(1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{T}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \sim (ax+by) + i(cx+dy)$$

هال خلعی

$$= \tfrac{1}{2}\big(a(z+\bar z) - ib(z-\bar z)\big) + \tfrac{i}{2}\big(c(z+\bar z) - id(z-\bar z)\big)$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(a+d+i(-b+c)\big)}_{P} z + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(a-d+i(b+c)\big)}_{Q} \bar z$$

Define $|T| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & b-c \\ -b+c & a+d \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & a-d \end{bmatrix}}_{Q}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$= Pz + Q\bar z \quad (\mathbb{R}\text{-linear}) \quad \begin{cases} Pz = T'(z) & \mathbb{C}\text{-linear} \\ Q\bar z = T''(z) & \mathbb{C}\text{-antilinear} \end{cases}$$

$$T^t T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$$

$M_2(\mathbb{R})$: 2-dim $\mathbb{C}$-vector space with basis's $\{z, \bar z\}$

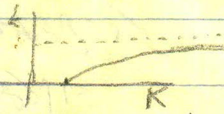
T carries the unit circle to an ellipse with equation $T^{-1}w \cdot T^{-1}w = 1$. The length of the half major axis of this ellipse is $\|T\|$. Equivalently, for $\|z\|=1$, the maximum of $\|Tz\|$ is the norm of T; thus $\|T\|^2 = \mathrm{Max}(Tz\cdot Tz)$ for $\|z\|=1$. Now $Tz\cdot Tz = T^tTz\cdot z$, and note that T^tT is then a symmetric and pos. def. matrix, with positive eigenvalues $0<\lambda_1 \le \lambda_2$. We have $\|T\| = \lambda_2^{\frac{1}{2}}$.

Therefore $\lambda_1+\lambda_2 = |T|^2$, $\lambda_1\lambda_2 = (\det T)^2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[|T|^2 + \sqrt{|T|^4 - 4(\det T)^2}\right] = \|T\|^2$

In terms of complex representation $Pz + Q\bar z$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|T|^2 = |P|^2 + |Q|^2 \\ \det T = |P|^2 - |Q|^2 \qquad \text{Therefore } T \text{ is orientation-preserving} \iff |P|>|Q| \\ \|T\|^2 = \frac{1}{2}\left[|T|^2 + \sqrt{(|T|^2 - 2\det T)(|T|^2+2\det T)}\right] = \frac{1}{4}\left(\sqrt{|T|^2+2\det T} + \sqrt{|T|^2-2\det T}\right)^2 \\ \quad = \frac{1}{4}\left(\sqrt{4|P|^2} + \sqrt{4|Q|^2}\right)^2 = (|P|+|Q|)^2 \end{cases}$$

(1) Let k & K be defined by $0 \le k < 1$ and $K = \frac{1+k}{1-k}$, thus $K \ge 1$.

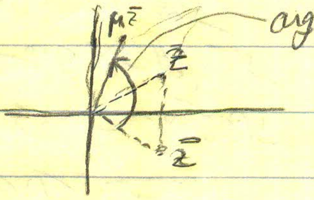


We claim that the following are equivalent: $|Q| \le k|P| \iff \|T\|^2 \le K \det T$ ($\det > 0$)

Pf $\|T\|^2 \le K\det T \iff (|P|+|Q|)^2 \le K(|P|^2 - |Q|^2) \iff (|P|^2+|Q|^2+2|P||Q|)(1-k) \le (1+k)(|P|^2-|Q|^2)$

$\iff -2k|P|^2 + 2|P||Q|(1-k) \le -2|Q|^2 \iff k|P|(|P|+|Q|) \ge |Q|(|Q|+|P|) \iff |Q| \le k|P|$

(2) $Pz + Q\bar z = P(z+\mu\bar z)$, where $\mu = \frac{Q}{P}$; thus $|\mu|<1$. P is conformal by multiplication, so the info for ellipse is encoded in μ



Major axis achieved when $\mathrm{Arg}\,\mu = 2\,\mathrm{Arg}\,z$, i.e, $\mathrm{Arg}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\,\mu$

