سوال ۱ برقرار نبودن شرط لایه: برای $X=U=\mathbb{C}^*$ قرار میدهیم ~~...~~

$$U_1=\mathbb{C}^*-\{x\le 0 \text{ محور}\} \quad , \quad U_2=\mathbb{C}^*-\{x\ge 0 \text{ محور}\}$$

داریم $U=U_1\cup U_2$ و U_i ها هر دو باز هستند. حال دو تابع $s:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ با $s(z)\equiv 1$ و $t:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ با $t(z)=z$ را در نظر بگیرید و $[s]$ و $[t]$ را رده خارج قسمتی s و t در گروه خارج قسمتی $\mathcal{O}^*(U)/\exp\mathcal{O}(U)$ (توجه کنید که s و t هر دو در $\mathcal{O}^*(U)$ هستند). تحدید $[s]$ و $[t]$ به هر یک از U_1 و U_2 صفر است زیرا که $s=\exp(0)$ و تحدید t به هر یک از U_1 و U_2 دارای لگاریتم است. ولی $[s]\neq[t]$ زیرا که $[s]$ عضو صفر است ولی t در کل $U=\mathbb{C}^*$ فاقد لگاریتم است.

سوال ۲ با تغییر مختصات $w=\frac{1}{z}$ اگر حساب کنیم، $dz=\frac{-1}{w^2}dw$ و $\frac{dz}{1+z^2}=\frac{-dw}{1+w^2}$

تابع $\frac{1}{1+w^2}$ در همسایگی $w=0$ (نقطه بینهایت) کراندار است پس $\frac{-dw}{1+w^2}$ در $w=0$ تعریف میشود. برای $\tan:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1-\{\pm i\}$ ~~...~~ داریم:

$$\tan^*\omega=\tan^*\left(\frac{dz}{1+z^2}\right)=\frac{d(\tan z)}{1+(\tan z)^2}=\frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^2 z}=dz$$

سوال ۳ تعریف افراز واحد گسسته: فرض کنید $\mathfrak{U}=(U_i)$ یک پوشش و یک ترتیب خوش روی اندیس داده شده است. تابع $\theta_i:X\to\mathbb{Z}$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\theta_i(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } i \text{ کوچکترین اندیسی باشد که } x\in U_i\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

داریم $\sum\theta_i(x)=1$ و θ_i فقط مقادیر صحیح میگیرد. بقیه کار مشابه $H^1(X,\mathcal{E})=0$ است.

سوال ۴ طبق قضیه‌ای که در درس داشتیم اگر ω یک فرم هلومرف روی رویه ریمانی فشرده با گونای g باشد، آنگاه $\deg(\omega)=2g-2$. پس داریم $\deg(\omega_1)=\deg(\omega_2)=2$. بنابراین از ~~$\deg(\omega_1)=\deg(f)+\deg(\omega_2)$~~ اینکه برای هر $x\in X$، $\operatorname{ord}_x(\omega_1)=\operatorname{ord}_x f+\operatorname{ord}_x\omega_2$ و اینکه ω_1 و ω_2 هلومرف هستند، پس $\operatorname{ord}_x\omega_2\ge 0$، نتیجه میگیریم که $\operatorname{ord}_x f$ نمیتواند بزرگتر از ۲ باشد. $\operatorname{ord}_x f=1$ هم غیرممکن است زیرا در اینصورت در همه نقاط $\operatorname{ord}_x f=1$ و f یک نگاشت از درجه ۲ روی $\mathbb{P}^1$ میشود. به همین طور $\operatorname{ord}_x f=0$ هم غیرممکن است زیرا در اینصورت f باید ثابت باشد در حالی که ω_1, ω_2 مستقل خطی است. پس ناچاراً $\operatorname{ord}_x f=2$ در همه نقاط و f دو لایه‌ای است.

سوال ۵ (الف) در (U_1, z) از نقطه‌ی حول p مختصاتی که $z(p)=0$ و فرم ناوردای $\omega_1 = \frac{1}{z^n}dz$ ، $n \geq 2$ ، را حول p در نظر می‌گیریم. داریم $Res_p\,\omega_1 = 0$. قرار دهید $U = U_1$ و $U_2 = X - \{p\}$. روی U_2، ابر فرم صفر ω_2 را در نظر می‌گیریم. حال $\mu = \{\omega_1, \omega_2\}$ یک توزیع مشابک نظر می‌شود با $Res\,\mu = 0$، پس طبق قضیه‌ی درس دارای جواب است. (ب) مشابه (الف)، ابتدا دو دستگاه مختصات (U_1, z_1) و (U_2, z_2) حول به ترتیب p_1 و p_2 را طوری در نظر می‌گیریم که $U_1 \cap U_2 = \phi$ ، $z_1(p_1)=0$ ، $z_2(p_2)=0$ ، و در آخر قرار می‌دهیم $U_3 = X - \{p_1, p_2\}$. در U_1، ω_1 را با فرم مرومورفی $\frac{1}{z_1}dz_1$ و در U_2، ω_2 را با فرم $\frac{-1}{z_2}dz_2$ ، و در U_3، $\omega_3 = 0$ را در نظر می‌گیریم. با $\mu = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ داریم $Res\,\mu = 0$ و طبق قضیه این جواب دارد.

