb{C}$. چون x منتظم فرض شده است، گوی $B_r(c)$ وجود دارد که $\overline{B_r(c)}\cap\bar X=\{x\}$. دنباله‌ای (x_n) از نقاط روی شعاع از c به x در نظر می‌گیریم که به طور یکنوا به x میل می‌کند، $x_n\to x$. به ازای هر n و هر $\varepsilon>0$، تابع $h_{n,\varepsilon}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_{n,\varepsilon}:\bar X\longrightarrow\mathbb{R},\quad h_{n,\varepsilon}(z)=\sup\left\{m,\ \log\left|\frac{x-x_n}{z-x_n}\right|+f(x)-\varepsilon\right\}$$

توجه کنید که در اینجا x، ε و n ثابت هستند و طبق توضیحات آخر صفحه‌ی قبل، تابع $\log\left|\frac{x-x_n}{z-x_n}\right|$، به عنوان تابع z، هارمونیک است، در $z=x$ مقدارش صفر است و در سایر نقاط $z\in\bar X$ منفی می‌باشد. نتیجه اینکه $h_{n,\varepsilon}$ زیرهمساز و در خانواده‌ی $\mathcal{F}$ است. وقتی z از x به اندازه‌ی کافی دور باشد، مقدار تابع برابر m خواهد بود، و مقدار تابع هیچگاه از $M-\varepsilon$ بیشتر نمی‌شود.

فرض کنید $\eta>0$ داده شده است. قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}\eta$ و را آنقدر نزدیک به x می‌گیریم که

$$|z-x|<\delta_1 \Rightarrow 0\geq\log\left|\frac{x-x_n}{z-x_n}\right|\geq-\frac{1}{2}\eta$$

در این صورت خواهیم داشت

$$|z-x|<\delta_1 \Rightarrow h_{n,\varepsilon}(z)\geq f(x)-\eta$$

چون $h_{n,\varepsilon}\in\mathcal{F}$ و $\tilde f=\sup\mathcal{F}$، داریم:

$$(1)\qquad |z-x|<\delta_1 \Rightarrow \tilde f(z)\geq f(x)-\eta$$

به همین ترتیب برای n و ε ثابت، تابع $k_{n,\varepsilon}:\bar X\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_{n,\varepsilon}(z)=\inf\left\{M,\ \ln\left|\frac{z-x_n}{x-x_n}\right|+f(x)+\varepsilon\right\}$$

مجدداً فرض می‌کنیم $\varepsilon=\frac{1}{2}\eta$ و δ_2 را طوری می‌گیریم که

$$|z-x|<\delta_2 \Rightarrow 0\le \log\left|\frac{z-x_n}{x-x_n}\right|<\frac{1}{2}\eta$$

بنابراین

$$|z-x|<\delta_2 \Rightarrow k_{n,\varepsilon}(z)\le f(x)+\eta$$

از طرفی دیگر تابع‌های $k_{n,\varepsilon}$ زیرهمساز هستند در دیسک ∂x بزرگتر یا مساوی f می‌باشند، بنابراین برای هر تابع خانواده زیرهمساز $\mathcal{F}$ باشد و داریم

$$|z-x|<\delta_2 \Rightarrow g(z)<f(x)+\eta$$

درنتیجه برای $\tilde{f}=\sup_{f\in\mathcal{F}} f$ نیز:

$$(2)\qquad |z-x|<\delta_2 \Rightarrow \tilde{f}(z)\le f(x)+\eta$$

با گرفتن $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$، از (1) و (2) نتیجه حاصل می‌گردد که $\lim_{z\to x}\tilde{f}(z)=f(x)$. □

تمرین ۲ برای هر یک از دو ناحیه زیر تابعی پیوسته روی مرز مثال بزنید که قابل توسیع به صورت هارمونیک روی ناحیه نباشد.

الف) $\mathbb{D}^{\times}=\{z\in\mathbb{D}\mid z\neq 0\}$

ب) $U=\mathbb{D}\cup\{iy\mid 0\le y\le 1\}$

به سراغ قضیه رادو:

لم ۱ X و Y فضای توپولوژیک و $f:X\to Y$ تابعی پیوسته، باز و پوشا. اگر X از نوع SC (دارای پایه شمارش‌پذیر) باشد، Y نیز SC است.

برهان: اگر $\mathcal{U}$ یک پایه شمارا برای توپولوژی X باشد، خانواده $\{f(A)\mid A\in\mathcal{U}\}$ را به $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم و نشان می‌دهیم $\mathcal{B}$ یک پایه (شمارا) برای توپولوژی Y است. به دلیل باز بودن f، اعضای $f(A)$ها همه در Y باز خواهند بود. اگر $y\in Y$ و V یک همسایگی باز حول y باشد، $f^{-1}(V)$ در X باز است، پس عضوی $A\in\mathcal{U}$ وجود دارد که $x\in A\subset f^{-1}(V)$ (که در اینجا $f(x)=y$، x وجود دارد چون f پوشا است).
حال $f(A)\in\mathcal{B}$ و $y\in f(A)\subset V$. □

لم ۲ (پوانکاره-ولتالی) X: خمینه توپولوژیک همبند (بدون شرط SC) و Y فضای توپولوژیک هاسدورف SC. چنانچه نگاشتی پیوسته و گسسته $f:X\to Y$ وجود داشته باشد، X لزوماً SC است.

توضیح کلمه «گسسته» در مقابل «پیوسته» نیست، $f:X\to Y$ را گسسته می‌نامیم هرگاه برای هر $y\in Y$، مجموعه $f^{-1}(y)$ یک زیرمجموعه گسسته X باشد، یعنی اگر $x\in f^{-1}(y)$، یک همسایگی باز U در X هست که $U\cap f^{-1}(y)=\{x\}$.

<u>برهان</u>. $\mathcal{B}$ را یک پایه‌ی شمارا برای Y می‌گیریم و $\mathcal{U}$ را مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های U از X که در هر دو شرط زیر صدق کنند:

(i) U یک مؤلفه‌ی همبندی $f^{-1}(B)$ است که $B \in \mathcal{B}$.

(ii) U به عنوان زیرفضای X از نوع SC است.