Minor axis when $\mathrm{Arg}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}\,\mu \pm \frac{\pi}{2}$

$\|T\| = (1+|\mu|)|P|$

$K = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$, $k = |\mu|$

$U \overset{\text{باز}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(U)=\{\varphi: U\to\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C} \mid \varphi: C^\infty,\ \operatorname{supp}\varphi\subset U\}$

$\mathcal{D}(U)$ یک فضای برداری خطی است (روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$). مفهوم همگرایی در $\mathcal{D}(U)$: $\varphi_n\to\varphi$ در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

(i) زیرمجموعه فشرده K از U باشد که $\operatorname{supp}\varphi_n, \operatorname{supp}\varphi\subset K$

(ii) برای هر چندشاخص α، $D^\alpha\varphi_n\to D^\alpha\varphi$ به طور یکنواخت روی K.

$\mathcal{D}'(U)$: space of continuous linear functionals on $\mathcal{D}(U)$ (to $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$).
Continuity in the following sense: $T:\mathcal{D}(U)\xrightarrow{\text{lin}}\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ is continuous if $\varphi_n\to\varphi$ (in the sense above) $\Rightarrow T(\varphi_n)\to T(\varphi)$.

به جای $T(\varphi)$ از نمادهای $T[\varphi]$ یا $\langle T,\varphi\rangle$ نیز استفاده می‌شود. $\mathcal{D}'(U)$: فضای توزیع‌ها

مثال‌ها

(۱) فرض کنید $f\in L^1_{loc}(U)$، در این صورت $T_f\in\mathcal{D}'(U)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_f(\varphi)=\int_U f\cdot\varphi$$

پیوستگی از قضیه همگرایی کراندار نتیجه می‌شود.

تابع‌های معمولی را در $\mathcal{D}'$ شامل می‌شود. از این رو توزیع‌ها را به عنوان تعمیم توابع در نظر گرفته می‌شوند.

(۲) "تابع δ دیراک": فرض کنید $a\in U$. تعریف کنید $\delta_a:\mathcal{D}(U)\to\mathbb{R},\mathbb{C}$

$$\delta_a(\varphi)=\varphi(a)$$

مشتق توزیع را برای $T\in\mathcal{D}'(U)$ و چندشاخص α تعریف می‌کنیم

$$\varphi\in\mathcal{D}(U),\quad D^\alpha T(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)$$

انگیزه این تعریف انتگرال جزء به جزء در n متغیر است: اگر U مجموعه‌ای کراندار با مرز هموار ∂U باشد، u و v تابع‌های C^1 روی $\bar U$ که ... دارند، در این صورت

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dV=-\int_U u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dV+\int_{\partial U}uv\nu^i\,dS$$

که در آن $\nu=(\nu^1,\dots,\nu^n)$ قائم واحد رو به بیرون است. $D^\alpha T$ یک توزیع است و برای تابع‌های هموار این تعریف با تعریف معمول سازگار است.

مشتق ضعیف: فرض کنید $u,v\in L^1_{loc}(U)$ و α چندشاخص باشد. می‌گوییم v مشتق جزئی ضعیف مرتبه α ام u است، و می‌نویسیم $D^\alpha u=v$، در صورتی که برای هر $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ داشته باشیم:

$$\int_U uD^\alpha\varphi=(-1)^{|\alpha|}\int_U v\varphi$$

نکته: در صورت وجود، v تقریباً همه جا (یعنی به جز مجموعه‌ای با اندازه صفر) یکتا است، پس با مشتق به مفهوم توزیع نیز یکی است.

برای تابع های به $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$، به طور ترتیب $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ معنی دارد. هر چند برای $u\in L^1_{loc}(U)$ و هر α، $D^\alpha u$ به عنوان توزیع T_u همواره موجود است ولی ممکن است مشتق ضعیف وجود نداشته باشد.

