این سری تمرین‌ها از صفحات ۴۹ و ۵۰ کتاب ها برداشت

در مورد مدل هذلولوی‌وار (hyperboloid) هندسهٔ هذلولوی

$$\mathbb{H} : -x_0^2+x_1^2+x_2^2=-1 , \; x_0>0$$

با تابع دوخطی $\langle x|y\rangle_h = -x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2$ ، x را فضاگون (به ترتیب زمان‌گون، به ترتیب نورگون) می‌نامیم در صورتی که $|x|_h^2=\langle x|x\rangle_h>0$ (به ترتیب <0 ، به ترتیب $=0$). به این ترتیب $\mathbb{H}$ در ناحیهٔ زمان‌گون قرار دارد.

لم: بردارهای مماس بر $\mathbb{H}$ فضاگون هستند، پس تحدید $\langle\,|\,\rangle_h$ به صفحات مماس بر $\mathbb{H}$ یک متریک ریمانی تعریف می‌کند.

برهان: توجه کنید که $\mathbb{H}$ یک رویهٔ تراز برای تابع $F(x)=-x_0^2+x_1^2+x_2^2$ است و $\nabla F(x)=(-2x_0,2x_1,2x_2)$ ، پس اگر $a\in\mathbb{H}$ ، و $x=(x_0,x_1,x_2)$ یک بردار مماس بر $\mathbb{H}$ در نقطهٔ $a=(a_0,a_1,a_2)$ باشد، داریم:

$$(*) \qquad -a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$$

باید نشان دهیم اگر $x\neq(0,0,0)$ ، آنگاه $|x|_h^2=-x_0^2+x_1^2+x_2^2$ اکیداً مثبت است. کافی است این مطلب برای xها با اندازهٔ کافی کوچک ثابت شود (زیرا حکم تحت ضرب کردن در یک عدد ثابت، xها را به دلخواه بزرگ کرد و علامت $|x|_h^2$ عوض نمی‌شود). با توجه به تحدب $\mathbb{H}$ ، اگر xها با اندازهٔ کافی کوچک باشند، برای نقطهٔ $(x_0+a_0,x_1+a_1,x_2+a_2)$ داریم:

$$-(a_0+x_0)^2+(a_1+x_1)^2+(a_2+x_2)^2>-1$$

$$\underbrace{(-a_0^2+a_1^2+a_2^2)}_{\overset{\text{چون } a\in\mathbb{H}}{=-1}}+(-x_0^2+x_1^2+x_2^2)+2\underbrace{(-a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2)}_{\overset{\text{بنابر }(*)}{=0}}>-1$$

پس $-x_0^2+x_1^2+x_2^2>0$ چنان که حکم بود. $\square$

تمرین ۱۲ فرض کنید $x,y\in\mathbb{H}$. نشان دهید $\langle x|y\rangle_h\le -1$ و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $x=y$.

نگاشت خطی $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ را نسبت به $\langle\,|\,\rangle_h$ قائم می‌نامیم در صورتی که برای هر $x,y\in\mathbb{R}^3$ داشته باشیم $\langle Tx|Ty\rangle_h=\langle x|y\rangle_h$.

تمرین ۱۳ در حالتی که ماتریس نسبت به پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^3$ ، نشان دهید T نسبت به $\langle\,|\,\rangle_h$ قائم است اگر و فقط اگر داشته باشیم $T^tJT=J$ که در آن T^t ترانهادهٔ T (transpose) است و J ماتریس زیر است:

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

نتیجه بگیرید که $\det T=\pm1$.

اگر T نسبت به $\langle\,|\,\rangle_h$ ناوردا باشد، هذلولی‌وار $-x_0^2+x_1^2+x_2^2=-1$ را به خودش می‌نگارد. چنانچه به علاوه نیم‌رویه ($x_0>0$ یا $x_0<0$) به خودش نگاشته شود، T را یک نگاشت لورنتس می‌نامیم.
گروه نگاشت‌های لورنتس را با $Lor(\mathbb{R}^3)$ یا Lor نمایش می‌دهیم، که یک زیرگروه $GL(3,\mathbb{R})$ است.
زیرگروه Lor که از اعضای با $\det=+1$ تشکیل شده است به Lor^+ نمایش می‌دهیم.
زیرفضای دوبعدی (صفحه گذرنده از 0) $A_0x_0+A_1x_1+A_2x_2=0$ را زمان‌گون می‌نامیم درصورتی که (A_0,A_1,A_2) فضاگون باشد، یعنی $-A_0^2+A_1^2+A_2^2>0$.

