①

بعضی ویژگی‌های سرتاسری خم‌های افقی

فرض کنید دیفرانسیل درجه ۲ هلومرف Q روی X داده شده است و $\gamma: I \to X$، I: یک بازه، یک خم افقی است به طوری که $\gamma(t_0+T)=\gamma(t_0)$ برای یک $t_0 \in I$ و $T>0$ به گونه‌ای که بازه $[t_0, t_0+T]$ تماماً در I قرار دارد و $Q(\gamma(t)) \neq 0$ برای هر t. تحدید γ به $[t_0, t_0+T]$ به خم افقی متناوب $\mathbb{R} \to X$ توسیع می‌یابد که همچنان به γ ... هم و به سبب تحلیلی بودن مختصات طبیعی، این توسیع همچنان توسیع $\gamma: I \to X$ آغازین است. ادعا می‌کنیم که بازه‌ای $J =]-\epsilon, \epsilon[$ وجود دارد و نگاشت $\Gamma: \mathbb{R}\times J \to X$ که $\Gamma(t,0)=\gamma(t)$ و برای هر $s \in J$، $\gamma_s = \Gamma|_{\mathbb{R}\times\{s\}}$ یک خم افقی با دوره تناوب T است و همه این خم‌ها یک طول (نسبت به متر طول وابسته به Q) برابر γ دارند. نخست توجه کنید که $\gamma: I \to X$ به نگاشت تحلیلی $\Gamma': I\times J \to X$ توسیع می‌یابد که $\Gamma'(I\times J)$ فاقد صفر Q است. ادعا می‌کنیم $\Gamma'(t,s) = \Gamma'(t+T,s)$ برای هر $t \in I$ و هر $s \in J$. حال $\Gamma'': I\times J \to X$ را به صورت $\Gamma''(t,s)=\Gamma'(t+T,s)$ تعریف می‌کنیم. Γ' و Γ'' هر دو تحلیلی هستند و روی یک بازه باز از $\mathbb{R}\times\{0\}$ برابرند، پس $\Gamma'=\Gamma''$ که نشان می‌دهد هر γ_s خم متناوب با دوره T است. در ضمن چون I در مختصات طبیعی برای Q قرار دارد، توسیع $I\times J$ را این‌گونه می‌توان گرفت که همچنان در این مختصات باقی بماند. در نتیجه مفهوم طول خم برای خم‌های γ_s همان مفهوم طول اقلیدسی است و در نتیجه γ_sها طول برابر دارند.

اگر γ افقی غیرمتناوب باشد و دامنه تعریف آن شامل $[0, \infty[$ باشد، $\gamma(0)=z_0$، وضعیت حدی γ را بررسی می‌کنیم. برای هر $T>0$ قرار دهید

$$X_T = \overline{\{\gamma(t) \mid t \geq T\}}$$

$$L^+(\gamma) = \bigcap_{T\geq 0} X_T$$

$L^+(\gamma)$ را مجموعه حدی مثبت γ می‌نامیم. فرض کنید X فشرده است. در این صورت ادعا می‌کنیم $L^+(\gamma)$ مجموعه‌ای ناتهی، فشرده، همبند و اجتماعی از خم‌های افقی است. ناتهی بودن و فشرده بودن نتیجه ساده فشردگی X است. اگر $L^+(\gamma)$ همبند نباشد، زیرمجموعه‌های L' و L'' از $L^+(\gamma)$ وجود دارد که $L' \cap L'' = \phi$، و همسایگی‌های باز U و V وجود دارند که $L' \subset U$ و $L'' \subset V$. هر X_T همبند است، پس اگر T_0 به اندازه کافی بزرگ باشد، X_{T_0} تماماً در یکی از U یا V قرار می‌گیرد. نتیجه اینکه برای $T \geq T_0$ نیز X_T باید در همان U یا V قرار گیرد، که نشان می‌دهد یکی از L' یا L'' باید تهی باشد، یعنی $L^+(\gamma)$ همبند است. بالاخره اگر نقطه z در $L^+(\gamma)$ باشد، استدلال ساده پیوستگی نشان می‌دهد که برای $t>0$ خم افقی $\lambda(t)$ که $\lambda(0)=z$ تماماً در $L^+(\gamma)$ قرار می‌گیرد و در نتیجه مطلوب به دست می‌آید. استدلال مشابه برای مجموعه حدی منفی γ، $L^-(\gamma)$، برقرار است:

$$L^-(\gamma) = \bigcap_{T\geq 0} Y_T \ , \quad Y_T = \overline{\{\gamma(t) \mid t \leq -T\}}$$

<u>نشان دهید که مدارهای افقی غیر تناوبی وقتی رویه‌ی ریمانی فشرده باشد و فرم درجه ۲ هلومورف</u>

ادعا می‌شود هر جهت مدار باید از یکی از سه نوع زیر باشد:

(۱) هر دو نیمه، مسیر بحرانی‌اند، به یک نقطه‌ی صفر میل می‌کنند و هر دو نیمه طول متناهی دارند. در این حالت L^+ و L^- هر یک از یک تک نقطه تشکیل شده است که هر دو حالت $L^+=L^-$ و $L^+\neq L^-$ ممکن است.