(در کتاب distributional derivative به معنی مشتق ضعیف است نه مشتق به معنای distribution)

مثال

(۱) فرض کنید $f_1:]-1,0]\to\mathbb{R}$ و $f_2:[0,+1[\to\mathbb{R}$ تابع های پیوسته هستند که هر یک در درون بازه تعریف مشتق پذیر است و در انتهای بازه دارای مشتق یک طرفه. تعریف کنید:

$$f:]-1,1[\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x<0\\ c & x=0\\ f_2(x) & x>0\end{cases}\qquad c \text{ دلخواه}$$

می خواهیم مشتق ضعیف $g:]-1,1[\to\mathbb{R}$ را برای f بررسی کنیم. اگر g مشتق ضعیف f باشد، با توجه به تعریف، برای هر تابع آزمون $\varphi\in D(]-1,1[)$ باید داشته باشیم:

$$\int_{-1}^{+1} g\varphi=-\int_{-1}^{+1} f\varphi'=-\int_{-1}^{0} f_1(x)\varphi'(x)\,dx-\int_{0}^{1} f_2(x)\varphi'(x)\,dx$$

(انتگرال جزء به جزء)

$$=\int_{-1}^{0} f_1'(x)\varphi(x)\,dx-f_1(x)\varphi(x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{1} f_2'(x)\varphi(x)\,dx-f_2(x)\varphi(x)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\varphi(0)\big(f_2(0)-f_1(0)\big)+\int_{-1}^{+1} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

پس

$$(*)\qquad \int_{-1}^{+1}(g-f')\varphi=\varphi(0)\big(f_2(0)-f_1(0)\big)$$

حال اگر g مشتق ضعیف f باشد، $g-f'$ باید تقریباً همه جا صفر باشد، بنابراین طرف چپ صفر است. نتیجه اینکه شرط لازم و کافی برای وجود مشتق ضعیف این است که $f_1(0)=f_2(0)$ (زیرا $\varphi(0)$ می تواند ناصفر باشد) و در این صورت $g(x)=f_1'(x)$ برای $x<0$ و $g(x)=f_2'(x)$ برای $x>0$.

در حالتی که f_1 و f_2 تابع های ثابت باشند $f_1(x)\equiv a$، $f_2(x)\equiv b$، از $(*)$ نتیجه می گیریم که مشتق f به عنوان یک توزیع برابر $(b-a)\delta_0$ است که δ_0 تابع دیراک می باشد.

تمرین ۱ نشان دهید تابع کانتور $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ که همه جا پیوسته و تقریباً همه جا مشتق پذیر است مشتق ضعیف ندارد.

تمرین های ۲ و ۳ از کتاب Hubbard: به ترتیب 4.1.10 و 4.1.11. همه جا مشتق ضعیف به جای distributional derivative.

هموارسازی توابع: تابع هموار همه جا نامنفی $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را انتخاب می کنیم که تکیه گاه آن گوی واحد است، $\rho(x)$ فقط به $|x|$ وابسته است و $\int_{\mathbb{R}^n}\rho=1$. مثلاً می توان ρ را به صورت زیر در نظر گرفت:

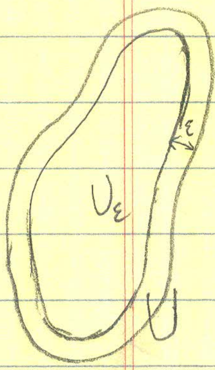
$$\rho(x)=\begin{cases} C\exp\left[\dfrac{-1}{1-|x|^2}\right] & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$$

که در اینجا ثابت C به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$. به ازای هر $\varepsilon > 0$، تعریف می‌کنیم

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

تکیه‌گاه ρ_ε در گوی بسته ε حول 0 قرار دارد و همچنان داریم $\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon = 1$.

فرض کنید U یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است و $f\in L^1_{loc}(U)$. برای $\varepsilon>0$، U^ε زیرمجموعه‌ای از نقاط U است که فاصله‌شان از مرز U بیشتر از ε است:



$$U^\varepsilon = \{x\in U \mid B_\varepsilon(x) \subset U\}$$

برای $f\in L^1_{loc}(U)$، تابع $f^\varepsilon : U^\varepsilon \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^\varepsilon = \rho_\varepsilon * f$$

که در اینجا $*$ عمل پیچش (convolution) است. پس

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \rho_\varepsilon(x-t)\,f(t)\,dt = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(t)\,f(x-t)\,dt$$

(t متغیر $\mathbb{R}^n$ است)

خواص مهم f^ε در قضیه زیر خلاصه شده است:

<u>قضیه</u> فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ باشد، $\varepsilon>0$ و $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ یک چندشاخص باشد، $f\in L^1_{loc}(U)$. در این صورت:

(۱) f^ε تابعی C^∞ روی U^ε است.