تمرین ۱۴ نشان دهید هر صفحه گذرنده از 0 زمان‌گون با $\mathbb{H}$ اشتراک ناتهی دارد.

خواننده بهتر است توجه داشته باشد که عمود بودن را به جای مطرح کردن نسبت به ضرب اقلیدسی (در اینجا آن را اقلیدسی)، نسبت به $\langle\,|\,\rangle_h$ تعریف کنیم، یعنی می‌نویسیم $x\perp_h y$ اگر و فقط اگر $\langle x|y\rangle_h=0$. بالاخص مخروط $-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ متشکل از نقاطی است که بر خودشان عمود هستند. حال برای $A=(A_0,A_1,A_2)\neq 0$، می‌توان معادله صفحه را به صورت مکان هندسی xهایی که $\langle A|x\rangle_h=0$ در نظر گرفت. تفاوت $\langle A|x\rangle=0$ (اقلیدسی) و $\langle A|x\rangle_h=0$ (هذلولوی) در این است که دو صفحه $-A_0x_0+A_1x_1+A_2x_2=0$ و $A_0x_0+A_1x_1+A_2x_2=0$ قرینه یکدیگر هستند نسبت به صفحه (x_1,x_2). مفهوم صفحه زمان‌گون (به ترتیب فضاگون) در هر دو یکی است زیرا که ضریب در A_0^2 مطرح است. نکته مهم دیگر اینکه بردارهای مماس $x=(x_0,x_1,x_2)$ بر $\mathbb{H}$ از نقطه a دقیقاً xهایی هستند که $\langle a|x\rangle_h=0$.

تمرین ۱۵ نشان دهید Lor^+ به صورت متعدی روی صفحه‌های زمان‌گون عمل می‌کند، یعنی برای هر دو صفحه π_1 و π_2 که زمان‌گون باشند، عضوی $T\in Lor^+$ وجود دارد که $T(\pi_1)=\pi_2$. در واقع اگر نقطه‌های P و Q روی $\mathbb{H}$ و بردارهای مماس u و v بر $\mathbb{H}$، به ترتیب در P و Q، داده شده باشند، T را می‌توان طوری گرفت که $T(P)=Q$ و $T(u)=v$.

توجه کنید که چون صفحات مماس بر $\mathbb{H}$ فضاگون هستند، اشتراک یک صفحه زمان‌گون (گذرنده از 0) با $\mathbb{H}$ یک منحنی هموار است (طبق قضیه تابع ضمنی، چون این صفحه بر $\mathbb{H}$ مماس نمی‌شود). نکته مهم دیگر اینکه چون گروه Lor^+ خطی است، تابع مشتق تعریف شده از صفحه مماس به صفحه مماس تحت $T:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$، همان خود T است. به این ترتیب اگر متریک ریمانی القا شده روی $\mathbb{H}$ توسط $\langle\,|\,\rangle_h$ را در نظر بگیریم، هر $T\in Lor^+$ یک ایزومتری است، یعنی ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ می‌کند.
نتیجه اینکه تحت Lor^+ مفهوم‌های طول، فاصله، زاویه، مساحت، انحنای گاوسی، انحنای ژئودزیکی، و سایر مفهوم‌های هندسی ذاتی (وابسته به ضرب داخلی یا متریک ریمانی) حفظ می‌شوند.
قضیه خم‌های روی $\mathbb{H}$ که به صورت ژئودزیک پارامتری‌پذیر هستند عبارتند از اشتراک صفحات زمان‌گون گذرنده از 0 با $\mathbb{H}$.
برهان از هندسه دیفرانسیل می‌دانیم که چون معادله دیفرانسیل ژئودزیک یک دستگاه مرتبه دوم است، هر گاه کمک

در این حالت برای نقطه داده شده باشند یک و تنها یک ژئودزیک که شامل آن نقطه وجود دارد که مماس آن، بردار داده شده است. بنابراین با توجه به تمرین ۱۵ کافی است ژئودزیکی γ که شامل نقطه از $(1,0,0)\in\mathbb{H}$ در جهت‌های گوناگون معلوم شوند. این خم‌ها در حقیقت اشتراک‌های $\mathbb{H}$ با صفحات به شکل $A_1x_1+A_2x_2=0$ باشند، که این مطلب را به اثبات خواهیم رساند. خم اشتراک را می‌توان به صورت زیر پارامتری کنیم:

$$\gamma(t)=(\cosh t,(-\sin\alpha)\sinh t,(\cos\alpha)\sinh t)$$

که در این به اثبات است زیرا که می‌توان با ضرب کردن A_1 و A_2 در ثابت مناسب به صورت کسینوس و سینوس درآورد. داریم

$$\gamma'(t)=(\sinh t,(-\sin\alpha)\cosh t,(\cos\alpha)\cosh t)$$

$$|\gamma'(t)|_h^2=-\sinh^2 t+\cosh^2 t=1$$

پس γ برحسب طول قوس داده شده است، $s=t$، و داریم:

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2}=\gamma''(t)=(\cosh t,(-\sin\alpha)\sinh t,(\cos\alpha)\sinh t)$$
$$=\gamma(t)$$

پس $\gamma''(t)$ نسبت به ترکیب بر $\mathbb{H}$ عمود است، نتیجه اینکه مولفه آن در جهت مماس واقع روی سطح صفر می‌باشد که نشان می‌دهد $\gamma(t)$ ژئودزیک است. $\square$

نکته: اگر $\mathbb{H}$ را با ... آن را ... از $\mathbb{R}^3$ اقلیدسی در نظر بگیریم، اشتراک‌های صفحات $A_1x_1+A_2x_2=0$ با $\mathbb{H}$ همچنان ژئودزیک هستند زیرا که این صفحات بر $\mathbb{H}$ عمود (اقلیدسی) هستند، ولی برخلاف اشتراک هذلولی‌های ... $\mathbb{H}$ با سایر اشتراک‌های صفحات زمان گونه با $\mathbb{H}$ لزوماً ژئودزیک نیستند.

نتیجه تمرین 2.4.5 کتاب هایپربولیک اکنون بدست می‌آید زیرا که فاصله $v=\gamma(t_1)$ از $w=\gamma(t_2)$ همان طول ژئودزیک است:

$$\int_{t_1}^{t_2}|\gamma'(t)|_h\,dt=t_2-t_1$$

از طرفی دیگر:

$$\langle\gamma(t_1)|\gamma(t_2)\rangle_h=-(\cosh t_1)(\cosh t_2)+(\sinh t_1)(\sinh t_2)$$
$$=-\cosh(t_1-t_2)$$

← حال می‌خواهیم مدل هایپربولوئید را با مدل‌های قبلی ارتباط دهیم Relating the hyperboloid model to earlier models

ادامه دهید

آنچه در زیر می‌آید در واقع خلاصهٔ سه صفحه‌ای است که در توضیح رسالهٔ لب کتاب‌ها بار در مورد مدل هذلولی‌وار ارائه شد. این بحث بعداً با گزاره‌های لازم در مورد شش‌ضلعی‌های قائم‌الزاویه (و ضرب‌های دیگر) تنظیم خواهد شد. نکته این است که با گذر به فضای سه بعدی (در مدل هذلولی‌وار) امکانات جبری متنوعی برای این مقصد تحلیلی هندسی پدید می‌آید که در مدل‌های دیگر (دلخواه H، D و B) دیده نمی‌شوند. به‌عنوان مثال در صفحهٔ ۵۸ کتاب‌ها پی می‌بینیم که از ماتریس‌های متقارن $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ به‌عنوان نقاط $\mathbb{R}^3$ استفاده شده است. گزینهٔ دیگر استفاده از ماتریس‌های دارای $trace=0$ است به شکل $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & -a_0 \end{bmatrix}$. ماتریس‌های نوع اخیر تحت عمل جمع تشکیل جبر لی $sl(2,\mathbb{R})$ را می‌دهند که ساختار جبری آن شناخته شده و غنی است. می‌توان از این ساختار و ضرب ماتریس‌ها در تقریب هندسی بهره گرفت. به مرجع Fenchel، Iversen و Ratcliffe از ساختار جبری فضای سه بعدی در مدل‌های هندسه هذلولی استفاده فراوان می‌کنند. در زیر استفادهٔ محدودی از این نوع خواهیم داشت. می‌توان بدون ورود در این بحث باز و شیرین الگوهای ... در کتاب‌ها بار در بخش مثلثات هذلولی نتایج مورد نیاز در مورد شش‌ضلعی‌ها را به دست آورد (و توصیه می‌کنم خواننده خود به این امر اقدام کند)، ولی آگاهی از امکانات جبری که ممکن است در جاهای مختلف مورد استفاده قرار گیرد، دلیل رسالهٔ لب را طبیعی‌تر نشان خواهد داد. توجه کنید که اصطلاحات فرعی در رشته‌های جبری گاه‌های مختلف وجود دارد و یک نماد ممکن است در جاهای مختلف به معناهای مختلف به کار گرفته شود. بحث زیر نیز مستثنی از این قاعده نیست.