سوال ۶ طبق فرمول ریمان هورویتس $\chi_X + B = 2\chi_{\mathbb{P}^1}$ ، یا $2-2g+B=4$ نتیجه می‌دهد $B = 2g+2$. و چون X ای که نگاشت دولایه‌ای است، در هر نقطه‌ی انشعاب شاخص ۱ است، پس باید $2g+2$ نقطه‌ی انشعاب متمایز وجود داشته باشد. فرض کنید ∞ یک نقطه‌ی انشعاب نیست (انشعاب) است و $\pi(x)=a$. با نگاشت کسری خطی $\frac{1}{x-a}$ می‌توان a را به ∞ منتقل کرد (نگاشت‌های کسری خطی اتومورفیسم‌های $\mathbb{P}^1$ هستند). بنابراین ~~با~~ از ترکیب $\frac{1}{x-a}$ با π ، به یک تابع مرومورفی روی x می‌رسیم که در ~~...~~ x دارای قطب مرتبه‌ی ۲ $\Leftarrow$ $g = 2+1$ است، یعنی x یک نقطه‌ی وایرشتراس است.

سوال ۷ (الف) دقیق بودن در $\mathcal{H}$ چون تابع بودن یک سطح است، دقیق بودن در $\mathcal{E}$ به دلیل تعریف تابع‌های هارمونیک داشتیم:

$$d'd''f = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\wedge dy$$

دقیق بودن در $\mathcal{E}^{(2)}$، یعنی پوشا بودن $d'd''$ از لم دلبو به صورت زیر نتیجه می‌شود: چون از دقیق بودن دنباله به معنا دقیق بودن در سطح جوانه‌هاست، کافی است به طور موضعی تحقیق شود. حال با دوبار به کارگیری لم دلبو (یک بار با مزدوج) پوشا بودن $d'd''$ نتیجه می‌شود.

(ب) طبق قضیه‌ای در کتاب، اگر $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \to 0$ دقیق باشد و $H^1(X,\mathcal{B})=0$ ، آنگاه

$$H^1(X,\mathcal{A}) \cong \frac{H^0(X,\mathcal{C})}{\beta H^0(X,\mathcal{B})}$$

چون طبق قضیه‌ی دیگری در درس داریم $H^1(X,\mathcal{E})=0$ و به طور کلی H^0 همان فضای مقطع‌های سرتاسری است، حکم نتیجه می‌شود.

ج) طبق قضیه‌ای از بخش‌های قبل داریم:

$$\mathcal{E}^{0,1}(X)=d'\mathcal{E}(X)\oplus\Omega(X)\,,\qquad \mathcal{E}^{1,0}(X)=d''\mathcal{E}(X)\oplus\overline{\Omega}(X)$$

چون عناصر $\Omega(X)$ و $\overline{\Omega}(X)$ بسته هستند ($d\Omega(X)=0$ و $d\overline{\Omega}(X)=0$)، و با توجه به اینکه $d''\circ d'=-d'\circ d''$ ، $d=d'+d''$ ، $d'\circ d'=0$ و $d''\circ d''=0$ حکم از تساوی‌های بالا با گرفتن d نتیجه می‌شود.

استدلال ناقص: بجای آن از قضیه دلبو که در حکم ضمنی است باید از قضیه فشرده استفاده کرد.

~~[illegible]~~

(د) تابع $\iint_X:\mathcal{E}^2(X)\to\mathbb{C}$ یک تابع خطی پوشاست

~~[illegible]~~

که روی $d'd''\mathcal{E}(X)=d\mathcal{E}^{1,0}(X)-d\mathcal{E}^{0,1}(X)$ طبق قضیه استوکس صفر است،

یعنی

$$d'd''\mathcal{E}(X)\subset\ker\iint_X$$

از طرفی دیگر طبق قضیه دلبو $H^1(X,\Omega)\simeq\dfrac{\mathcal{E}^2(X)}{d''\mathcal{E}^{1,0}(X)}$ و طبق قضیه سر ($\dim H^1(X,\Omega)=\dim H^0(X,\mathcal{O})=1$)

پس لزوماً $d'd''\mathcal{E}(X)=\ker\iint_X$ ، و حکم از (ج) نتیجه می‌شود.