توجه کنید که هر خمینه‌ی توپولوژیک موضعاً همبند است، پس مؤلفه‌های همبندی، علاوه بر بسته بودن، باز نیز هستند. بدین ترتیب هر U واجد شرط (i) یک زیرمجموعه‌ی باز در X است. ادعا می‌کنیم $\mathcal{U}$ یک پایه‌ی شمارا برای X است. نخست برای پایه بودن $\mathcal{U}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید W یک زیرمجموعه‌ی باز X است و $x \in W$. باید عضوی $A \in \mathcal{U}$ پیدا کنیم که $x \in A \subset W$. از آنجا که $f^{-1}(f(x))$ گسسته است مجموعه‌ی باز W' وجود دارد که $x \in W' \subset W$ و $W' \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. هر خمینه‌ی توپولوژیک موضعاً فشرده است و هر فضای توپولوژیک هاسدورف و موضعاً فشرده، همسایگی‌های به دلخواه کوچک فشرده دارد، به طور دقیق‌تر: برای x داده شده و مجموعه‌ی باز W'، مجموعه‌ی باز V با بستار فشرده‌ی $\bar{V}$ وجود دارد که $x \in V \subset \bar{V} \subset W'$. $\partial \bar{V}$ نیز بسته و فشرده است و $\partial \bar{V} \cap f^{-1}(f(x))$ تهی است. بدین ترتیب $f(\partial \bar{V})$ نیز فشرده، پس بسته، است، و $f(x) \notin f(\partial V)$ در حالی که $f(x) \in f(V)$. بنابراین عضوی پایه‌ای $B \in \mathcal{B}$ وجود دارد که از طرفی $f(x) \in B$ و از طرف دیگر $B \cap f(\partial V) = \phi$. U را برابر آن مؤلفه‌ی همبندی از $f^{-1}(B)$ می‌گیریم که $x \in U$. ادعا می‌کنیم که U به عنوان زیرفضای X از نوع SC است. ~~دلیل این است~~
~~که اولاً U زیرمجموعه‌ی فضای فشرده‌ی $\bar{V}$ است، ثانیاً هر خمینه‌ی توپولوژیک فشرده است و ثانیاً هر~~
~~فضای توپولوژیک فشرده SC است (زیرا از هر پوشش باز آن زیرپوششی متناهی دارد و گوی‌های ... تشکیل پایه می‌دهند)~~

زیرا $U \cap \partial \bar{V} = \phi$. بنابراین U زیرمجموعه‌ی باز $\bar{V}$ است و از آنجا زیرمجموعه‌ی بازی از فضای SC

زیرمجموعه تشکیل پایه می‌دهند). بدین ترتیب U شرایط عضویت در $\mathcal{U}$ را دارد. تا اینجا ثابت کرده‌ایم که $\mathcal{U}$ یک پایه برای توپولوژی X است زیرا که W و x دلخواه بوده‌اند و ثابت کرده‌ایم که $x \in U \subset \bar{V} \subset W$. می‌ماند نشان دهیم که $\mathcal{U}$ شمارا است. نخست نشان می‌دهیم که برای هر عضو $A \in \mathcal{U}$، A با فقط تعدادی شمارا از اعضای $\mathcal{U}$ اشتراک ناتهی دارد. چون A خود SC است و ثابت کرده‌ایم که $\mathcal{U}$ یک پایه برای توپولوژی X است، A اجتماع تعدادی شمارا از اعضای $\mathcal{U}$ است (بنابر قضیه‌ی Lindelöf در توپولوژی عمومی). از طرفی دیگر برای هر $B \in \mathcal{B}$ و هر $A \in \mathcal{U}$، $A \cap f^{-1}(B)$ یک زیرمجموعه‌ی باز در X است که توسط مؤلفه‌های همبندی $f^{-1}(B)$ پوشش داده شده است. چون $A \cap f^{-1}(B)$ فضای SC است، طبق قضیه‌ی Lindelöf این پوشش دارای زیرپوششی شمارا است، پس A حداکثر تعدادی شمارا از مؤلفه‌های $f^{-1}(B)$ را قطع می‌کند. در ضمن چون $\mathcal{B}$ شمارا است، نتیجه می‌شود که A با فقط تعدادی شمارا از اعضای $\mathcal{U}$ اشتراک ناتهی دارد. اکنون یک عضو $A^* \in \mathcal{U}$ را ثابت می‌کنیم. آن اعضای A از $\mathcal{U}$ را در نظر می‌گیریم که دنباله‌ای $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ از عناصر $\mathcal{U}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که:

$$A_0 = A^*, \quad A_n = A, \quad A_i \cap A_{i-1} \neq \phi, \quad i = 1, \dots, n$$

$X' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} A$ باز است چون اجتماع مجموعه‌های باز است. بکمک این، می‌بینیم $X - X'$ نیز باز است زیرا هر عضو $X - X'$، مانند x، در یک $A \in \mathcal{A}$ قرار دارد و طبق تعریف $A \cap X' = \phi$. ولی X همبند فرض شده است پس $X' = X$. بدین ترتیب کافی است نشان دهیم هر $\mathcal{A}_n$ شمارا است که این با استقرا نتیجه می‌شود: اگر شمارا بودن $\mathcal{A}_k$ ثابت شده باشد، طبق آنچه قبلاً ثابت کردیم، هر عضو $\mathcal{A}_k$ با فقط تعدادی شمارا عضو $\mathcal{A}$ اشتراک ناتهی دارد، پس $\mathcal{A}_{k+1}$ نیز شمارا است، و اثبات به اتمام می‌رسد. □

قضیه Rado هر رویه ریمانی هاسدورف ویژگی SC را نیز دارا است.

برهان. X را یک رویه ریمانی (هاسدورف) و U را یک دایره مختصاتی می‌گیریم، (U, z) نقشه. K_0 و K_1 دو زیرمجموعه بسته مجزا از U را در نظر می‌گیریم که هر یک نقش یک گوی بسته در $\mathbb{C}$ تحت z است. بدین ترتیب مرز $Y = X-(K_0 \cup K_1)$ منتظم است. پس تابعی پیوسته $f: \bar{Y} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که f در Y هارمونیک است و $f|_{\partial K_0} \equiv 0$ و $f|_{\partial K_1} \equiv 1$. چون f هارمونیک است (در درون Y)، $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ (بطور موضعی) تحلیلی است، یعنی $\frac{\partial f}{\partial z}$ تحلیلی است. این ۱-فرم را با ω نمایش می‌دهیم. فرض کنید $p: \tilde{Y} \to Y$ پوشش جامع Y است. چون $\tilde{Y}$ ساده همبند است، $p^*\omega$ یک ۱-فرم دقیق است، یعنی تابعی هلومورف $F: \tilde{Y} \to \mathbb{C}$ وجود دارد که $p^*\omega = dF$. F ثابت نیست زیرا که $\omega \neq 0$ (f ثابت نیست زیرا روی ∂K_0 و ∂K_1 مقادیر مختلف می‌گیرد). پس تابع هلومورف F ناثابت است و از لم ۲ نتیجه می‌گیریم که رویه $\tilde{Y}$ یک رویه SC است. حال لم ۱ نشان می‌دهد که Y نیز SC است. پس $X = Y \cup U$ نیز SC می‌باشد. □

از قضیه بالا و کلیه خمینه‌های SC در بسیاری از موارد "قضیه افراز واحد" نتیجه می‌شود که خانواده‌های (U_i)، شمارا، موضعاً متناهی (هر نقطه باز با فقط تعدادی متناهی از U_i اشتراک ناتهی دارد) وجود دارد که بستار هر U_i فشرده است، و به ازای هر n، تابع C^∞ مانند $\theta_n : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $\mathrm{Supp}\,\theta_i \subset U_i$ و $\sum_i \theta_i \equiv 1$.

