Mapping Theorem

گام اول فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $\mu : U \to \mathbb{C}$ نگاشتی تحلیلی حقیقی در C^{ω} که $\|\mu\|_\infty < 1$. در اینصورت برای هر $z_0 \in U$، همسایگی V از z_0 وجود دارد، $V \subset U$، و تابع تحلیلی حقیقی $f : V \to \mathbb{C}$ که همسانریختی با تصویر خود است و در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \mu \frac{\partial f}{\partial z}$$

به علاوه اگر W همسایگی دیگری از z_0 و $g : W \to \mathbb{C}$ جواب دیگری با همان شرایط باشد، نگاشتی تحلیلی مختلط $\phi : f(V \cap W) \to g(V \cap W)$ وجود دارد که $\phi \circ f = g$.

برهان. دامنه μ را به صورت زیرمجموعه‌ای باز در $\mathbb{C}^2$ توسعه می‌دهیم: هر نقطه $x+iy = (x,y) \in U$ را به صورت $(x+i\cdot 0, y+i\cdot 0) = ((x,0),(y,0)) \in \mathbb{C}^2$ در نظر بگیرید. چون $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ یک تابع حقیقی تحلیلی است، پس می‌توان آن را به تابعی تحلیلی مختلط توسعه داد و در نتیجه دامنه μ به مجموعه‌ای باز $\tilde{U}$ در $\mathbb{C}^2$ توسعه می‌یابد که $\tilde{U} \cap ((\mathbb{R}\times\{0\}) \times (\mathbb{R}\times\{0\}))$ همان U است. نقاط $\tilde{U}$ را به (X,Y) نمایش می‌دهیم که $X = x+ix'$ و $Y = y+iy'$.

معادله بلترامی، یعنی $(*)$، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar Z} = \mu \frac{\partial f}{\partial Z}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial X} + i\frac{\partial f}{\partial Y}\right) = \mu\left(\frac{\partial f}{\partial X} - i\frac{\partial f}{\partial Y}\right)$$

یا

$$(**) \qquad (1-\mu)\frac{\partial f}{\partial X} + i(1+\mu)\frac{\partial f}{\partial Y} = 0$$

که می‌توان آن را به صورت‌های زیر نوشت:

$$(***) \qquad \frac{dY}{dX} = i\,\frac{1+\mu}{1-\mu}$$

یا دستگاه:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = 1-\mu \\[2mm] \dfrac{dY}{dT} = i(1+\mu) \end{cases}$$

اگر $f(X,Y)$ تابعی باشد که روی هر جواب $(X(T), Y(T))$ این دستگاه یک مقدار ثابت می‌گیرد، از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که $\frac{df}{dT} = 0$، پس f جواب معادله $(**)$ است. همسایگی $\tilde{U}$ از U را آنقدر کوچک می‌گیریم که همچنان برای توسعه μ به $\tilde{U}$ داشته باشیم $\|\mu\|_\infty < 1$، بنابراین هیچیک از دو مؤلفه طرف راست دستگاه معادله دیفرانسیل بالا صفر نمی‌شوند. نتیجه اینکه برای هر X_0 ثابت، صفحه $\Sigma : X = X_0$ جواب‌ها را به طور متقاطع (transverse) قطع می‌کند، یعنی بر جواب‌ها مماس نمی‌شود.

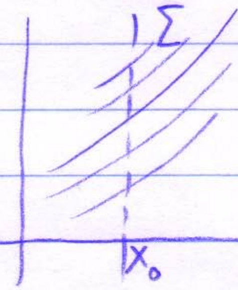
بنابراین طبق قضیه‌ای استاندارد در تئوری معادلات دیفرانسیل عادی (*)، برای هر (X_0, Y_0) در آن، همسایگی باز Ω از (X_0, Y_0) و تابعی تحلیلی $T: \Omega \to \mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $(X, Y) \in \Omega$:

