مباحثی در آنالیز مختلط
(رویه‌های ریمانی)

۹۸/۳/۲۶

امتحان نهایی

پاسخ سوال‌ها را دقیق و روشن بنویسید. به کار گرفتن عبارت‌هایی چون "بدیهی است" و "روشن است" می‌تواند به ضرر شما باشد. هر جا استناد به قضیه یا مطلبی از درس لازم است، صورت آن موضوع را تا حدی که ارتباط را روشن کند بنویسید.

سوال ۱ (۱۰ نمره) X یک رویه ریمانی است. برای هر زیرمجموعه باز U از X تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}^*(U)/\exp\mathcal{O}(U)$$

نشان دهید $\mathcal{F}$ با نگاشت‌های تحدید متداول یک پیش‌بافه است ولی شرط اول (I) بافه برای آن صادق نیست (شرط (I) بافه را در کلاس به شرط (II) هم تصحیح کردیم یعنی مضمون که اگر U اجتماع زیرمجموعه‌های باز (U_i) باشد، و s و t دو عضو $\mathcal{F}(U)$ که تحدید آنها به هر U_i با هم برابر است، در این صورت $s=t$.)

سوال ۲ (۱۰ نمره) نشان دهید ۱-فرم هلومورف $\frac{dz}{1+z^2}$ را که روی $\mathbb{C}-\{\pm i\}$ تعریف شده است می‌توان به یک ۱-فرم هلومورف ω روی $\mathbb{P}^1-\{\pm i\}$ توسعه داد. برای تابع $\tan:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1-\{\pm i\}$، $\tan^*\omega$ را محاسبه کنید.

سوال ۳ (۱۲ نمره) X یک رویه ریمانی است. $\mathcal{D}$ را بافه بخش‌یاب‌ها روی X می‌گیریم یعنی برای هر زیرمجموعه باز U از X، $\mathcal{D}(U)$ از نگاشت‌های $D: U\to\mathbb{Z}$ تشکیل شده است که به ازای هر زیرمجموعه فشرده K از U، $D(x)$ فقط برای تعدادی متناهی x در K ناصفر است. ثابت کنید $\mathcal{D}$ با تحدید متداول در واقع یک بافه است و داریم $H^1(X,\mathcal{D})=0$. (راهنمایی: از یک "افراز واحد" ناپیوسته با مقادیر عدد صحیح استفاده کنید.)

سوال ۴ (۱۰ نمره) X یک رویه ریمانی فشرده با گونه ۲ است و $\{\omega_1,\omega_2\}$ یک پایه برای $H^0(X,\Omega)$. تابع f را از رابطه $\omega_1=f\omega_2$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $f: X\to\mathbb{P}^1$ یک نگاشت پوششی (شاخه‌دار) دولایه‌ای است.

سوال ۵ (۱۰ نمره) X یک رویه ریمانی فشرده است. ثابت کنید: (الف) برای هر $p\in X$ و هر عدد صحیح $n\ge 2$، ۱-فرم مرومورفی روی X وجود دارد که p برای آن یک قطب مرتبه n است و در سایر نقاط X هلومورف می‌باشد.
(ب) برای هر دو نقطه متمایز p_1 و p_2 از X، ۱-فرم مرومورفی وجود دارد که در نقاط p_1 و p_2 قطب مرتبه اول با مانده به ترتیب ۱+ و ۱- دارد و در سایر نقاط X هلومورف است.

سوال ۶ (۱۰ نمره) فرض کنید $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ یک رویه‌ی ریمانی ابربیضوی با گونه‌ی g را تعریف کند. نشان دهید π دارای $2g+2$ نقطه‌ی انشعاب متمایز است، و هر یک از این نقاط یک نقطه‌ی وایرشتراس است.

سوال ۷ (۶ نمره) X یک رویه‌ی ریمانی است و $\mathcal{H}$ بافه‌ی تابع‌های هارمونیک روی X.

(الف) نشان دهید دنباله‌ی کوتاه زیر از بافه‌ها دقیق است:

$$0 \to \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d'd''} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

برای حکم‌های بعدی فرض کنید X فشرده نیز هست:

(ب) نشان دهید $H^1(X,\mathcal{H}) \cong \dfrac{\mathcal{E}^{(2)}(X)}{d'd''\mathcal{E}(X)}$

(ج) نشان دهید:

$$d\mathcal{E}^{1,0}(X) = d\mathcal{E}^{0,1}(X) = d'd''\mathcal{E}(X)$$

(د) فرض کنید $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ به گونه‌ای است که $\iint_X \omega = 0$. نشان دهید ۱-فرم $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}$ وجود دارد که $d\alpha = \omega$.

سوال ۸ (۱۰ نمره) X یک رویه‌ی ریمانی فشرده است، α و β خم‌های بسته در X، و σ_α و σ_β ۱-فرم‌های هارمونیک وابسته به α و β. ثابت کنید $\iint_X \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta$ یک عدد صحیح است.

سوال ۹ (۱۲ نمره) فرض می‌کنیم $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی‌اند و شبکه‌ی تولید شده‌ی $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\lambda_2$ را در نظر می‌گیریم. این سوال در مورد چنبره‌ی $\mathbb{C}/\Lambda$ است.

(الف) اگر f یک همریختی گروهی از گروه بنیادی $\mathbb{C}/\Lambda$ به گروه جمعی $(\mathbb{C},+)$ باشد، نشان دهید ۱-فرم هموار ω وجود دارد که f همریختی دوری (period homomorph.) آن است.

(ب) نشان دهید $[dz]$ و $[d\bar{z}]$ تشکیل پایه برای گروه دُرام $H^1_{dR}(X,\mathbb{C}) = Rh^1(X)$ می‌دهند.

(ج) فرض کنید $\alpha_j : [0,1] \to \mathbb{C}/\Lambda$ خم بسته‌ی $\alpha_j(t) = \pi(t\lambda_j)$ باشد که در آنها $\pi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ افکنش خارج قسمت است. ۱-فرم هارمونیک σ_{α_j} را محاسبه کنید، $j=1,2$.

<u>بعضی اصطلاحات</u>: بافه = sheaf، پیش‌بافه = presheaf، بخشیاب = divisor، افراز واحد = partition of unity، گونه = genus، نگاشت پوششی (شاخه‌دار) = (ramified) covering space، دولایه‌ای = 2-sheeted، برخریخت = meromorphic، ابربیضوی = hyperelliptic (یعنی یک نگاشت پوششی دولایه‌ای احتمالاً شاخه‌دار از این رویه‌ی ریمانی به کره‌ی ریمان $\mathbb{P}^1$ وجود دارد)، گروه بنیادی = fundamental group

$\mathcal{E}(X)$: فضای تابع‌های هموار (C^∞) مختلط روی X، $\mathcal{E}^{(1)}(X)$: فضای ۱-فرم‌های هموار (C^∞) مختلط روی X.