(۲) $f^\varepsilon \xrightarrow[a.e.]{} f$ وقتی $\varepsilon\to 0$.

(۳) اگر f پیوسته باشد، f^ε روی زیرمجموعه‌های فشرده U^ε به طور یکنواخت به f میل می‌کند.

(۴) $D^\alpha f^\varepsilon = (D^\alpha f)^\varepsilon$ در U^ε.

احکام بالا نتایج استانداردی هستند که اثبات آنها در بسیاری کتابها یافت می‌شود، از جمله:

L. C. Evans <u>Partial Differential Equations</u>

G. B. Folland <u>Real Analysis</u>

<u>گزاره</u> فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$ است، $\varepsilon>0$، و $f: U\to\mathbb{R}$ هارمونیک است. در این صورت $f^\varepsilon = f$ در U^ε.

<u>برهان</u> برای $a\in U^\varepsilon$ و $0\le r<\varepsilon$ طبق ویژگی مقدار میانگین تابع‌های هارمونیک داریم $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta$. پس:

$$f^\varepsilon(a) = \iint_{|z|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(z)\,f(a+z)\,dx\,dy$$

(انتگرال‌گیری با مختصات قطبی)

$$= \int_0^\varepsilon \left[\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right]\rho_\varepsilon(r)\,r\,dr$$

(چون ρ_ε به θ وابسته نیست)

$$= 2\pi f(a)\cdot\int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\,r\,dr = f(a)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\,r\,dr\right)$$

$$= f(a)\cdot\iint_{|z|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(z)\,dx\,dy = f(a)$$

چنان‌که حکم بود. □

۵

یادآوری

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

روابط کوشی-ریمان برای $f(z)$ معادل هستند با $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$

نتیجه: اگر مجموعه باز U در $\mathbb{C}$ و تابع مشتق‌پذیر (در متغیر حقیقی) $f: U \to \mathbb{R}$ داده شده باشد، f تحلیلی است (هلومرف است) اگر و فقط اگر $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ و در این صورت

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ (مشتق مختلط)

یادآوری لم Dolbeault و نتیجه‌اش در مورد لاپلاسین

لم در حقیقت حل معادله دیفرانسیل ناهمگن $\frac{\partial \psi}{\partial \bar z} = \phi$ است وقتی ϕ تابعی C^∞ باشد. این مسأله را برای $B_R(0)$ و $\mathbb{C}$ حل می‌سازد. حالت همگن آن تابع‌های هلومرف را می‌دهد. در مورد لاپلاسین، توجه کنید که

لم دلبو

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}$$

نشان دهید ψ_1 وجود دارد که $\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar z} = \phi$ و ψ_2 وجود دارد که $\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar z} = \bar\psi_1$. اگر قرار دهیم

$$\psi = \frac{1}{4}\bar\psi_2$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \bar\psi_2}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial \bar\psi_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar z}\overline{\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar z}\right)} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar z} = \phi$$

(کتاب Forster صفحات ۱۰۴-۱۰۷)

لم ـ U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $T\in\mathcal{D}'(U)$ به گونه‌ای است که $\Delta T=0$. در این صورت T یک تابع همساز است، یعنی تابع همساز $h:U\to\mathbb{R}$ وجود دارد که $T=T_h$.

برهان: برای هر $\varepsilon>0$، تابع هارمونیک $h=h_\varepsilon$ روی U_ε پیدا می‌کنیم به گونه‌ای که برای هر $\varphi\in\mathcal{D}(U_\varepsilon)$ داریم:

$$T(\varphi)=\iint_{U^\varepsilon} h_\varepsilon\cdot\varphi$$

حال اگر ε را کوچکتر از ε بگیریم، پس $U^{\varepsilon}\subset U^{\varepsilon}$ و h_ε و h_ε روی U^ε هم را باید باشند (به پیوستگی h_ε ها توجه کنید) و در نتیجه توسیع h_ε به h در سراسر U حاصل می‌شود. از این پس به جای h_ε می‌نویسیم h.