(۲) یکی از دو نیمه بالا "بحرانی" است، یعنی به یک صفر میل می‌کند و نیمه‌ی دیگر طول نامتناهی دارد که در این حالت مجموعه‌ی حدی این نیمه نامتناهی است.

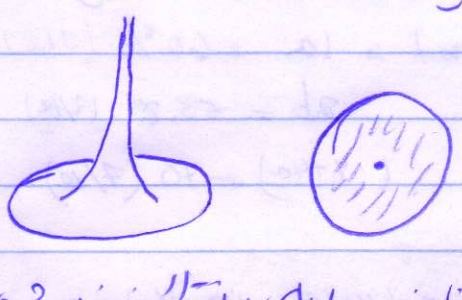
(۳) هر دو نیمه دارای مجموعه‌ی حدی نامتناهی و طول نامتناهی هستند (این نوع مدار را هیچ‌گاه نخواهیم دید).

ادعا: اگر L^+ حداقل دو نقطه داشته باشد، همراه هر نقطه‌ی $p\in L^+$ تمام مدار p و مجموعه‌ی حدی آن در L^+ خواهند بود. شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ی $z\in\gamma$ در $L^+(\gamma)$ قرار گیرد این است که $L^+=\bar{\gamma}$. در این صورت یا $L^+=L^-$ و یا L^- از یک نقطه‌ی صفر تشکیل شده است.

فرض کنید β یک بازه‌ی بسته‌ی قائم باشد که از نقطه‌ی z می‌گذرد و z یک نقطه‌ی انتهایی آن است. در این صورت برای هر نقطه‌ی z روی γ^+ نقطه‌ای z_1 وجود دارد که پس از z می‌آید و γ^+ بازه‌ی β را در جهت مثبت (همان جهت γ^+) در نقطه‌ی z_1 قطع می‌کند. نتیجه: اگر مجموعه‌ی حدی $L^+(\gamma)$ بیش از یک نقطه داشته باشد (از درون رویه‌ی فشرده)، آنگاه L^+ بازه‌ای است و $A^+=\bar{\gamma}^+$

نکاتی در مورد درس آقای لب آفرطب ۱۱٫۹٫۹۹

سطوح کلی یک رویه ریمانی از نوع متناهی (finite type) به رویه ریمانی اطلاق می‌شود که از حذف تعدادی متناهی نقطه از یک رویه ریمانی فشرده حاصل شود. این تعریف جامع نیست زیرا که پس از حذف نقطه ساختارهای مختلف روی رویه ریمانی حول آن روی رویه باقیمانده قرار گیرد. مثلاً اگر کره ریمان ساختار متری را بگیریم رویه ریمانی حاصل دیگر تام (complete) نخواهد بود زیرا که یک دنباله کوشی ممکن است به نقطه حذف شده میل کند، یا مثلاً یک ژئودزیک را نمی‌توان تا ابد ادامه داد. منظور در کتاب معمولاً ساختار دیگری است که نسبت به آن متریک هذلولوی تام (complete) داریم. مدل این کار استفاده از نقطه اول نقطه حذف شده همانند $\mathbb{D}^*=\mathbb{D}-\{0\}$ با متریک تمام آن است که شکل تجسم آن به جای شکل سمت راست، به صورت شکل سمت چپ مناسب‌تر باشد که در آن فاصله هذلولوی تا نقطه حذف شده بی‌نهایت نشان داده شده است. چنین نقطه‌های حذفی را معمولاً حفره (puncture = «پنچری») می‌نامند. به ازای هر نقطه حذف شده از شاخص اویلر یک عدد کم می‌شود زیرا که حفره‌ها حاصل هم‌ارز هموتوپیک با حفره‌ای است که از حذف یک همسایگی حول آن نقطه بدست می‌آید. بنابراین اگر از رویه دارای گونه g، n نقطه حذف کنیم، شاخص اویلر $(2-2g-n)$ خواهد شد.