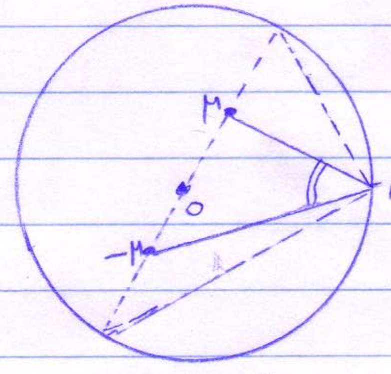
$$\phi_{T(X,Y)}(X, Y) \in \Sigma$$

در اینجا ϕ شارهٔ دستگاه معادله دیفرانسیل است. بدین ترتیب $\phi_{T(X,Y)}(X, Y) = (X_0, Y_1)$. مقدار Y_1 را به $f(X, Y)$ نمایش می‌دهیم و ادعا می‌کنیم اگر (X, Y) در $(\mathbb{R}\times\{0\})\times(\mathbb{R}\times\{0\})$ باشد، تصویر انگشتی $f(X, Y)$ روی $(\mathbb{R}\times\{0\})\times(\mathbb{R}\times\{0\})$ جواب مورد نظر مسئله بالا است. توجه کنید که چون برای $X = X_0$، $T(X_0, Y) = 0$، $f(X_0, Y) = Y$، پس $\frac{\partial f}{\partial Y}(X_0, Y_0)$ به صورت ماتریس 2×2 برابر $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ است و اگر بنویسیم $Y = (y, y')$، $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$. همچنین اگر بنویسیم $X = (x, x')$، از قضیهٔ تابع ضمنی و (***) نتیجه می‌شود که $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{1+\mu}{1-\mu}$. ماتریس مشتق $f = (f_1, f_2)$ در نقطهٔ $((x, 0), (y, 0))$ یک ماتریس 2×4 به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x'} & 1 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x'} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مشتق انگشتی روی $(\mathbb{R}\times\{0\})\times(\mathbb{R}\times\{0\})$ از ستون‌های اول و سوم تشکیل شده است. پس برای اینکه ثابت کنیم تصویر روی صفحه‌های اول و ۳ هم ارزی است، طبق قضیهٔ تابع وارون کافی است ثابت کنیم درایهٔ ماتریس ستون‌های اول و ۳ ناصفر است یعنی $\frac{\partial f_2}{\partial x}((x_0, 0), (y_0, 0)) \neq 0$. ولی این عدد مؤلفهٔ موهومی $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{1+\mu}{1-\mu}$ است، پس کافی است ثابت کنیم $\frac{1+\mu}{1-\mu}$ نمی‌تواند موهومی محض باشد. با توجه به اینکه μ درون D قرار دارد زاویه بین خطوط واصل از 1 به μ و $-\mu$ باید کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد و حکم در مورد این f به اثبات می‌رسد. ضمناً چون این تصویر جواب دیگر Σ تابعی تحلیلی از X





می‌شود، و $Y = f(X)$، گذر از این جواب به جواب دیگر با یک نگاشت تحلیلی است.

(*) لطفاً مراجعه کنید به صفحه ۲۲۰ از کتاب زیر (از قضیهٔ flow box هم نتیجه می‌گردد با توجه به اینکه در هر دو طرف ...)

Hirsch-Smale-Devaney Diff. Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos

گام دوم

در اینجا $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ را بدون شرط تحلیلی حقیقی در نظر می‌گیریم که همچنان $\|\mu\|_\infty \le k < 1$، ولی فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه μ فشرده است، مثلاً $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{D}$. نشان خواهیم داد که مسئله بلترامی جوابی سرتاسری دارد (یعنی در سراسر $\mathbb{C}$ تعریف شده است) که این جواب یک همسانریختی K-شبه‌همدیس است ($K=\frac{1+k}{1-k}$). برای این منظور از نظریه توزیع لُرَنت ـ تابع‌های آزمون تعریف شده روی $\mathbb{C}$ که هموار هستند و خود و مشتقات آنها به سرعت به صفر میل می‌کنند استفاده می‌کنیم. به طور دقیق، $\mathcal{S}$ را فضای $\mathbb{R}$-خطی تابع‌های $f:\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ می‌گیریم که C^∞ هستند، و برای هر $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ و N که α_1,α_2 و N اعداد صحیح نامنفی هستند:

$$\frac{|D^\alpha f(z)|}{1+|z|^N} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$$

(البته منظور از $D^\alpha f$ همان $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}} f$ است.) فضای توزیع‌ها در ذیل، فضای خطی دوگان $\mathcal{S}$، یعنی $\mathcal{S}'$ متشکل از تابع‌های خطی پیوسته $\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ است (پیوستگی مانند حالت $\mathcal{D}$ برحسب همگرایی دنباله‌ها تعریف می‌شود). پیچش (convolution) مانند قبل تعریف می‌شود:

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}^2} f(t)g(x-t)\,dt$$

که می‌توان ثابت کرد اگر یک تابع در $\mathcal{S}$ و دیگری در $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ باشد، انتگرال فوق همگراست. در واقع مطلب زیر نیز که حالت خاصی از نامساوی Young است نیز مورد استفاده خواهد بود:

فرض کنید $1\le p,q,r\le+\infty$ که در آن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. در این صورت اگر $f\in L^p$ و $g\in L^q$، آنگاه $f*g\in L^r$ و $\|f*g\|_r\le\|f\|_p\cdot\|g\|_q$.

