چنبره‌ها را به صورت فضاهای خارج قسمت $\mathbb{C}/\Lambda$ مشخص می‌کنیم که Λ یک زیرگروه جمعی گسسته از $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ است. به عبارت دیگر $\Lambda=\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ باشد

$$\Lambda=\{n_1\omega_1+n_2\omega_2 \mid n_i\in\mathbb{Z}\}$$

و $\{\omega_1,\omega_2\}$ مستقل خطی روی $\mathbb{R}$ فرض می‌شود. نگاشت خارج قسمتی $\pi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda$ یک ساختار رویهٔ ریمانی روی $\mathbb{C}/\Lambda$ تعریف می‌کند. حال فرض کنید $\Lambda=\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ و $\Lambda'=\langle\omega_1',\omega_2'\rangle$ به صورت فوق باشند و $\pi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda$ و $\pi':\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda'$ نگاشت‌های خارج قسمتی فضاهای پوششی رویه‌های ریمانی متناظر. اگر $f:\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{C}/\Lambda'$ یک نگاشت پیوسته باشد، ترفیع آن $\tilde f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ به فضای پوششی جامع (universal cover) را در نظر می‌گیریم که $\tilde f(0)=0$. از $f\circ\pi=\pi'\circ\tilde f$ نتیجه می‌گیریم که

$$(1)\qquad \begin{cases}\tilde f(z+\omega_1)=\tilde f(z)+a_{11}\omega_1'+a_{12}\omega_2'\\ \tilde f(z+\omega_2)=\tilde f(z)+a_{21}\omega_1'+a_{22}\omega_2'\end{cases}$$

که در اینجا $a_{ij}\in\mathbb{Z}$. توجه کنید که چون $\tilde f(z+\omega_i)-\tilde f(z)$ نسبت به z پیوسته است و a_{i1}، a_{i2} فقط مقادیر عدد صحیح می‌گیرند، a_{ij}ها ثابت هستند. با مشتق‌گیری از روابط بالا نسبت به z داریم:

$$\begin{cases}\tilde f'(z+\omega_1)=\tilde f'(z)\\ \tilde f'(z+\omega_2)=\tilde f'(z)\end{cases}$$

به عبارت دیگر تابع هلومرف $\tilde f'$ لزوماً کراندار است. از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌گیریم که $\tilde f'$ ثابت است $\tilde f'(z)=c$ و $\tilde f(z)=cz+d$ که با توجه به $\tilde f(0)=0$ داریم $\tilde f(z)=cz$. با جاگذاری این روابط در (1) روابط زیر به دست می‌آید که:

$$\begin{cases}c\omega_1=a_{11}\omega_1'+a_{12}\omega_2'\\ c\omega_2=a_{21}\omega_1'+a_{22}\omega_2'\end{cases}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{a_{11}\frac{\omega_1'}{\omega_2'}+a_{12}}{a_{21}\frac{\omega_1'}{\omega_2'}+a_{22}}$$

با قرار دادن $\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ و $\tau'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$: $\quad \tau=\frac{a_{11}\tau'+a_{12}}{a_{21}\tau'+a_{22}}$

از وارون‌پذیری f و $\tilde f$ نتیجه می‌گیریم که $\det[a_{ij}]=\pm1$، که با محدود شدن به نگاشت‌های خطی جهت نگهدار نتیجه

می‌شود ($[a_{ij}]\in PSL(2,\mathbb{Z})$). گروه $\Gamma=PSL(2,\mathbb{Z})$ که یک زیرگروه گسسته $PSL(2,\mathbb{R})$ یعنی گروه خودریختی‌های $\mathbb{H}$ است گروه پیمانه‌ای (Modular Group) نام دارد. این گروه نقش مهمی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات دارد. به آسانی می‌توان دید که Γ را می‌توان توسط دو عضو:

$$z\mapsto z+1,\ \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad z\mapsto\frac{-1}{z},\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

یا دو عضو

$$z\mapsto\frac{-1}{z+1},\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad z\mapsto\frac{-1}{z},\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

را تولید کرد. دو عضو اخیر به ترتیب دارای مرتبه ۲ و ۳ هستند. نمونه ناحیه بنیادی که کنش این گروه بر $\mathbb{H}$ را مشخص می‌کند در صفحه ۱۰۵ کتاب Hubbard مشاهده کنید.