تعریف $h=h_\varepsilon$ روی U^ε: برای $z\in U^\varepsilon$ قرار می‌دهیم

$$h(z)=T(\rho_{\varepsilon,z})$$

که منظور از $\rho_{\varepsilon,z}$ تابعی است که به صورت $\rho_{\varepsilon,z}(\zeta)=\rho_\varepsilon(\zeta-z)$ هم تعریف می‌شود، پس تکیه‌گاه آن در گوی $\{\zeta \mid |\zeta-z|<\varepsilon\}$ به شعاع ε به مرکز z است. برای $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ که $\operatorname{supp}\varphi\subset U^\varepsilon$، ادعا می‌کنیم:

$$T(\varphi^\varepsilon)=\iint_{U^\varepsilon} h\cdot\varphi \qquad (1)$$

فعلاً (1) را فرض کنید. از لم Dolbeault می‌دانیم که اگر φ تابع C^∞ روی $B_R(0)$ $(0<R\le\infty)$ باشد، تابع ψ وجود دارد که $\Delta\psi=\phi$. این ψ بیرون تکیه‌گاه ϕ هارمونیک است. قرار می‌دهیم $V=\mathbb{C}-\operatorname{supp}\varphi$.

$$\psi=\psi^\varepsilon \quad \text{در } V^\varepsilon$$ (طبق گزاره ج)

بدین ترتیب $\theta=\psi-\psi^\varepsilon$ دارای تکیه‌گاه فشرده در U است، داریم:

$$\Delta\theta=\Delta(\psi-\psi^\varepsilon)=\Delta\psi-\Delta\psi^\varepsilon=\phi-\phi^\varepsilon$$

($\Delta\psi^\varepsilon=\phi^\varepsilon$ طبق (۴) صفحه بالا)

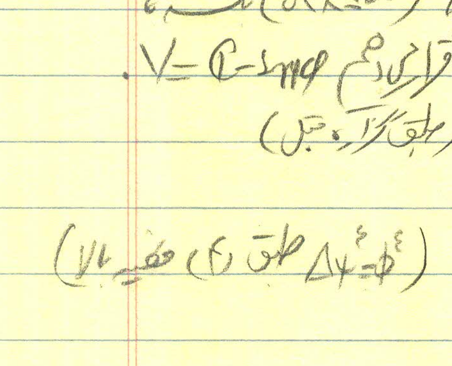
طبق فرض $\Delta T=0$، یعنی $T(\Delta\theta)=0$، پس

$$T(\phi)=T(\phi^\varepsilon)$$

که با توجه به (1) حکم را اثبات می‌کند. پس می‌ماند (1) را توجیه کنیم. درستی (1) از لم زیر که خود نتیجهٔ مهم پیوستگی T است نتیجه می‌شود.

لم ۶: U باز در $\mathbb{R}^n$، K فشرده در U، I بازهٔ باز در $\mathbb{R}$، $f: I\times U\xrightarrow{C^\infty}\mathbb{R}$ که $f(t,x)$ را به صورت $f_t(x)$ می‌نویسیم، و $\operatorname{supp} f_t\subset K$ برای هر $t\in I$. اگر $T\in\mathcal{D}'(U)$، برای هر $x\in U$، تابع $t\longmapsto T(f_t(x))$ یک تابع C^∞ است و

$$\frac{d}{dt}T(f_t(x))=T\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}(t,x)\right)$$



برهان: کافی است فرمول بالا ثابت شود، زیرا مشتق‌گیری تکرار می‌شود. داریم:

$$\frac{d}{dt}T(f_t(x))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[T(f(t+h,x))-T(f(t,x))\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}T\left[\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}\right] \quad (\text{خطی است } T)$$

که با توجه به تعریف پیوستگی T نتیجه می‌دهد. $\square$

نکته: در واقع به جای I می‌توانستیم از یک زیرمجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^k$ استفاده کنیم و به جای $\frac{d}{dt}$ مشتق‌های جزئی بگیریم.