هموارسازی مشابه حالت $\mathcal{D}$ تعریف می‌شود با این تفاوت که از $\eta\in\mathcal{S}$ استفاده می‌کنیم:

$$\eta(z)=\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$$

برای هر $\varepsilon>0$، $\eta_\varepsilon(z)=\frac{1}{\varepsilon^2}\eta(\frac{z}{\varepsilon})$ و مقدار انتگرال هر یک از η و η_εها روی $\mathbb{R}^2$ برابر 1 است. برای $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$، تابع f_ε به صورت $f_\varepsilon=\eta_\varepsilon*f$ تعریف می‌شود و از خواص همگرایی مشابه حالت $\mathcal{D}$ وقتی $\varepsilon\to 0$ برخوردار است. به علاوه توجه کنید که در اینجا η (و η_εها) تابع‌های تحلیلی حقیقی‌اند و می‌توان با استفاده از قضیه همگرایی لبگ (تعویض ترتیب انتگرال و جمع سری) مشاهده کرد که f_εها نه تنها C^∞، بلکه تحلیلی حقیقی‌اند.

به مسئله باز می‌گردیم. برای μ بالا، و هر $\varepsilon>0$، $\mu_\varepsilon=\eta_\varepsilon*\mu$ را در نظر می‌گیریم که تحلیلی حقیقی است. طبق گام اول برای $z\in\mathbb{C}$، معادله بلترامی

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\mu_\varepsilon\cdot\frac{\partial f}{\partial z}$$ (طبق نامساوی Young، $\|\mu_\varepsilon\|_\infty\le k<1$)

جواب‌های معادله تحلیلی حقیقی در یک همسایگی z دارا است، و نکته مهم آنکه اختلاف هر دو جواب موضعی، ترکیب با یک تابع تحلیلی مختلط تحلیلی است: اگر φ_1 و φ_2 دو جواب باشند، $\varphi_2 = h\circ\varphi_1$ در دامنهٔ مشترک X، و $h:\varphi_1(X)\to\varphi_2(X)$ تحلیلی مختلط (همدیس) است. از اینکه گذر از یک جواب به جواب دیگر یک تابع تحلیلی مختلط است، نتیجه می‌گیریم که روی $\mathbb{C}$ یک اطلس پدید می‌آید که ساختار سطح ریمانی جدیدی روی $\mathbb{C}$ بنا می‌کند که آن $\mathbb{C}$ را $\mathbb{C}_\varepsilon$ نمایش می‌دهیم.
از قضیهٔ یکنواخت‌سازی نتیجه می‌شود که یک یکریختی تحلیلی H_ε از $\mathbb{C}_\varepsilon$ به $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{D}$ باید وجود داشته باشد که به سبب قضیهٔ لیوویل، $\mathbb{D}$ امکان‌پذیر نیست و $H_\varepsilon:\mathbb{C}_\varepsilon\to\mathbb{C}$. حال با توجه به معنی مفهوم تحلیلی بودن نسبت به اطلس‌ها، تحلیلی بودن H_ε به معنی K-شبه‌همدیس بودن نسبت به ساختار استاندارد $\mathbb{C}$ است زیرا که اطلس $\mathbb{C}_\varepsilon$ از همسایگی‌هایی ساخته شده که جواب معادلهٔ بلترامی با $\|\mu\|\le k$ هستند. هدف ما این است که ثابت کنیم دنباله‌ای از H_ε های کران‌دار یافت که وقتی $\varepsilon\to 0$، H_ε به جواب مورد نظر معادلهٔ بلترامی میل می‌کند. با انجام یک تبدیل روی $\mathbb{C}$، از این پس فرض می‌کنیم برای هر ε داریم $H_\varepsilon(0)=0$. ضمناً چون هر H_ε در سراسر $\mathbb{C}_\varepsilon$ تعریف شده و یک همسانریختی است، برای گوی باز شعاع ۱ حول 0، $\mathbb{D}_1$، $H_\varepsilon(\mathbb{D}_1)$ کران‌دار است (زیرا H_ε بستار $\mathbb{D}_1$ را به یک فشرده می‌نگارد).
لم زیر به روشی مشابه به Corollary 4.4.3 کتاب به اثبات می‌رسد:

__لم__ برای هر $\varepsilon>0$ و هر $r,R>0$، دسته همه نگاشت‌های K-شبه‌همدیس f که $f(\mathbb{D}_r)\subset\mathbb{D}_R$ و $f(0)=0$ در توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، فشرده است، یعنی هر دنباله دارای زیردنباله‌ای است که در این توپولوژی به یک عضو از این خانواده میل می‌کند.