توجه کنید که اگر $\tau=A\tau'$ برای A، آنگاه $\bar{\tau}=A\bar{\tau}'$. مرسوم است که پایه (ω_1,ω_2) برای Λ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که

$$\operatorname{Im}\tau=\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)>0$$

به این ترتیب چنبره‌های مورد بررسی به آسانی در تناظر ۱-۱ با $\mathbb{H}$ هستند و رده‌های هم‌ارزی آنها تحت یکریختی تحلیلی یک ناحیه بنیادی برای $\mathbb{H}/\Gamma$ را تشکیل می‌دهند.

یک رویه ریمانی که از نظر توپولوژی یک چنبره باشد با نسبت دو عضو پایه، یعنی $\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}$، مشخص می‌شود که می‌توان فرض کرد $\operatorname{Im}\tau>0$. به علاوه بین دو چنبره رویه ریمانی، یک یکریختی تحلیلی وجود دارد اگر و فقط اگر τ و τ' تحت $PSL(2,\mathbb{Z})$ قابل انطباق باشند.

برای چنبره داده شده S، هدف ما این است که فضای تایشمولر T_S را به آسانی مشخص کنیم. از آنجا که بین هر دو چنبره یک نگاشت شبه‌همدیس وجود دارد (بین هر دو چنبره نگاشت هموار دیفئومورفیسمی وجود دارد و چنبره فشرده است)، انتخاب S بی‌اثر است. مثلاً می‌توانیم چنبره S_0 متناظر با شبکه $\langle 1,i\rangle$ را در نظر بگیریم با $\tau=\frac{i}{1}$. حال اگر S_1 و S_2 دو چنبره باشند با نگاشت‌های شبه‌همدیس $\varphi_1:S_0\to S_1$ و $\varphi_2:S_0\to S_2$، شرط لازم و کافی برای اینکه (S_1,φ_1) و (S_2,φ_2) یک نقطه از T_S را مشخص کنند این است که $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ هموتوپ با یک یکریختی تحلیلی از S_1 به S_2 باشد. می‌توانیم فرض کنیم که S_1 متناظر با انتخاب شبکه $\Lambda_1=\langle 1,\tau_1\rangle$ و S_2 متناظر با انتخاب شبکه $\Lambda_2=\langle 1,\tau_2\rangle$ است، و $\varphi_j(i)=\tau_j$، $\varphi_j(1)=1$.

توجه کنید که در گذر به خارج قسمت $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda_j$ ، از T_j به طوقه‌های مولد $\pi_1(S_j,[0])$ نگاشته می‌شوند. نگاشت‌های هموتوپ از ۱ به ۲ یک هم‌ریختی برابر از $\pi_1(S_1,[0])$ به $\pi_1(S_2,[0])$ القاء می‌کنند. پس اگر $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ با یک نگاشت تحلیلی $f:S_1\to S_2$ هموتوپ باشد، داریم $f_*=(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})_*$. f را به یک نگاشت تحلیلی فضاهای پوششی $\tilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ترفیع می‌دهیم که $\tilde{f}(0)=0$. پس لزوماً $\tilde{f}$ به شکل $\tilde{f}(z)=cz$ است که $c\neq0$ یک عدد مختلط ثابت است. از آنجا که طوقه‌ی ترفیع شده توسط مسئله [1] به خودشان نگاشته می‌شود نتیجه می‌گیریم که $c=1$، که این نتیجه می‌دهد $\tau_1=\tau_2$. بدین ترتیب تناظری یک به یک بین T_S و $\mathbb{H}$ وجود دارد. در ادامه نشان خواهیم داد که در واقع یک ایزومتری بین T_S و $\mathbb{H}$ به عنوان فضای متریک وجود دارد و T_S ساختار یک رویه‌ی ریمانی یکسان با $\mathbb{H}$ می‌گیرد.