لم ۲۱. U باز در $\mathbb{R}^m$، K فشرده در U، V باز در $\mathbb{R}^n$، L فشرده در V، $f: U\times V \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ به طوری که $\operatorname{supp} f \subset K\times L$. اگر T یک توزیع روی U باشد ($T\in\mathcal{D}'(U)$)، داریم

$$T\Big(\int_V f_x\Big) = \int_V T(f_y)$$

که در آن منظور از f_x (f_y) تحدید f به $\{x\}\times V$ (به ترتیب $U\times\{y\}$) است.

برهان نخست توجه کنید که بنابر لم ۱، $T(f_y)$ هموار است. پس طرف راست تعریف شده است. R را یک مستطیل n بعدی در $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم که شامل L است و f را به صورت ۰ بیرون $\operatorname{supp} f$ در $K\times R$ توسیع می‌دهیم. برای هر $k>0$، مستطیل R را به $N=k^n$ زیرمستطیل R_ν، $\nu=1,\dots,N$ تجزیه می‌کنیم (با اضلاع موازی محورهای $\mathbb{R}^n$). اگر A_R حجم n بعدی R باشد، مجموع ریمان برای $\int_V f_x$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S_N(x) = \frac{A}{N}\sum_{\nu=1}^{N} f_x(y_\nu)$$

، y_ν نقطه‌ای در زیرمستطیل ν-ام

توجه کنید که $\operatorname{supp} S_N$ در K قرار دارد. چون برابری همگرایی $S_N \to \int_V f_x$ در $\mathcal{D}(U)$، از پیوستگی T نتیجه می‌گیریم که:

$$T\Big(\int_V f_x\Big) = \lim_{N\to\infty} T(S_N(x)) = \int_V T(f_y)$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

نتیجه لم دایل. U باز در $\mathbb{C}$، $T\in\mathcal{D}'(U)$ به گونه‌ای است که $\frac{\partial T}{\partial \bar z}=0$. در این صورت $T=T_f$ برای یک تابع تحلیلی مناسب $f:U\to\mathbb{C}$.

برهان

$$\Delta T = 4\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial}{\partial \bar z}T\Big)=0$$

پس T هموار است و چون $\frac{\partial T}{\partial \bar z}=0$، تحلیلی است. □

حالت صفحه. $0\le k<1$ و $K\ge 1$ مانند آنچه در حالت خطی توصیف شد، $K=\frac{1+k}{1-k}$. U و V زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{C}$. دراین‌جا $h:U\to V$ C^∞ را K-شبه‌همدیس هموار می‌نامیم در صورتی که $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|\le k\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$ برقرار باشد. می‌نویسیم $Df(z_0)(w)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)w+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\bar w$. با نمادهای حالت خطی داریم $P=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$، $Q=\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)$ در نقطه z_0، و اگر $f(z)=u+iv$ آنگاه:

$$|Df(z_0)|^2=u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2=2\Big(\Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|^2\Big)$$

$$\|Df(z_0)\|^2=\Big(\Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|\Big)^2$$

$$\text{Jacobian}=\det Df(z_0)=\Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|^2-\Big|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|^2$$

شرط $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|\le k\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$ معادل می‌شود با $\|Df(z)\|^2\le K\cdot\det Df(z)$

تمرین ۴. برای نگاشت شبه‌همدیس C^∞ نشان دهید $|f_x|\le\|Df\|$ و $|f_y|\le\|Df\|$ و در صورتی که تساوی برقرار شود f همدیس است.