یادآوری می‌کنیم که اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $\theta : X \to \mathbb{R}$ را سره می‌نامیم (proper) هرگاه به ازای هر زیرمجموعه فشرده K از $\mathbb{R}$، $\theta^{-1}(K)$ فشرده باشد.

نتیجه. برای هر رویه ریمانی X، تابعی C^∞ و سره $\theta : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد.

برهان. اگر X فشرده باشد که هر تابع پیوسته $X \to \mathbb{R}$ سره است. اگر X فشرده نباشد، از افراز واحد مانند بالا (θ_i) در نظر بگیرید و قرار دهید $\theta = \sum n \theta_n$. چون خانواده (U_i) موضعاً متناهی است، این جمع در هر نقطه یک جمع متناهی است و سره بودن از اینکه $\theta_i \geq 0$ و $\mathrm{Supp}\,\theta_i$ فشرده است حاصل می‌شود. □

<u>قضیه</u> فرض کنید X یک رویه‌ی جهت‌پذیر (همبند) نافشرده است و $H^1(X,\mathbb{R})=0$. نقطه‌ای $x_0\in X$ به‌عنوان پایه در نظر بگیرید. در این صورت دنباله‌ای $X_0\subset X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X$ از زیررویه‌های X وجود دارد که:

(i) هر X_n زیرمجموعه‌ای همبند، فشرده از X است و $H^1(X_n,\mathbb{R})=0$.

(ii) $x_0\in X_0$ و هر X_n در درون X_{n+1} قرار دارد.

(iii) $\bigcup X_n=X$

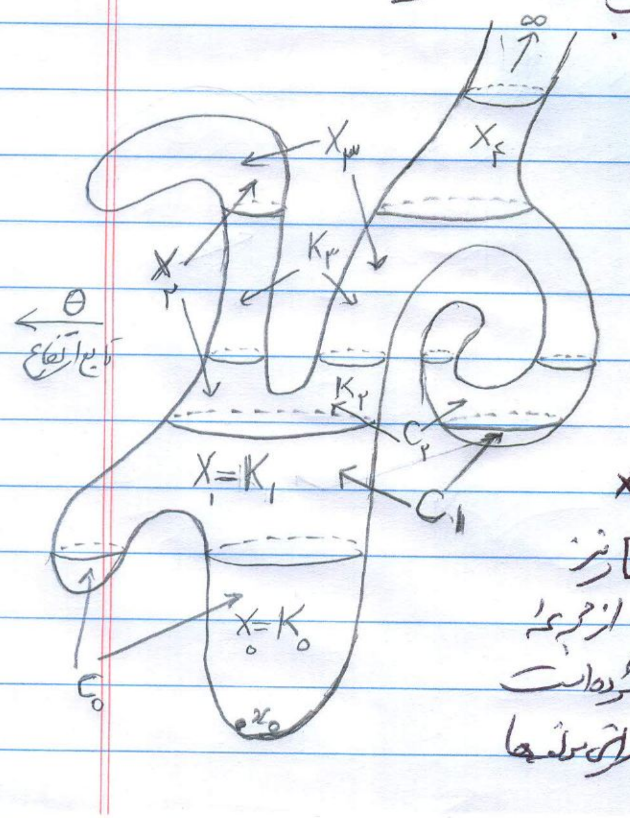
<u>اثبات</u> با توجه به نافشرده بودن X و سره بودن θ و حقیقی بودن، دنباله‌ای (a_n) از نقاط در یک θ وجود دارد که $a_0<a_1<a_2<\cdots$ و $a_n\to+\infty$. می‌توان فرض کرد که $\theta(x_0)<a_0$. هر مجموعه $C_n=\theta^{-1}[0,a_n]$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی C^∞ است. مؤلفه‌ی همبندی x_0 در C_n را به K_n نشان می‌دهیم. به این ترتیب یک زیرخمینه‌ی ناافشرده C^∞ از X است که به علاوه همبند نیز می‌باشد.

(۱) ادعا می‌کنیم $\bigcup K_n=X$. نشان می‌دهیم $\bigcup K_n$ در X باز و بسته است. فرض کنید که هر K_n در درون K_{n+1} قرار دارد. پس اگر $x\in K_n$، اگر x نقطه‌ی درونی K_n باشد که نقطه‌ی درونی $\bigcup K_n$ نیز هست، و اگر نقطه‌ی مرزی K_n باشد، نقطه‌ی درونی K_{n+1} و نیز $\bigcup K_n$ خواهد بود. در نتیجه $\bigcup K_n$ باز است. برای بسته بودن، فرض کنید دنباله‌ای (x_k) در $\bigcup K_n$ هست که $x_k\to x^*\in X$. در این صورت $x^*\in C_j$ برای و مناسب. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

پس N وجود دارد که $x_i\in C_{N+1}$ برای $i>N$، و در نتیجه $x_i\in K_{N+1}$، و بنابراین بسته است. ~~$\bigcup K_n = X$~~

(۲) <u>مجموعه K_n</u> را از اجتماع K_n با اجتماع تمام مؤلفه‌های همبندی $X-K_n$ در نظر می‌گیریم که بستار آنها فشرده است، و آن را با X_n نمایش می‌دهیم. ادعا می‌کنیم X_n فشرده و همبند است.