یادآوری می‌کنیم که در $\mathbb{R}^3$ با مختصات (x_0,x_1,x_2)، یک حاصل‌ضرب دوخطی $\langle\ |\ \rangle_h$ به طور زیر تعریف شده:

$$\langle x|y\rangle_h = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 \qquad (1)$$

قرار داد کردیم $|x|_h^2 = \langle x|x\rangle_h$. مدل هذلولی‌وار عبارت است از یک قطعهٔ هذلولی‌وار دوپارچه با مشخصات:

$$HA:\ |x|_h^2 = -1\ ,\ x_0 > 0$$

علاوه بر این "ضرب داخلی"، می‌توان عملیات جبری دیگری نیز با استفاده از $\mathbb{R}^3$ مطرح کرد. مثلاً "ضرب برداری":

$$u \wedge v = J(u \times v)\ ,\ u,v \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{(ضرب برداری یا ضرب خارجی)} \qquad (2)$$

که در اینجا $\times$ ضرب برداری معمولی $\mathbb{R}^3$ است و J ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. خواص زیر برقرارند:

(i) $u \wedge v$ نسبت به بردارها $\mathbb{R}$-خطی است.

(ii) $u \wedge v$ ضدمتقارن است یعنی $u \wedge v = -v \wedge u$ (یا $w \wedge w = 0$)

(iii) $\langle u\wedge v | v\rangle_h = \langle u \wedge v | u\rangle_h = 0$.

همچنین برای سه‌تایی u، v و w تعریف می‌کنیم (به تقلید از ضرب داخلی اقلیدسی):

$$vol(u,v,w) = \langle u \wedge v | w\rangle_h \qquad (3)$$

پس در واقع با استفاده از $\langle\ |\ \rangle$ برای ضرب داخلی معمول اقلیدسی:

$$vol(u,v,w) = \langle u\wedge v|w\rangle_h = \langle J(u\times v)|J(w)\rangle = \langle u \times v | w\rangle = \det[u|v|w] \qquad (4)$$

که در طرف راست سه‌تایی‌ها به صورت ستون نوشته شده‌اند. به این ترتیب همان حجم (جهت‌دار) اقلیدسی

(۵)

واضح است و داریم :

$$\text{(۵)}\quad vol(u,v,w) = vol(w,u,v) = vol(v,w,u) = -vol(w,v,u) = -vol(u,w,v) = -vol(v,u,w)$$

تمرین ۲۲ نخست توجه کنید که $J(u\times v) = -J(u)\times J(v)$ یا $u\wedge v = -(Ju)\times(Jv)$ ، سپس اتحادهای زیر را ثابت کنید :

(الف) $x\wedge(y\wedge z) = \langle x|y\rangle_h z - \langle x|z\rangle_h y$

(ب) $\langle x\wedge y|z\wedge w\rangle_h = -\langle x|z\rangle_h\langle y|w\rangle_h + \langle x|w\rangle_h\langle y|z\rangle_h$

یادآوری می‌کنیم تقاطع صفحات گذرنده از O در $\mathbb{R}^3$ با $\mathbb{H}$ دقیقاً خم‌هایی هستند که قابل پارش به صورت ژئودزیک نسبت به متریک ریمانی القا شده روی $\mathbb{H}$ هستند. اگر $\mathcal{P}$ یک صفحه گذرنده از O (زیرفضای خطی دوبعدی) باشد و $P\in\mathcal{P}\cap\mathbb{H}$ و γ ژئودزیکی که از P می‌گذرد، آنگاه تصویر این ژئودزیک همواره در $\mathcal{P}$ می‌ماند. پس حامل واحد مماس بر ژئودزیک در نقطه P، که آن را با T نشان می‌دهیم در $\mathcal{P}\cap T_P\mathbb{H}$ قرار دارد، و اگر Q نقطه دیگری روی همین ژئودزیک باشد و U حامل واحد مماس بر ژئودزیک در نقطه Q آنگاه همچنین $U\in\mathcal{P}\cap T_Q\mathbb{H}$. ادعا می‌کنیم معادله این ژئودزیک، پارش شده بر حسب طول قوس به صورت زیر است :