با در دست داشتن این لم، به صورت زیر عمل می‌کنیم: دنبالهٔ $f_n = H_{\frac{1}{n}}$ را در نظر می‌گیریم که دارای زیردنباله‌ای همگرا (f_{1n}) است. قرار می‌دهیم $k_1=1$ و $k_2\ge 2$ را طوری می‌گیریم که تصویر $\mathbb{D}=\mathbb{D}_1$ تحت تقریب حد (f_{1n}) در $\mathbb{D}_{k_2}$ واقع شود. حال دنبالهٔ (f_{1n}) روی $\mathbb{D}_{k_2}$ خود دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند (f_{2n}) است و $k_3\ge 3$ را طوری می‌گیریم که تصویر $\mathbb{D}_{k_2}$ تحت حد (f_{2n}) در $\mathbb{D}_{k_3}$ واقع شود. این فرایند را به طور استقرایی ادامه می‌دهیم و دنبالهٔ قطری $g_n = f_{nn}$ را در نظر می‌گیریم که در توپولوژی همگرایی یکنواخت روی فشرده‌ها به یک نگاشت K-شبه‌همدیس f میل می‌کند. مشتق‌های مرتبهٔ اول اعضای دنباله به طور ضعیف در L^2 به مشتقات متناظر f میل می‌کنند، با ارائهٔ لم 4.6.3 کتاب Hubbard که اثبات آن این‌جا ارائه نخواهد شد، اثبات گام ۲ را کامل می‌کند.

__گام سوم__ در حالت کلی می‌خواهیم شرط فشرده بودن تکیه‌گاه μ را که در گام دوم اعمال شد حذف کنیم.

نخست مفهوم هنجار (normalized) بودن یک جواب ترسایی کلی معادله بلترامی برای $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$ را معرفی کنیم. توجه کنید که برای هر جواب ترسایی که یک همسانریختی $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ خواهد بود، می‌توانیم فرض کنیم $f(\infty)=\infty$ و یک همسانریختی شبه‌همدیس کره‌ی $\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ به دست آورده‌ایم. از آنجایی که تنها اختلاف دو جواب از ترکیب با یک نگاشت تحلیلی همدیس حاصل می‌شود و تنها تبدیلات همدیس کره که چون ترایایی کره هم هستند که هر یک با اثرش روی سه نقطه مشخص می‌گردد، برای یکتایی جواب باید اثر آن را روی سه نقطه معین کنیم. جواب هنجار معادله بلترامی جوابی f است که $f(0)=0$، $f(1)=1$ و $f(\infty)=\infty$.

از تابع f که در گام ۲ به دست آمد $f(0)=0$ و $f(\infty)=\infty$. می‌توانیم با ترکیب با یک نگاشت همدیس $z\mapsto Az$، $A=|A|e^{i\theta}$ شرط $f(1)=1$ را نیز تحمیل کنیم. به این ترتیب ثابت شد که برای $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$ با تکیه‌گاه فشرده، یک و تنها یک جواب هنجار معادله بلترامی وجود دارد. اکنون به حالت کلی می‌پردازیم که شرط فشرده بودن تکیه‌گاه μ حذف می‌گردد.

لم فرض کنید $f:V\to W$ و $g:V\to W'$ همسانریختی‌های شبه‌همدیس با ضریب بلترامی به ترتیب μ_f و μ_g باشند. در این صورت $g\circ f^{-1}:W\to W'$ نیز شبه‌همدیس است و ضریب بلترامی آن مطابق دستور زیر است:

$$\mu_{g\circ f^{-1}}\circ f=\frac{f_z}{\overline{(f_z)}}\cdot\frac{\mu_g-\mu_f}{1-\bar{\mu}_f\mu_g}$$

برهان: طبق قاعده زنجیری:

$$\begin{cases} g_z=((g\circ f^{-1})_w\circ f)\cdot f_z+((g\circ f^{-1})_{\bar w}\circ f)\cdot(\bar f)_z=((g\circ f^{-1})_w\circ f)\cdot f_z+((g\circ f^{-1})_{\bar w}\circ f)\cdot\overline{(\mu_f\cdot f_z)} & \left(\text{توجه: } (\bar f)_z=\overline{f_{\bar z}}\right)\\ g_{\bar z}=((g\circ f^{-1})_w\circ f)\cdot f_{\bar z}+((g\circ f^{-1})_{\bar w}\circ f)\cdot\bar w_{\bar z}=((g\circ f^{-1})_w\circ f)\cdot f_{\bar z}+((g\circ f^{-1})_{\bar w}\circ f)\cdot\overline{(f_z)} \end{cases}$$