فرض کنید Y یک مؤلفه‌ی همبندی $X-K_n$ است. Y در $X-K_n$ هم باز و هم بسته است (چون $X-K_n$ یک خمینه است، زیرمجموعه‌ی باز X). ولی $X-K_n$ در X باز است، پس Y در X باز است. حال ~~[illegible]~~

اگر $\bar{Y}\cap K_n=\phi$ (بستار Y در X)، چون $\bar{Y}$ نیز همبند است، $Y=\bar{Y}$ و Y یک زیرمجموعه‌ی باز و بسته از X می‌شود که با همبند بودن X متناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر مؤلفه‌ی همبندی Y از $X-K_n$ داریم $\bar{Y}\cap K_n\neq\phi$. حال $\varepsilon>0$ را طوری می‌گیریم که بازه‌ی $[a_n-\varepsilon,a_n]$ شامل هیچ مقدار بحرانی θ نباشد و K_n' را مؤلفه‌ی همبندی شامل x_0 از مجموعه‌ی $\theta^{-1}[0,a_n']$ می‌گیریم که $a_n-\varepsilon<a_n'<a_n$. چون ∂K_n فشرده است و مؤلفه‌های همبندی $X-K_n'$ (بازند) دو به دو جدا، فقط تعداد متناهی از این مؤلفه‌ها

با ∂K_n اشتراک دارند. این برگه‌ها را با $V_1, \ldots, V_\ell$ نمایش می‌دهیم. داریم:

$$X_n = K_n \cup \overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_\ell}$$

که نشان می‌دهد X_n فشرده و همبند است.

(۳) ثابت می‌کنیم $H^1(X_n,\mathbb{R})=\{0\}$. نخست نشان می‌دهیم که اگر Z بستار یک برگهٔ $X-X_n$ در X باشد، آنگاه ∂Z همبند است، یعنی در واقع یک خم سادهٔ بستهٔ هموار است. اگر ∂Z همبند نباشد، دست کم دو خم بسته، به شمارهٔ γ_1 و γ_2 در $\theta^{-1}(a_n)$ قرار خواهد داشت. تصویر این دو خم در X_n و در بستار $X-X_n$ قرار دارد، پس خم‌های δ_1 و δ_2 چنان یافت که تصویر یکی در X_n و تصویر دیگری در $X-X_n$ است و $\delta_1 . \delta_2$ یک خم بسته است که از نقطه‌ای p_1 روی تصویر γ_1 و از نقطه‌ای p_2 روی تصویر γ_2 می‌گذرد و این دو نقطه تنها نقاط اشتراک δ_1, δ_2 با اجتماع تصاویر γ_1 و γ_2 هستند. چون a_n یک مقدار عادی برای θ است، یک "همسایگی لوله‌ای" γ_1 در X وجود دارد، یعنی تصویر یک دیفئومرفیسم از $]-\varepsilon, \varepsilon[\times S^1$ به X به گونه‌ای که دایرهٔ $\{0\} \times S^1$ به تصویر γ_1 نگاشته می‌شود و $]-\varepsilon,\varepsilon[$ در جهت متقاطع با آن قرار می‌گیرد. روی تصویر $]-\varepsilon,\varepsilon[$ مختص t را انتخاب می‌کنیم و تابعی (با محمل فشرده) C^∞ مانند α در نظر می‌گیریم که محمل آن در تصویر $]-\varepsilon,\varepsilon[$ قرار گیرد و $\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(t)dt = 1$. با توسیع $\alpha(t)dt$ با صفر به بیرون همسایگی لوله‌ای، یک ۱-فرم بسته روی X حاصل می‌شود که انتگرال آن روی خم بستهٔ $\delta_1 . \delta_2$ صفر نیست، و این با فرض $H^1(X,\mathbb{R})=\{0\}$ در تناقض است. بنابراین ∂Z همبند است.

اکنون نشان می‌دهیم که در واقع $X-X_n$ همبند است، یا چون Z بالا دلخواه بوده است، که Z مانند بالا بستار یک برگهٔ همبندی $X-X_n$ می‌باشد. طبق آنچه ثابت شد، بستار هر مؤلفهٔ همبندی $X-X_n$ با X_n در یک خم بستهٔ سادهٔ هموار اشتراک دارد. چون θ سره است و a_n یک مقدار عادی است، تعداد این مؤلفه‌های همبندی باید متناهی باشد (تعداد خم‌های سادهٔ بسته که $\theta^{-1}(a_n)$ را تشکیل می‌دهند متناهی است).

بنابراین فرض کنید علاوه بر Z، مؤلفه‌های همبندی دیگری با بستارهای $Z_1, \ldots, Z_k$ وجود دارند و اشتراک Z_j با $X-X_n$ خم بستهٔ سادهٔ γ_j است. $X_n \cup Z$ را به X' و $\bigcup_{j=1}^{k} Z_j$ را به X'' نمایش می‌دهیم. پس $X = X' \cup X''$ و دنبالهٔ Mayer-Vietoris به صورت زیر دقیق است:

$$\ldots \to H^1(X,\mathbb{R}) \to H^1(X',\mathbb{R}) \oplus H^1(X'',\mathbb{R}) \to H^1(X'\cap X'',\mathbb{R}) \to H^2(X,\mathbb{R}) \to \ldots$$

چون X یک خمینهٔ دوبعدی نافشرده است، $H^2(X,\mathbb{R})=\{0\}$، و طبق فرض $H^1(X,\mathbb{R})$ نیز صفر است، بنابراین

$$H^1(X',\mathbb{R}) \oplus H^1(X'',\mathbb{R}) \cong H^1(X'\cap X'',\mathbb{R})$$

$X' \cap X''$ اجتماع مجزای تصاویر $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ است، پس $H^1(X'\cap X'',\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^k$، که طبق فرض $k \geq 1$.
X'' نیز اجتماع مجزای $Z_1, \ldots, Z_k$ است، پس $H^1(X'',\mathbb{R})$ جمع مستقیم k فضای برداری حقیقی $H^1(Z_j,\mathbb{R})$ است. نتیجه اینکه دست کم یکی از $H^1(X',\mathbb{R})$ یا یکی از $H^1(Z_j,\mathbb{R})$ ها باید صفر نباشد، ولی این با لم کلی توپولوژیک زیر در تناقض است:

٩

لم اگر M یک خمینهٔ دوبعدی همبند فشرده جهت‌دار با لبهٔ ناتهی باشد، آنگاه $H^1(M,\mathbb{R})\neq\{0\}$.