<u>معادله ژئودزیک</u>

$$\text{(۶)}\quad \gamma(s) = (\cosh s)P + (\sinh s)T$$

با توجه به توضیح بالا، تصویر γ همواره در صفحه $\mathcal{P}$ قرار دارد. باید نشان دهیم تصویر γ در $\mathbb{H}$ نیز هست و $|\gamma'(s)|_h = 1$. در مورد موضوع اول :

$$|\gamma(s)|_h^2 = \langle(\cosh s)P + (\sinh s)T \,|\, (\cosh s)P + (\sinh s)T\rangle_h$$
$$= (\cosh^2 s)\langle P|P\rangle_h + (\sinh^2 s)\langle T|T\rangle_h$$
$$= -\cosh^2 s + \sinh^2 s = -1$$

پس $\gamma(s)\in\mathbb{H}$. در مورد موضوع دوم :

$$|\gamma'(s)|_h^2 = \langle(\sinh s)P + (\cosh s)T \,|\, (\sinh s)P + (\cosh s)T\rangle_h$$
$$= (\sinh^2 s)\langle P|P\rangle_h + (\cosh^2 s)\langle T|T\rangle_h = +1$$

و چون $\gamma'(s)$ فضاگون است، $|\gamma'(s)|_h = 1$. چون γ بر حسب طول پارش شده است، چنانچه نقطه Q در راستای ژئودزیک به فاصله $s = d(P,Q)$ از P باشد، داریم :

$$\text{(۷)}\quad Q = P\cosh d(P,Q) + T\sinh d(P,Q)$$

در نتیجه با محاسبه $\langle P|\cdot\rangle_h$ نسبت به دو طرف بالا :

$$\text{(۸)}\quad \langle P|Q\rangle_h = -\cosh d(P,Q)$$

که این رابطه را قبلاً طور دیگری ثابت کرده بودیم .

قائم واحد در مدل هذلولی وار صفحهٔ هذلولوی قائم واحد ژئودزیک از کارسازی دترمینان برخوردار است. به طور کلی هرگاه خم‌های واحد بر خم در جهت دو طرف داده شده باشد، یکی از دو قائم واحد را می‌توان به عنوان قائم واحد انتخاب کرد. در اینجا برای ژئودزیک داده شده γ که از نقطهٔ $P\in\mathbb{H}$ می‌گذرد و مماس واحد T در $T_P\mathbb{H}$، تعریف می‌کنیم:

$$N_\gamma(s)=\gamma(s)\wedge\gamma'(s) \tag{9}$$

که s پارامتر خم طول است. $N_\gamma(s)$ در $T_{\gamma(s)}\mathbb{H}$ قرار دارد زیرا بر $\gamma(s)$ و $\gamma'(s)$ عمود است. به علاوه

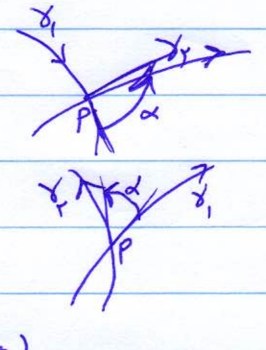
$$|N_\gamma(s)|_h^2=\langle\gamma(s)\wedge\gamma'(s)|\gamma(s)\wedge\gamma'(s)\rangle=-\langle\gamma(s)|\gamma(s)\rangle_h\langle\gamma'(s)|\gamma'(s)\rangle_h-\langle\gamma(s)|\gamma'(s)\rangle_h^2$$
$$=1$$

چون $N_\gamma(s)\in T_{\gamma(s)}\mathbb{H}$، $N_\gamma(s)$ فضاگون است و $|N_\gamma(s)|_h=1$.

لم ۱ $N_\gamma(s)$ به عنوان عضو $\mathbb{R}^3$، مستقل از s است.

اثبات البته به عنوان عضو فضای مماس، $N_\gamma(s)$ عضو $T_{\gamma(s)}\mathbb{H}$ است و تغییر می‌یابد. مقصود در اینجا $N_\gamma(s)$ به عنوان بردار ساطع شده از O در $\mathbb{R}^3$ است. ثابت بودن $N_\gamma(s)$ از نظر هندسی بدیهی است زیرا که $\gamma(s)$ و $\gamma'(s)$ هر دو در صفحهٔ گذرنده از O که ژئودزیک γ را در تقاطع با $\mathbb{H}$ پدید آورده قرار دارند، پس $N_\gamma(s)$ یکی از قائم واحد عمود بر صفحه است، و چون γ پیوسته است، انتخاب $N_\gamma(s)$ ثابت است. از تعریف نیز می‌توان مستقیماً تحقیق کرد:

$$\gamma(s)\wedge\gamma'(s)=((\cosh s)P+(\sinh s)T)\wedge((\sinh s)P+(\cosh s)T)$$
$$=(\cosh s)(\sinh s)(\underbrace{P\wedge P}_{0}+\underbrace{T\wedge T}_{0})+(\cosh^2 s-\sinh^2 s)P\wedge T$$
$$=\gamma(0)\wedge\gamma'(0)$$
□.