چون $g_z\neq 0$، می‌توان $\frac{g_{\bar z}}{g_z}$ را در نظر گرفت و از رابطه به دست آمده، فرمول لم را استخراج کرد. همچنین یادآوری می‌کنیم که در حالت کلی ثابت شده است که وارون و ترکیب نگاشت‌های شبه‌همدیس نیز شبه‌همدیس هستند. □

بازگشت به برهان: نخست فرض کنید ضریب بلترامی $\mu_0\in L^\infty(\mathbb{C})$ به گونه‌ای است که در یک همسایگی 0 برابر صفر است. با استفاده از نگاشت $z\mapsto\frac{1}{z}$ و قاعده زنجیری μ_0 را به $\tilde{\mu}_0$ تبدیل می‌کنیم که تکیه‌گاه آن فشرده است:

$$\tilde{\mu}_0(z)=\mu_0\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z^2}{\bar{z}^2}$$

البته $\tilde{\mu}_0$ همچنان در $L^\infty(\mathbb{C})$ است و $\|\tilde{\mu}_0\|_\infty=\|\mu_0\|_\infty$، پس طبق گام دوم دارای جواب هنجار $f^{\tilde{\mu}_0}$ است.

قرار دهیم :

$$f_0(z)=\frac{1}{f_0^{\mu_0}(\frac{1}{z})}$$

که آن نیز شبه همدیس است. با استفاده از قاعده زنجیری :

$$\mu_{f_0}(z)=\frac{(f_0(z))_{\bar z}}{(f_0(z))_z}=\cdots=\frac{z^2}{\bar z^2}\overline{\mu_0}(\frac{1}{\bar z})\underset{a.e.}{=}\mu_0(z)$$

پس f_0 جواب بلترامی با μ_0 است، و توجه کنید که $f_0(0)=0$ ، $f_0(1)=1$ و $f_0(\infty)=\infty$.
حال برای $\mu\in L^\infty(\mathbb{C})$ دلخواه با $\|\mu\|_\infty<1$ ، تعریف کنید

$$\mu_0(z)=\begin{cases}\mu(z) & z\in\mathbb{C}-\mathbb{D}\\ 0 & z\in\mathbb{D}\end{cases}$$

این μ_0 شرط f_0 آغاز استدلال را دارد یعنی در همسایگی 0 صفر است، پس جواب بهنجار f^{μ_0} وجود دارد.
قرار دهید :

$$\mu_1=\left(\frac{\mu-\mu_0}{1-\bar\mu_0\mu}\cdot\frac{\overline{(f^{\mu_0})_z}}{(f^{\mu_0})_z}\right)\circ(f^{\mu_0})^{-1}$$

از شکل فرمول بالا پیداست (خود کنترل کنید) که $\|\mu_1\|_\infty<1$ ، μ_1 تکیه‌گاه فشرده دارد، پس جواب بهنجار f^{μ_1} وجود دارد. حال ترکیب $f=f^{\mu_1}\circ f^{\mu_0}$ شبه همدیس است و با استفاده از ۱ داریم $\mu_f\underset{a.e.}{=}\mu$. □

تعمیم: وابستگی تحلیلی به ضریب بلترامی: فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{C}$ است و $A:U\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ ، $A(\alpha,z)=\mu_\alpha(z)$ ، به گونه‌ای است که (الف) $0\le k<1$ وجود دارد که برای هر α ، تابع $z\mapsto\mu_\alpha(z)$ اندازه‌پذیر است و $\|\mu_\alpha\|_\infty\le k$ ، و (ب) برای تقریباً هر z ، تابع $\alpha\mapsto\mu_\alpha(z)$ هولومورف است. اگر برای α ، f^α جواب بهنجار یکتای معادلهٔ بلترامی $f_{\bar z}=\mu_\alpha f_z$ باشد، برای هر z ، نگاشت $\alpha\mapsto f^\alpha(z)$ هولومورف است.

تمرین ۱۳ فرض کنید همارزی‌های $\mathbb{C}\xrightarrow{f}\mathbb{C}\xrightarrow{g}\mathbb{C}$ شبه همدیس با ضریب‌های بلترامی μ_f و μ_g باشند. ثابت کنید ضریب بلترامی $g\circ f$ از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$\mu_{g\circ f}=\frac{\mu_f+\frac{\overline{(f_z)}}{f_z}(\mu_g\circ f)}{1+\frac{\overline{(f_z)}}{f_z}\bar\mu_f(\mu_g\circ f)}$$