فرض کنید $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ یک نگاشت $\mathbb{R}$-خطی است. می‌دانیم می‌توان f را به صورت

$$f(z)=\lambda(z+\mu\bar{z})$$

نوشت که $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$، و به فرض $\lambda\neq0$، f یک نگاشت حافظ جهت است اگر و فقط اگر $|\mu|<1$.
در این حالت فرض کنید f پایه‌ی (ω_1,ω_2) را به پایه‌ی (ω_1',ω_2') می‌نگارد، $\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ و $\tau'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$. در این صورت ادعا می‌کنیم:

$$|\mu|=\left|\frac{\tau'-\tau}{\tau'-\bar{\tau}}\right| \qquad (2)$$

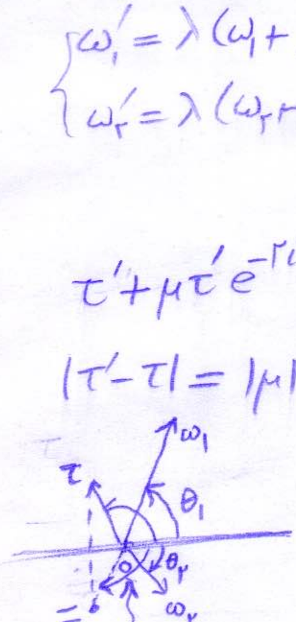
محاسبه سرراست زیر (۲) را ثابت می‌کند:

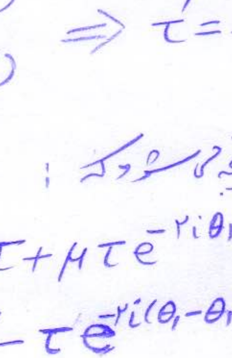
$$\begin{cases}\omega_1'=\lambda(\omega_1+\mu\overline{\omega_1})\\ \omega_2'=\lambda(\omega_2+\mu\overline{\omega_2})\end{cases} \Rightarrow \tau'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'}=\tau\,\frac{1+\mu e^{-2i\theta_1}}{1+\mu e^{-2i\theta_2}}$$

که در اینجا $\omega_1=|\omega_1|e^{i\theta_1}$ و $\omega_2=|\omega_2|e^{i\theta_2}$ و نتیجه می‌شود که:

$$\tau'+\mu\tau' e^{-2i\theta_2}=\tau+\mu\tau e^{-2i\theta_1}$$

$$|\tau'-\tau|=|\mu|\,|\tau'-\tau e^{2i(\theta_1-\theta_2)}|=|\mu|\,|\tau'-\bar{\tau}|$$





چنان که حکم بود.
اینکه τ و τ' هر دو در $\mathbb{H}$ قرار دارند و $|\mu|<1$، با شکل هندسی توافق دارد.

در اوایل صفحهٔ ③ تناظری دوسویی از T_1 به $\mathbb{H}$ ساختیم. این تناظر را به

$$\psi : T_1 \to \mathbb{H}$$

نمایش می‌دهیم. نشان می‌دهیم ψ یک ایزومتری از فضای متریک T_1 به $\mathbb{H}$ با متریک هذلولوی است.
(φ, S) و (φ', S') را اعضایی از T_1 اختیار می‌کنیم و فاصله تایشمولر را به d نمایش می‌دهیم.
طبق تعریف

$$d((\varphi,S),(\varphi',S')) = \inf_{f} \log K(f)$$

که inf نسبت به همهٔ نگاشت‌های شبه‌همدیس f گرفته شده است که با $\varphi'\circ\varphi^{-1}$ هموتوپ هستند (سادگاً $f\circ\varphi$ و φ' هموتوپ هستند). می‌نویسیم $S=\mathbb{C}/\Lambda$ و $S'=\mathbb{C}/\Lambda'$ که $\Lambda=\langle\omega_1,\omega_2\rangle$، $\Lambda'=\langle\omega_1',\omega_2'\rangle$. طبق قضیهٔ تایشمولر (قضیهٔ 5.3.8 کتاب هابارد) و مراحل قبل از آن که در کلاس صحیح شد، inf بالا برای تابع مستوی نسبت به مختصات طبیعی به دست می‌آید که در اینجا از نگاشتن پایه‌های تناظر القا می‌شود. اگر این تابع را f_0 نمایش دهیم، داریم

$$\log K(f_0) = \log\frac{1+r}{1-r} = \log\frac{|\tau'-\bar{\tau}|+|\tau'-\tau|}{|\tau'-\bar{\tau}|-|\tau'-\tau|}$$

توجه کنید که $\log\frac{1+r}{1-r}$ فاصلهٔ هذلولوی در $\mathbb{D}$ بین r و 0 (متناظراً فاصلهٔ هذلولوی در $\mathbb{H}$ بین τ و τ') است. □