اثبات لبهٔ M از اجتماع تعدادی متناهی خم بستهٔ سادهٔ $C_1,\dots,C_p$ (اجتماع مجزا) تشکیل شده است. هر C_i مرز یک دیسک بستهٔ B_i است. اجتماع B_iها را B بنامید. دنبالهٔ Mayer-Vietoris را می‌نویسیم:

$$\to H^1(M\cup B,\mathbb{R})\to H^1(M,\mathbb{R})\oplus H^1(B,\mathbb{R})\to H^1(M\cap B,\mathbb{R})\to H^2(M\cup B,\mathbb{R})\to\cdots$$

داریم $H^2(M\cup B,\mathbb{R})=\{0\}$ و $H^1(M\cap B,\mathbb{R})$ جمع مستقیم $H^1(C_i,\mathbb{R})$ هاست، پس یکریخت با $\mathbb{R}^p$ است که $p\geq 1$ چون M دارای لبهٔ ناتهی فرض شده است. از طرفی دیگر $H^1(B,\mathbb{R})=\{0\}$ چون B (اجتماع مجزای) دیسک‌های بسته است، پس دنبالهٔ دقیق $H^1(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^p\to\{0\}$ حاصل می‌شود با $p\geq 1$، که نشان می‌دهد $H^1(M,\mathbb{R})\neq\{0\}$. □

می‌توان ترتیب داد که $X=X_n\cup Z$ و $X_n\cap Z$ از خم بستهٔ ساده تشکیل شده است. دنبالهٔ دقیق Mayer-Vietoris را برای زوج (X_n,Z) می‌نویسیم:

$$\cdots\to H^1(X,\mathbb{R})\to H^1(X_n,\mathbb{R})\oplus H^1(Z,\mathbb{R})\to H^1(X_n\cap Z,\mathbb{R})\to H^2(X,\mathbb{R})\to\cdots$$

چون $H^2(X,\mathbb{R})=\{0\}$، $H^1(X,\mathbb{R})=\{0\}$ طبق فرض، در نتیجه

$$H^1(X_n,\mathbb{R})\oplus H^1(Z,\mathbb{R})\cong H^1(X_n\cap Z,\mathbb{R})$$

حاصل می‌شود. چون $H^1(X_n\cap Z,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$، پس یکی از $H^1(X_n,\mathbb{R})$ یا $H^1(Z,\mathbb{R})$ باید صفر باشد. طبق لم بالا $H^1(Z,\mathbb{R})\neq\{0\}$، پس لزوماً $H^1(X_n,\mathbb{R})$ صفر است و حکم به اثبات می‌رسد.

در همین مرحله می‌توان ماهیت توپولوژیک X_nها را تشخیص داد.

لم اگر M یک خمینهٔ دوبعدی همبند با لبهٔ همبند، فشرده، جهت‌پذیر، با لبهٔ ناتهی باشد که $H^1(M,\mathbb{R})=\{0\}$، آنگاه M با $\overline{D}$ دیفئومورف است.

اثبات طبق کلاسه‌بندی خمینه‌های دوبعدی لبه‌دار، $H^2(M,\mathbb{R})=\{0\}$، پس چون $H^1(M,\mathbb{R})=\{0\}$ فرض شده است، مشخصهٔ اویلر M برابر بعد $H^0(M,\mathbb{R})$ است که برابر 1 است (M همبند فرض شده است). حال به double خمینهٔ لبه‌دار M که $\hat{M}$ می‌نامیم که مشخصهٔ اویلر آن باید ۲ باشد (چون لبهٔ M با دایره همسانریخت است پس مشخصهٔ اویلر صفر دارد). تنها خمینهٔ دوبعدی فشردهٔ بی‌لبهٔ جهت‌پذیر با مشخصهٔ اویلر ۲ کرهٔ دوبعدی است و طبق تعریف double حذف لبهٔ M از این کره، کره را به دو قسمت که هر یک همسانریخت با $\overline{D}$ است تجزیه خواهد کرد. □

نکتهٔ تکنولوژیک: در واقع با استفاده از دنبالهٔ مایر-ویتوریس می‌توان نشان داد فرض همبند بودن لبه در لم بالا اضافه است و از $H^1(M,\mathbb{R})=\{0\}$ نتیجه می‌شود، ولی چون در استدلال قبل ثابت شده بود لبهٔ X_n فقط از یک خم بستهٔ ساده تشکیل شده است، این مطلب را فرض کردیم.

تمرین برای کسی که توپولوژی جبری می‌داند: ادعای بالا را ثابت کنید.

تابع گرین

به قسمت (الف) تمرین ۲ نگاه کنید. اگر تابعی پیوسته $h:\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ داده شده باشد دیدیم h را به تابعی پیوسته $\tilde{h}:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ توسیع دهیم به گونه‌ای که $\tilde{h}$ در $\mathbb{D}^{\times}=\{z\in\mathbb{D} \mid z\neq 0\}$ هارمونیک باشد، این مسئله جواب ندارد مگر اینکه $h(0)$ مقدار خاصی باشد که توسط تحدید h به $\{|z|=1\}$ تحمیل می‌شود. دلیل این است که اگر $\tilde{h}$ در 0 پیوسته باشد، $\tilde{h}$ در همسایگی محذوف 0 کراندار است و در نتیجه 0 تکینگی برداشتنی برای تابع هارمونیک $\tilde{h}$ است، و به ترتیب طبق جواب مسئله دیریکله برای $\mathbb{D}$، مقادیر h در $\{|z|=1\}$، مقدار $\tilde{h}$ در 0 را تعیین خواهد کرد (میانگین مقادیر h روی $|z|=1$). بنابراین در حالت کلی مسئله دیریکله برای $\mathbb{D}^{\times}$ و مرز آن حل ندارد. ساده‌ترین تابع هارمونیک روی $\mathbb{D}^{\times}$ تابع $-\log|z|$ (قسمت حقیقی "تابع تحلیلی" $-\log z$) باشد که روی $\{|z|=1\}$ مقدار ثابت 0 را دارد و روی $\mathbb{D}^{\times}$ مثبت است. وقتی $z\to 0$ مقدار تابع به $+\infty$ میل می‌کند ولی ضعیف‌تر از هر یک از $\frac{1}{|z|^{\alpha}}$، $\alpha>0$. تعمیم این وضعیت به رویه‌های ریمانی لبه‌دار، به گونه‌ای که فقط یک نقطه‌ی تکینی مرزی وجود داشته باشد و مقدار تابع هارمونیک وقتی به این نقطه نزدیک می‌شویم به صورت لگاریتمی به $+\infty$ میل کند تابع گرین است که به زودی به طور دقیق ارائه خواهیم کرد. نخست تعمیم به ناحیه‌های داخل $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید W زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است که ∂W منظم است و نقطه‌ای $z_0\in W$ در نظر بگیرید. تابع $\ln|z-z_0|$ در $W-\{z_0\}$ هارمونیک و مثبت است. چون ∂W منظم فرض شده است مسئله دیریکله برای $\overline{W}$ با شرط مرزی $h(z)=-\ln|z-z_0|$ روی ∂W جواب یکتای $\tilde{h}$ را دارد. حال اگر تابع پیوسته‌ی $(\tilde{h}(z)+\ln|z-z_0|)$ روی ∂W را در نظر بگیریم، این تابع روی ∂W صفر است، روی $W-\{z_0\}$ هارمونیک، و وقتی $z\to z_0$، تابع

$$-(\tilde{h}(z)+\ln|z-z_0|)+\ln(z-z_0)$$

در همسایگی z_0 کراندار است، یعنی تکینگی در $z=z_0$ لگاریتمی است و توسط $\ln|z-z_0|$ خنثی می‌شود.