حال یک فرم دیفرانسیل درجه ۲ روی $\mathbb{D}$ در نظر بگیرید که در ۰ یک قطب ساده دارد و در سایر نقاط هلومورف است. مثلاً یک فرم دیفرانسیل درجه ۲ هلومورف روی $\mathbb{D}^*$ داریم که رفتار آن در نزدیکی ساختن حفره ۰ مانند قطب ساده است. با انتخاب مختصات مناسب این فرم را می‌توانیم به $Q=\frac{1}{z}dz^2$ نمایش دهیم. در این صورت

$$\|Q\|_1=\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{|z|}|dz|^2=\int_0^{2\pi}\int_0^1 dr\,d\theta<\infty \quad \text{پس} \quad Q\in Q^1(\mathbb{D})$$

در واقع برای یک رویه ریمانی متناهی X از گونه g و با n حفره فرم دیفرانسیل درجه ۲ هلومورف با قطب ساده در حفره‌ها:

$$\|Q\|_1=\int_X|q(z)||dz|^2=\int_X\frac{|q(z)|}{\rho^2(z)}\rho^2(z)|dz|^2\le\|Q\|_\infty\int_X\rho^2(z)|dz|^2=(\text{مساحت هذلولوی } X)\|Q\|_\infty=(2g-2+n)\|Q\|_\infty \qquad (*)$$

حالت دوم را در نظر می‌گیریم $Q\in Q^\infty(X)$ یعنی $\|Q\|_\infty<\infty$: $\mathbb{D}^*$ همراه با متریک $\mathbb{H}/z\mapsto z+1$ است $w\mapsto e^{2\pi i w}=z$ عنصر سطح هذلولوی $\mathbb{H}$ هست $\frac{du\wedge dv}{v^2}$ که روی $w=u+iv$ عنصر سطح $\mathbb{D}^*$ را $\frac{dx\wedge dy}{|z|^2(\ln|z|)^2}$، $z=x+iy$ القا می‌کند. اگر قرار دهیم $|z|=r$، در مختصات قطبی این عنصر سطح هست $\frac{1}{r(\ln r)^2}dr\wedge d\theta$، بنابراین

$$\frac{\frac{1}{|z|}|dz|^2}{\frac{|dz|^2}{|z|^2(\ln|z|)^2}}=r(\ln r)^2\xrightarrow[r\to 0]{}0$$

پس کراندار است و $\|Q\|_\infty<\infty$. هر دو نتیجه (*) نشان می‌دهد $Q^1(X)\subset Q^\infty(X)$ به معنی تفاوت‌هایی تحلیلی آنها. ظاهراً هم‌چنین می‌توان نشان داد $Q^1(X)=Q^\infty(X)$ اما این است که همه این رویه‌ها با هم متناهی اند و در کل هستند.

رویه‌های شبه‌همدیس و فرم بلترامی روی آنها

$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$: خانواده‌ای از رویه‌های ریمانی روی یک فضای توپولوژیک مشترک که برای $\alpha,\beta\in A$، نگاشت همانی $X_\alpha\to X_\beta$ شبه‌همدیس است. این رابطه شبه‌همدیسی سه ویژگی رابطه هم‌ارزی را دارد، به این ترتیب چنین Xهایی رده هم‌ارزی به وجود می‌آورند که ترکیبی از ساختار هر یک از X_αها را دارد و اگر هر ساختار رویه ریمانی هر یک از X_αها را بپذیریم، دیگر ساختار رویه ریمانی ارجحی ندارد. X را یک رویه شبه‌همدیس می‌نامیم. گاهی X را با $qc(X_\alpha)$ نیز نمایش می‌دهیم.

اگر $X=qc(X_i)$، $i\in I$، و $Y=qc(Y_j)$، $j\in J$، دو رویه شبه‌همدیس باشند، همسانریختی $h:X\to Y$ را شبه‌همدیس می‌نامیم اگر نگاشت متناظر $h_{ij}:X_i\to Y_j$ شبه‌همدیس باشد. این تعریف مستقل از اندیس‌های خاص خود است: اگر $a_i:X_i\to qc(X_i)=X$ و $b_j:Y_j\to qc(Y_j)=Y$ نگاشت‌های قاب قسمتی باشند، $h_{ij}=b_j^{-1}\circ h\circ a_i$، داریم که ترکیب نگاشت‌های شبه‌همدیس، شبه‌همدیس است و نگاشت‌های همانی $X_i\to X_{i'}$ و $Y_j\to Y_{j'}$ شبه‌همدیس هستند، این تعریف مستقل از i و j خاص است. همچنین توجه کنید که هر همسانریختی شبه‌همدیس $Y\to X$ خود به خود یک یکریختی در کاتگوری فضاهای شبه‌همدیس می‌شود.