در لم (۱) معوض کردن (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $T(\varphi^\varepsilon)=T\iint_D \rho_{\varepsilon z}\,\varphi(z)\,dx\,dy=\iint_D h(z)\varphi(z)\,dx\,dy$

۷۱

توضیح اینکه چگونه فرمول (۱) صفحه ۶ از لم ۲ نتیجه می‌شود:

تعبیر لم ۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$T(F)=\int_V T(f_y)$$

که در آن‌ها $f_y=f|_{U\times\{y\}}$ و $F: U\to R$ به صورت $F(x)=\int_V f_x$ تعریف می‌شود ($f_x=f|_{\{x\}\times V}$)

در لم ۲، U را همان U می‌گیریم و $V=U^{\varepsilon}$ قرار می‌دهیم

$$f(\xi,z)=\rho_\varepsilon(\xi-z)\,\varphi(z)$$

پس برای $F=\varphi^{\varepsilon}$، داریم

$$T(\varphi^{\varepsilon})=\int_{U^{\varepsilon}} T\big(\rho_\varepsilon(\xi-z)\varphi(z)\big)\,dz$$

$$=\int_{U^{\varepsilon}} T\big(\underbrace{\rho_\varepsilon(\xi-z)}_{\rho_{\varepsilon,z}(\xi)}\big)\cdot\varphi(z)\,dz$$

$$=\int_{U^{\varepsilon}} h(z)\cdot\varphi(z)\,dz$$

(۸)

تعریف شبه‌همدیس q.c.: U و V دو زیرمجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$، K, k مثل قبل، همسانریختی $f: U \to V$ را **K-q.c.** می‌نامیم در صورتی که دارای مشتقات پاره‌ای ضعیف باشد که در L^2_{loc} هستند و داشته باشیم

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right| \underset{a.e.}{\le} k \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \quad (\text{یا نامساوی در } L^2_{loc})$$

نامساوی بالا به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$Jac\, f \underset{a.e.}{\ge} \frac{1}{K}\|Df\|^2 \quad (\text{یا به صورت توابع در } L^1)$$

اخطار: وجود a.e. مشتقات پاره‌ای به معنی وجود مشتق پاره‌ای ضعیف نیست.

فضاهای سوبولف $\mathcal{H}^1(U)$ و $CH^1(U)$: $U \overset{باز}{\subset} \mathbb{C}$ اولی مجموعه‌ی تابع‌های L^2 روی U که دارای مشتق ضعیف مرتبه‌ی اول در $L^2(U)$ هستند، دومی به علاوه پیوسته هم باشند. پس نگاشت‌های q.c. هم در $CH^1(U)$ هستند. توپولوژی روی $CH^1(U)$ توسط خانواده‌ای از نرم‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود: برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از U

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K}|f(z)| + \int_K \|[Df]\|^2\, dx\,dy$$

تمرین ۵ (۴.۲.۲ کتاب) در مورد $\ln|\ln|z||$ که در $\mathcal{H}^1(\mathbb{D})$ هست ولی در $CH^1(\mathbb{D})$ نیست.

گزاره: چگال بودن تابع‌های C^∞ در $CH^1(U)$. **برهان:** از f^ϵها استفاده می‌کنیم (جلسه‌ی ۲) صفحه‌ی ۴.

تعریف کلی را تا جایی که برای q.c. لازم است گفتیم:

$$\begin{cases} Jac\, f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2 \\ \|[Df]\| = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right| \end{cases}$$

حق با ایشان است. به درستی «تعلق» عناصر CH^1 تغییر کرد.

قضیه: $U, V \overset{باز}{\subset} \mathbb{C}$، $f: U \to V$ نگاشت سره و عضو CH^1. در این صورت برای هر تابع پیوسته و با تکیه‌گاه فشرده‌ی g در V داریم:

$$(\deg g)\int_V g = \int_U (g\circ f)(Jac\, f)$$

(یادآوری تعریف درجه از $f^*: H^n_c(V) \to H^n_c(U)$)

نتیجه: U و V دو زیرمجموعه‌ی باز در $\mathbb{C}$، $f: U \to V$ همسانریختی حافظ جهت و $f \in CH^1(U)$. در این صورت برای هر زیرمجموعه‌ی باز W از U داریم:

$$area\, f(W) = \int_W Jac\, f$$

T. Lance and E. Thomas ***Arcs with Positive Measure and a Space-Filling Curve***
Amer. Math. Monthly, February 1991, pp. 124-127.