تعریف ۲ ~~[illegible]~~ X رویه‌ای است، X زیرمجموعه‌ای باز از Y که ∂X منظم است، و نقطه‌ای $x_0\in X$ داده شده است. مقصود از یک تابع گرین $G:\overline{X}-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و دارای شرایط زیر است:

(i) تحدید G به ∂X صفر است و G در $X-\{x_0\}$ مثبت است.

(ii) G در $X-\{x_0\}$ هارمونیک است.

(iii) برای نقشه‌ای (U,ξ) حول x_0 که $\xi(x_0)=0\in\mathbb{C}$ می‌باشد، $G+\log|\xi|$ در همسایگی x_0 کراندار است.

قضیه اگر Y، X و x_0 مانند بالا باشند یک تابع گرین $G:\overline{X}-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ وجود دارد.

برهان نقشه‌ی (U,ξ) حول x_0 را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\xi(U)$ شامل $\mathbb{D}$ در $\mathbb{C}$ باشد و $\xi(x_0)=0$. خانواده‌ی تابع‌های پیوسته و مشتق‌پذیر روی $X-\{x_0\}$ را در نظر می‌گیریم که g زیرهارمونیک باشد و $g+\ln|\xi|$ در همسایگی x_0 کراندار باشد. این خانواده تهی نیست زیرا که تابع $\sup\{0,-\ln|\xi|\}$ عضو آن است.

اثبات: خانواده شرایط خانواده پرون را دارد به استثنای کراندار بودن. با این حال می‌خواهیم ثابت کنیم که کوچکترین کران بالای خانواده وجود دارد و هارمونیک است. چون هارمونیک بودن یک خاصیت موضعی است، کافی است ثابت کنیم که برای هر نقطهٔ $X-\{x_0\}$، تحدید خانواده به یک همسایگی این نقطه کراندار است و در نتیجه کوچکترین کران بالای تحدیدها خانواده به این همسایگی یک تابع هارمونیک خواهد بود. برای این منظور تابع زبرهمساز (superharmonic) $k: X-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ خواهیم ساخت که روی ∂X مقدار صفر دارد و در نتیجه (!) خانواده تابع‌های زیرهمساز که روی ∂X صفر هستند یک کران بالایی خواهد بود. در ناحیه $X-\{z\in X \mid |\zeta(z)|<\frac{1}{2}\}$ منظم است، پس تابع هارمونیک h روی آن وجود دارد که به طور پیوسته به مقدار ثابت صفر روی مرز ∂X و به مقدار ثابت 1 روی $\{z\in X \mid |\zeta(z)|=\frac{1}{2}\}$ میل می‌کند. بنابر اصل ماکزیمم مقدار h اکیداً بین 0 و 1 است. ماکزیمم h را روی $\{z\in X \mid |\zeta(z)|=1\}$ را به c نشان می‌دهیم، $0<c<1$. اعداد مثبت A و B را چنان می‌یابیم که:

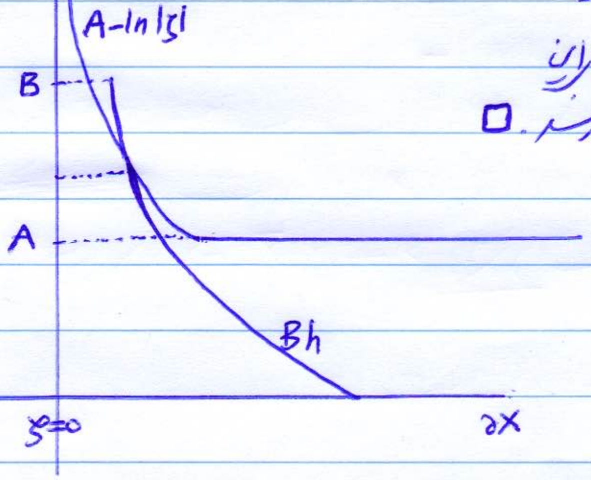
$$c < \frac{A}{B} < 1 - \frac{\ln 2}{B} < 1$$

(کافی است $\frac{a}{b}$ را طوری بگیریم که $c<\frac{a}{b}<1$، سپس a و b را در عددی به اندازه کافی بزرگ ضرب کنیم.)

تابع $k: X-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k=\inf\{Bh, A-\ln|\zeta|\}$$

(بیرون $\{z\in X \mid |\zeta(z)|\le 1\}$ مقدار $A-\ln|\zeta|$ را برابر A قرار می‌دهیم.)



همانطور که قبلاً دیدیم $\sup$ دو تابع زیرهمساز (یا همساز) یک تابع زیرهمساز است، و به همین شکل، $\inf$ دو تابع همساز، یک تابع زبرهمساز می‌باشد، بنابراین k زبرهمساز است و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد. □

~~با اطلاعات بالا برای ناحیه X_n (صفحه ۷) تابع گرین $G: X_n-\{0\}\to\mathbb{R}$ وجود دارد به گونه‌ای که $G+\ln|z|$ روی $X_n^*=X_n-\{0\}$ هارمونیک است. اگر~~

~~$\omega=-d'G=-\frac{\partial G}{\partial z}dz$ (فرم دیفرانسیل)~~

~~یک فرم هولومورف است (روی X_n^*). $G(z)=-\ln|z|+h(z)$ ... که در آن $h(z)$ تابع هارمونیک است. با توجه به اینکه $H=\frac{\partial h}{\partial z}$ ... هولومورف است و $\frac{\partial}{\partial z}\ln|z|=\frac{1}{2z}$، داریم:~~

اکنون قضیهٔ ثابت شده را برای X_n و نقطهٔ پایه‌ای x_0 بکار می‌گیریم. بدین ترتیب تابع گرین $G:\overline{X}_n-\{x_0\}\to\mathbb{R}$ با شرایط ذکر شده وجود دارد. گوی باز مختصاتی U حول x_0 را منظور می‌کنیم به گونه‌ای که در این مختصات می‌توان نوشت:

$$z\in U-\{0\}\,,\quad G(z)+\log|z|=h(z)$$

که در اینجا نقطهٔ x_0 با مختصه 0 مشخص شده است و h یک تابع حقیقی هارمونیک است که در سراسر U تعریف شده است. در این گوی، h دارای مزدوج هارمونیک $\tilde{h}$ است، پس $h+i\tilde{h}$ هلومورف است. اگر z نقطه‌ای در $U-\{0\}$ باشد و V یک گوی باز به مرکز z که $0\notin V\subset U$، تابعی مانند $\theta:V\to\mathbb{R}$ وجود دارد که مزدوج هارمونیک $\log|z|$ است ($\log z=\log|z|+i\theta$ در V تعریف شده و هلومورف است). θ منحصر به فرد نیست، ولی $e^{i\theta}$ یگانه تابع (دایرهٔ واحد) $V\to S_1$ است که $z=|z|e^{i\theta}$. بدین ترتیب تابع $K:U-\{0\}\to S_1$ به صورت:

$$K(z)=e^{i\theta}\cdot e^{-i\tilde{h}(z)}\in S_1$$

وجود دارد که $Ke^{-G(z)}$ در $U-\{0\}$ تحلیلی است. قرار می‌دهیم $f=Ke^{-G}$ و داریم:

$$f(z)=e^{+\log|z|-h(z)}\cdot e^{i\theta}\cdot e^{-i\tilde{h}(z)}$$

$$f(z)=z\,e^{-(h+i\tilde{h})(z)}$$

پس تابع هلومورف f در یک همسایگی 0 که کنار گذاشته شده است به صورت هلومورف به 0 توسعه می‌یابد به گونه‌ای که 0 در واقع یک صفر مرتبهٔ 1 این تابع است. ادعا می‌کنیم که f در واقع به تابعی پیوسته $\phi_n:\overline{X}_n\to\overline{\mathbb{D}}$ توسعه می‌یابد که در X_n هلومورف است و X_n را به طور یک به یک به تمام $\mathbb{D}$ می‌نگارد. نخست نشان می‌دهیم f ادامهٔ تحلیلی بر تمام X_n دارد. فرض کنید B یک گوی باز در X_n است که با U اشتراک ناتهی دارد. چون G در B هارمونیک است، دارای مزدوج هارمونیک $\tilde{G}$ در B می‌باشد و

$$|e^{-(G+i\tilde{G})}|=e^{-G}=|f|$$

چون f و $e^{-(G+i\tilde{G})}$ هر دو تحلیلی هستند، در ناحیهٔ باز $U\cap B$، $f=c\,e^{-(G+i\tilde{G})}$ که $|c|=1$. $\tilde{G}$ را طوری می‌گیریم که $c=1$. از آنجا که X_n ساده همبند است، می‌توان به روش ادامهٔ تحلیلی به ترتیب بالا f را به تابعی هلومورف ϕ_n روی X_n ادامه داد. از طرفی دیگر، چون $G(z)>0$ روی $X_n-\{x_0\}$، داریم $|\phi_n|=e^{-G}<1$، پس ϕ_n در $\mathbb{D}$ قرار می‌گیرد، و چون $G(z)\to 0$ وقتی z به ∂X_n میل کند، ϕ_n به طور پیوسته به ∂X_n توسعه می‌یابد و در نتیجه $\overline{X}_n$ را به طور پوشا بر $\overline{\mathbb{D}}$ می‌نگارد. این تابع سره است و تنها صفر را فقط در x_0 می‌گیرد، بنابراین با توجه به تحلیلی بودن در X_n، تابع یک به یک است و بدین ترتیب تابعی پیوسته، یک به یک و پوشا $\phi_n:\overline{X}_n\to\overline{\mathbb{D}}$ حاصل شده که در X_n هلومورف است.

وقتی z به ∂X_n میل کند، $|f|$ به 1 میل می‌کند، شاید f سره است. از قضیهٔ 4.24 صفحه ۲۹ کتاب Forster نتیجه می‌گیریم که f پوشا است. بنابراین f^{-1} تابعی است که به طور یک به یک و پوشا $\mathbb{D}$ را به X_n می‌نگارد.

اثبات قضیهٔ یکنواخت‌سازی که مستلزم با هم پیوند دادن ϕ_nها برای نگاشتی هلومورفی از $X=\bigcup X_n$ به $\mathbb{D}$ یا $\mathbb{C}$ است را انجام می‌دهیم. نخست تحدید ϕ به X_n را در نظر بگیرید که X_n را بر $\mathbb{D}$ می‌نگارد. با ترکیب کردن با نگاشتی مناسب $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ به شکل $z\mapsto e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$ می‌توان فرض کرد که $\phi(x_0)=0$ و $d\phi(v)>0$ که در اینجا $v\neq 0$ یک بردار مماسی ثابت شده بر X در نقطهٔ x_0 است. این بردار در سراسر بحث ثابت خواهد ماند. به طور کلی در $\mathbb{C}$، گوی باز به مرکز 0 و شعاع ρ، $\rho>0$، را به

$\mathbb{D}_r$ نمایش می‌دهیم. پس از ترکیب φ_0 با تابعی مناسب به ازای r_0، می‌توان فرض کرد که $\varphi_0: X_0 \to \mathbb{D}_{r_0}$ به گونه‌ای است که $d\varphi_0(v)=1$. عیناً همین کار را برای هر X_n انجام می‌دهیم و نگاشت هولومرف $\varphi_n: X_n \to \mathbb{D}_{r_n}$ حاصل می‌شود که $\varphi_n(x_0)=0$ و $d\varphi_n(v)=1$. ادعا می‌کنیم (r_n) یک دنباله‌ی اکیداً صعودی است: فرض کنید $m>n$ ولی $r_m \le r_n$. به نگاشت $\varphi_m \circ \varphi_n^{-1}$ از $\mathbb{D}_{r_n}$ به $\mathbb{D}_{r_m}$ توجه کنید که 0 را به 0 می‌فرستد و چون $d\varphi_n(v)=1$ و $d\varphi_m(v)=1$، داریم $(\varphi_m\circ\varphi_n^{-1})'(0)=1$. حال اگر $\mathbb{D}_{r_m}\subset\mathbb{D}_{r_n}$، طبق لم شوارتس $\varphi_m\circ\varphi_n^{-1}$ باید یک دوران باشد و این خلاف $X_n \subsetneq X_m$ است، پس لزوماً $r_n<r_m$. برای هر زوج (m,n) که $m\ge n$، $\varphi_m\circ\varphi_n^{-1}$ را با $\psi_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. داریم $\psi_{m,n}(0)=0$، $\psi'_{m,n}(0)=1$ و $\psi_{m,n}$ یک به یک است، یعنی هر $\psi_{m,n}$، $m\ge n$، یک تابع schlicht از $\mathbb{D}_{r_n}$ به $\mathbb{C}$ است. (اصطلاح schlicht را قبلاً برای تابع‌های $\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ به کار برده‌ایم، در اینجا تعمیم معنی همگی به استفاده از قلمرو خاص $\mathbb{D}$ منتفی خواهد بود.) لم زیر را در نظر بگیرید:

لم: خانواده‌ی تابع‌های schlicht از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{C}$ نرمال است: برای هر دنباله از تابع‌های schlicht مانند (f_n)، زیردنباله‌ای از (f_n) وجود دارد که روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $\mathbb{D}$ به طور یکنواخت همگراست و تابع حدی نیز schlicht می‌باشد.