تحت بالا این را می‌توان به ساختن کاتگوری رویه‌های شبه‌همدیس به عنوان کاتگوری خارج قسمت رویه‌های ریمانی تلقی کرد.

نکته: اگر همسانریختی جهت‌نگهدار $h:X\to Y$ بین دو رویه شبه‌همدیس فشرده موجود باشد، آنگاه X و Y به عنوان رویه‌های شبه‌همدیس یکریخت هستند. دلیل این است که طبق رده‌بندی رویه‌های فشرده، وجود h نتیجه می‌دهد که یک دیفئومورفیسم (همسانریختی ≡ diffeomorphism) جهت‌نگهدار بین X و Y موجود است و هر چنین دیفئومورفیسمی شبه‌همدیس است.

فرم بلترامی روی رویه شبه‌همدیس

فرض کنید X یک رویه شبه‌همدیس است، R_1 و R_2 دو رویه ریمانی، $\mu_1\in M(R_1)$ و $\mu_2\in M(R_2)$ دو فرم بلترامی به ترتیب روی R_1 و R_2. اگر $h_1:X\to qc(R_1)$ و $h_2:X\to qc(R_2)$ یکریختی‌های شبه‌همدیس باشند، می‌نویسیم:

$$(h_1,\mu_1)\underset{X}{\sim}(h_2,\mu_2)$$

در صورتی که $\mu_2=(h_1\circ h_2^{-1})^*\mu_1$. طبق تعریف $M(X)$ متشکل از زوج‌های هم‌ارز تحت $\underset{X}{\sim}$ است. اتفاقاً تعریف این شکل یک به یک دوسویه است. توجه کنید که اگر $\mu'=(h_1\circ h_1^{-1})^*\mu$، این بدین معناست که $\mu'=\mu$، پس تناظر یک به یک است. از طرف دیگر اعضای $M(R_1)$ و $M(R_2)$ با یکدیگر در تناظر یک به یک هستند زیرا که $h_1\circ h_2^{-1}$ شبه‌همدیس (به طور خاص ...) است، پس طبق گزاره 4.8.17 کتاب بین خمینه‌های تحلیلی باناخ $M(R_1)$ و $M(R_2)$ یک یکریختی تحلیلی وجود دارد. همچنین این یکریختی تحلیلی نشان می‌دهد که می‌توانیم $M(X)$ را بدون ابهام به عنوان خمینه تحلیلی باناخ یکریخت با $M(R_i)$ در نظر بگیریم.

[illegible]

درباره گزاره 6.2.7 کتاب Hubbard

صورت دقیق قضیه: Y و T منیفلدهای تحلیلی با بعد هستند و T همبند، $p: Y \to T$ استغراق تحلیلی به گونه‌ای که هر تار $p^{-1}(t)$ ساختار رویه ریمانی دارد. فرض کنید رویه ریمانی S وجود دارد و $h: T\times S \to Y$ یک بدیهی‌سازی افقی تحلیلی است. در این صورت برای هر $t_1, t_2 \in T$، همسانریختی $h_{t_2}^{t_1}: p^{-1}(t_1)\to p^{-1}(t_2)$ که به صورت:

$$y \xmapsto{h^{-1}} (t_1,s) \longmapsto (t_2,s) \xmapsto{h} h_{t_2}^{t_1}(y)$$

تعریف می‌شود شبه همدیس است.

برهان: توجه کنید که برای $t_1=t_2$، طبق تعریف بالا $h_{t_1}^{t_1}=h_{t_2}^{t_2}$ برابر نگاشت همانی است، بنابراین کافی است نقطه‌ای $t_0\in T$ ثابت کنیم، قرار دهیم $S=p^{-1}(t_0)$ و نشان دهیم نگاشت $\varphi_t: S\to p^{-1}(t)$ که به صورت $h_t^{t_0}$ تعریف می‌شود، شبه همدیس است. به علاوه چون T همبند فرض شده است، و ترکیب تعداد متناهی شبه همدیس، شبه همدیس است، کافی است حکم برای t های به اندازه کافی نزدیک به t_0 ثابت شود. به علاوه برای این، کفایت می‌کند که برای گوی‌های یک بعدی (نقشه مختلط) با شعاع به اندازه کافی کوچک به مرکز t_0 که در T قرار دارند حکم به اثبات برسد زیرا که هر t در یک چنین گویی قرار می‌گیرد. بدین ترتیب از این پس، به جای همه T، یک گوی D (همسانریخت تحلیلی با $\mathbb{D}$) به مرکز t_0 را جایگزین می‌کنیم و در صورت لزوم شعاع آن را کوچکتر می‌کنیم. بدین ترتیب کل بحث در یک خانواده تحلیلی دو بعدی $p^{-1}(D)$ متمرکز خواهد بود. نقشه مختصاتی (ζ, V) روی S را در نظر می‌گیریم و برای ساده نشان دادن، V و $\zeta(V)$ را زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{C}$ فرض می‌کنیم. با کوچکتر کردن V به W و کوچک ساختن شعاع D به مرکز t_0، در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که برای $(t,w)\in D\times W$، $h(t,w)\in\zeta(V)$. حال در وضعیت λ-Lemma قرار داریم: تابع