سوال ۸ طبق تعریف σ_α داریم: $\iint_X\sigma_\alpha\wedge\sigma_\beta=\int_\alpha\sigma_\beta$. از طرفی دیگر، طبق قضیه آبل، یا طبق قضیه اثبات فضای مربوط، می‌دانیم تابع مرومورف f با $\partial\beta=\operatorname{div}f$ وجود دارد که:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}=\sigma_\beta+dg$$ برای $g\in\mathcal{E}$ مناسب

پس

$$\iint_X\sigma_\alpha\wedge\sigma_\beta=\int_\alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}-dg\right)$$

چون α بسته است و dg دقیق، $\int_\alpha dg=0$ ، پس انتگرال بالا مساوی $\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha\frac{df}{f}$. این در واقع برابر

(#قطب‌ها − #صفرها)

برای f است که درون α است و با اثر آن بر دور زدن‌ها ... ثابت کرد.

سوال ۹ (الف) خم‌های بسته $\alpha_1(t)=t\lambda_1$ و $\alpha_2(t)=t\lambda_2$ ، $0\le t\le 1$ را در نظر می‌گیریم که می‌دانیم $[\alpha_1]$ و $[\alpha_2]$ مولدهای $\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda,0)$ هستند. چون هر یک گروه‌های π_1 به $(\mathbb{C},+)$ با تصویر در روی $[\alpha_1]$ و $[\alpha_2]$ مشخص می‌شود. بنابراین همریختی h را در نظر می‌گیریم که $h[\alpha_1]=c_1$ و $h[\alpha_2]=c_2$ ، حال $\mathbb{C}$ را پوشش جهانی $\mathbb{C}/\Lambda$ در نظر می‌گیریم و تابع $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(s_1\lambda_1+s_2\lambda_2)=s_1c_1+s_2c_2$$

لذا می‌بینیم F خوش‌تعریف و با مجموعه‌های ثابت است. هر عضو گروه تبدیلات پوششی به شکل

$$z \xmapsto{\sigma} z+n_1\lambda_1+n_2\lambda_2$$

است. اگر بنویسیم $z=s_1c_1+s_2c_2$ داریم

$$F(z)-F(\sigma^{-1}(z))=s_1c_1+s_2c_2-\big((s_1-n_1)c_1+(s_2-n_2)c_2\big)$$

$$=n_1c_1+n_2c_2$$

که فقط به σ (و همریختی h) بستگی دارد. حال ω را القای آن از فرم بسته می‌گیریم که $dF=p^*\omega$ (در اینجا $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Lambda$ نگاشت پوششی است).

ب) ~~[illegible]~~

$\dim H^1_{dR}(\mathbb{C}/\Lambda,\mathbb{C})$ برابر ۲ است، یعنی در اینجا ۲ می‌باشد، $H^1_{dR}(\mathbb{C}/\Lambda,\mathbb{C})\cong \mathrm{Harm}^1(\mathbb{C}/\Lambda)$ ، پس کافی است نشان دهیم $[dz]$ و $[d\bar z]$ مستقل خطی‌اند. فرض کنید برای اعداد مختلط c_1 و c_2 داریم

$$c_1[dz]+c_2[d\bar z]=0$$

$$[c_1dz+c_2d\bar z]=0$$

پس $c_1dz+c_2d\bar z$ باید برابر df باشد که $f:\mathbb{C}/\Lambda\to\mathbb{C}$. بنابر قضیهٔ استوکس:

$$\int_{\alpha_j}(c_1dz+c_2d\bar z)=0$$

که در اینجا $\alpha_j(t)=t\lambda_j$ ، $0\le t\le 1$. داریم

$$\int_0^1(c_1\lambda_j+c_2\bar\lambda_j)\,dt=0\ ,\quad j=1,2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1\lambda_1+c_2\bar\lambda_1=0\\ c_1\lambda_2+c_2\bar\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\lambda_1 & \bar\lambda_1\\ \lambda_2 & \bar\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left(\det=\lambda_1\bar\lambda_2-\bar\lambda_1\lambda_2=2i\,\mathrm{Im}(\lambda_1\bar\lambda_2)\right)$$

چون λ_1 و λ_2 روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند $\mathrm{Im}(\bar\lambda_1\lambda_2)\neq 0$ ، پس لزوماً $c_1=c_2=0$ و استقلال خطی ثابت می‌شود.

ج) محاسبهٔ σ_{α_j} : داریم $\int_{\alpha_j}\omega=\iint_X \sigma_{\alpha_j}\wedge\omega$ برای هر فرم بستهٔ ω. بالاخص برای $\omega=dz$ و $d\bar z$ ؛ $\sigma_{\alpha_j}=a_j\,dz+b_j\,d\bar z$:

$$\int_0^1\lambda_j\,dt=\iint_X b_j(-1)\,dz\wedge d\bar z=2ib_jA$$

که A مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط λ_1 و λ_2 است.

پس $b_j=\dfrac{\lambda_j}{2iA}$ و مشابهاً با استفاده از $\omega=d\bar z$ ، a_j به دست خواهد آمد.