در ابتدا با فرض درستی لم، اثبات قضیه‌ی یکنواخت‌سازی را کامل می‌کنیم و در ادامه‌ی اثبات لم را خواهیم داد. طبیعتاً حکم لم برای هر دنباله‌ی (f_k) از تابع‌های یک به یک هولومرف $\mathbb{D}_r \to \mathbb{C}$ که $f_k(0)=0$ و $f_k'(0)=1$ نیز برقرار است زیرا شرط $f'(0)=1$ با یک تغییر متغیر خطی از $f'(0)\neq 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین خانواده $\psi_{m,n}$ برای n ثابت و $m\ge n$ دارای زیردنباله‌ای است که روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $\mathbb{D}_{r_n}$ به طور یکنواخت همگراست و تابع حدی نیز schlicht می‌باشد. تابع حدی را به F_n نمایش می‌دهیم. حال اجتماع $\bigcup_n \mathbb{D}_{r_n}$ یا یک گوی باز است (اگر $\sup r_n<\infty$) و یا برابر $\mathbb{C}$ (اگر $\sup r_n=+\infty$). این اجتماع را با Y نمایش می‌دهیم. تابع $F: X \to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: هرگاه $x\in X$، n را کوچکترین عدد صحیحی می‌گیریم که x یک نقطه‌ی درونی X_n باشد. چنین nای وجود دارد زیرا اجتماع X_nها برابر X است و هر X_n در درون X_{n+1} قرار دارد. تعریف می‌کنیم:

$$F(z)=(F_n\circ\varphi_n)(z)$$

نکته‌ی مهم این است که برای $m>n$، z همچنان یک نقطه‌ی درونی X_m است و داریم:

$$F(z)=(F_m\circ\varphi_m)(z)$$

زیرا که:

$$(F_m\circ\varphi_m)(z)=(F_m\circ\psi_{m,n})(\varphi_n(z))$$

و حد دنباله‌ی فوق برابر F_n است. می‌توان دید که $F: X\to Y$ خوش‌تعریف و هولومرف است. به علاوه طبق تعریف این تابع پوشا است و یک به یک بودن نیز از لم نتیجه می‌شود. □

پس کافی است لم بالا به اثبات برسد:

<u>اثبات لم</u>: طبق قضیه $\frac{1}{4}$-Koebe، تصویر $\mathbb{D}$ تحت تابع schlicht شامل گوی باز به شعاع $\frac{1}{4}$ حول ۰ را می‌پوشاند. اکنون به نتیجه ساده‌تری نیز نیاز داریم که در جهت عکس این حکم است: اگر f تابعی schlicht از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{C}$ باشد، $f(\mathbb{D})$ شامل هیچ گوی باز حول ۰ به شعاع بزرگتر از ۱ نیست!
اثبات این مطلب مشابه لم شوارتس به شرح زیر است: فرض کنید $\mathbb{D}_r \subset f(\mathbb{D})$ که f تابعی schlicht است. وارون f را به g نمایش دهید. داریم $g(0)=0$ و طبق قاعده زنجیری $g'(0)=1$. چون تابع $\frac{g(z)}{z}$ در $z=0$ تکینگی برداشتنی دارد ($g(0)=0$)، $\frac{g(z)}{z}$ در سراسر $\mathbb{D}_r$ هلومورف است. (r_n) را دنباله‌ای از اعداد مثبت می‌گیریم که صعودی است و $r_n \to r$. از اصل ماکسیمم روی $\mathbb{D}_{r_n}$ نتیجه می‌شود که $\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r_n}$.
بنابراین $\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r}$ و داریم:

$$1=|g'(0)|=\left|\lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}\right|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{g(z)}{z}\right|\le\frac{1}{r}$$

پس $r \le 1$.

حال فرض کنید دنباله تابع‌های schlicht مانند $f_n:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ داده شده است. r_n را کوچکترین کران بالای r هایی بگیرید که $\mathbb{D}_r$ در $f_n(\mathbb{D})$ قرار می‌گیرد. از مطلب بالا و قضیه کوبه نتیجه می‌شود که نقطه‌ای $a_n \in \partial\mathbb{D}_{r_n}$ وجود دارد که $a_n \notin f_n(\mathbb{D})$. داریم $\frac{1}{4} \le |a_n| \le 1$، و چون ناحیه حلقوی $\frac{1}{4} \le |z| \le 1$ فشرده است، (a_n) دارای زیردنباله‌ای همگرا است. بدون از دست دادن کلیت این زیردنباله را نیز به (a_n) نمایش می‌دهیم، پس $a_n \to a$. حال تعریف می‌کنیم $g_n=\frac{1}{a_n}f_n$. به ترتیب $g_n(0)=0$، $\mathbb{D}\subset g_n(\mathbb{D})$ و $1\notin g_n(\mathbb{D})$. ناحیه $g_n(\mathbb{D})$ همبند ساده است (تصویر $\mathbb{D}$ تحت همسانریختی g_n) و انتقال یافته آن با یک واحد به سمت چپ، یعنی $g_n(\mathbb{D})-1$، نیز چنین است و به علاوه شامل صفر نمی‌شود. پس یک شاخه تابع جذر $\psi_n: g_n(\mathbb{D})\to\mathbb{C}^\times$ وجود دارد که $\psi_n(z)^2=z-1$ و $\psi_n(0)=+i$. قرار می‌دهیم $h_n=\psi_n\circ g_n$. توجه کنید که اگر $w\in h_n(\mathbb{D})$، آنگاه $-w\notin h_n(\mathbb{D})$ — زیرا اگر $h_n(z_1)=-h_n(z_2)$، با به توان رساندن داریم $g(z_1)=g(z_2)$ که خلاف یک به یک بودن g است. نتیجه اینکه خانواده (h_n) دست کم دو مقدار متمایز در $\mathbb{C}$ را اختیار نمی‌کند که بنابر قضیه مونتل نرمال است و باید زیردنباله‌ای همگرا (روی مجموعه‌ها یکنواخت) داشته باشد، که آن را نیز به (h_n) نمایش می‌دهیم. پس

$$f_n=a_n(1+h_n^2)$$

نیز به تابع $a(1+h^2)$ میل می‌کند که h حد h_n است. حد تابع‌های schlicht نمی‌تواند ثابت باشد زیرا $f_n'(0)=1$، پس این حد نیز تابع schlicht است و حکم به اثبات می‌رسد. □