$$h: D\times W \longrightarrow \zeta(V)\subset\mathbb{C}$$

تعریف شده است که (i) برای هر $\lambda\in D$ ثابت، $h(\lambda,w)$ یک به یک است، (ii) برای w ثابت، $h(t,w)$ نسبت به t تحلیلی است (شرط افقی سازی تحلیلی)، و (iii) $h(t_0,w)=w$ برای هر $w\in W$.

بنابراین از λ-Lemma نتیجه می‌گیریم که $\varphi_t|_W: W\longrightarrow\varphi_t(W)$ شبه همدیس است. برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم ضریب شبه همدیسی K_W این نگاشت به W خاص بستگی ندارد، آنگاه با پوشاندن S با تکه‌های مختصاتی نتیجه می‌شود که $\varphi_t: S\to p^{-1}(t)$ شبه همدیس خواهد بود.

با تغییر مقیاس (تبدیل مختصات خطی)، می‌توان فرض کرد که $D=\mathbb{D}$ و $t_0=0$. آنگاه برای هر $(t,w)\in \mathbb{D}\times W$، ضریب بلترامی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$K_t = \frac{\frac{\partial}{\partial \bar z} h(t,w)}{\frac{\partial}{\partial z} h(t,w)} \in \mathbb{D}$$

در اینجا z مختصه‌ی روی W است. توجه کنید که این عبارت نسبت به t تحلیلی است زیرا که برای w ثابت، $h(t,w)$ یک یکنواخت‌سازی تحلیلی است (تابع تحلیلی نسبت به t)، و مشتق‌گیری بالا نسبت به z است (ضمناً توجه داشته باشید که در مورد مشتق ضعیف مشتق‌گیری در داخل انتگرال صورت می‌گیرد، و همچنان تحلیلی بودن نسبت به t حفظ می‌شود). بدین ترتیب تابع تحلیلی

$$K : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad t \mapsto K_t$$

درست است. به علاوه داریم $K_0 = 0$ زیرا که $h(t_0, w) = w$ (زیرا تحدید h به S همانی است)، پس تحلیلی است و ضریب بلترامی آن صفر است. از لم شوارتس نتیجه می‌گیریم که $|K_t| \le |t|$، یعنی $|K_t|$ به W بستگی ندارد و حکم به اثبات می‌رسد. □

چند نکته ظریف

(۱) شرط یکنواخت‌سازی افقی (حتی نوع ضعیف آن) یک نقطه‌ی صفر تحلیلی $t \mapsto \varphi(t,z)$ ایجاب می‌کند و با مشتق‌گیری از φ pos= می‌بینیم که مشتق ... است، پس در نقطه‌ی (t,z) فضای مماس بر ۲ را می‌شکافد (splits). بدین ترتیب شرط برقراری قضیه‌ی رتبه موجود است و می‌توان حکم کرد که تارهای $h^{-1}(t)$ زیرخمینه‌های تحلیلی ۲ هستند. بدون قضیه‌ی 6.2.7، با استفاده از ... $h^{-1}(t)$ در واقع ... به عنوان زیرخمینه‌ی ۲ است. (ضمیمه A5 کتاب ...)

(۲) صورت قضیه 6.27 به صورتی که در کتاب آمده کمی فاقد دقت بنظر می‌رسد. می‌بایست فرض می‌کرد $h(t_0, x_0) = x_0$ برای $x_0 \in X_0$ (یا حداقل اینکه $(t_0, x) \mapsto h(t_0, x)$ ... هموتوپیک باشد)، وگرنه به کار گرفتن λ-Lemma ممکن نمی‌شود و به نوعی کاربرد "نوع حرکت عمودی" در امتداد $h^{-1}(t)$ که ... نباشد، حکم قضیه را نقض می‌کند. شیوه‌ی اشاره شده در صفحه‌ی قبل این مشکل را ندارد.