زاویهٔ جهت‌دار بین دو ژئودزیک

فرض کنید دو ژئودزیک γ_1 و γ_2 در نقطهٔ P یکدیگر را قطع می‌کنند و در این نقطه مماس‌های واحد γ_1 و γ_2 به ترتیب T_1 و T_2 هستند. در این صورت زاویهٔ (جهت‌دار) α میان γ_1 و γ_2 به طور یکتا توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$T_2=(\cos\alpha)T_1+(\sin\alpha)N_1 \tag{10}$$

که در اینجا $N_1=P\wedge T_1$، قائم واحد ژئودزیک γ_1 (طبق (9))، می‌باشد.

زاویهٔ α را می‌توان برحسب قائم‌های واحد ژئودزیک‌ها نیز بیان کرد.

لم ۲ برای ژئودزیک‌های γ_1 و γ_2 با زاویهٔ جهت‌دار α داریم:

$$(11)\qquad \langle N_1|N_2\rangle_h=\cos\alpha \quad , \quad N_1\wedge N_2=-P\sin\alpha$$

که در آنجا P نقطهٔ تقاطع γ_1 و γ_2، و N_1 و N_2، به ترتیب قائم‌های واحد قراردادی γ_1 و γ_2 می‌باشند.

<u>اثبات</u> با استفاده از (ب) تمرین ۲۲:

$$\langle N_1|N_2\rangle_h=\langle P\wedge T_1|P\wedge T_2\rangle_h=-\underbrace{\langle P|P\rangle_h}_{=-1}\langle T_1|T_2\rangle_h+\underbrace{\langle P|T_2\rangle_h}_{=0}\underbrace{\langle T_1|P\rangle_h}_{=0}$$

ضرب نرده‌ای دو طرف (۱۰) با T_1 نتیجه می‌دهد:

$$\langle N_1|N_2\rangle_h=\cos\alpha$$

همینطور با استفاده از (الف) تمرین ۲۲:

$$N_1\wedge N_2=(P\wedge T_1)\wedge(P\wedge T_2)=\underbrace{\langle P\wedge T_1|P\rangle_h}_{=0}T_2-\langle P\wedge T_1|T_2\rangle_h P$$

با جایگزینی از (۱۰) برای T_2، حکم $N_1\wedge N_2=-P\sin\alpha$ حاصل می‌شود. □

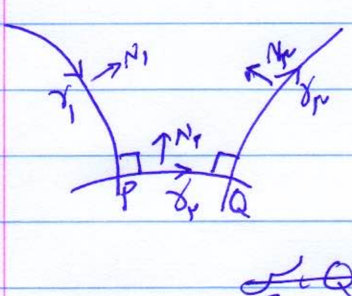
ل ۳ فرض کنید سه ژئودزیک γ_1، γ_2 و γ_3 داده شده‌اند که γ_2 بر γ_1 عمود است و بر γ_3. نقطهٔ تقاطع γ_1 و γ_2 را P و نقطهٔ تقاطع γ_2 و γ_3 را Q می‌نامیم و جهت ژئودزیک‌ها به گونه‌ای است که در شکل نمایش داده شده است. در این صورت:

$$(12)\qquad \cosh d(P,Q)=-\langle N_1|N_3\rangle_h$$

$$(13)\qquad \sinh d(P,Q)=-\operatorname{vol}(N_1,N_2,N_3)$$

(به ترتیب تعبیری برای ضرایب سادهٔ ژئودزیک، (۶)، بر حسب قائم‌های واحد، به دست می‌آید.)

<u>اثبات</u> طبق (۸):



$$Q=(\cosh\delta)P+(\sinh\delta)T_2$$

که در آنجا برای سهولت در نوشتن، $d(P,Q)$ را با δ نمایش داده‌ایم. بنابراین

$$\cosh\delta=-\langle P|Q\rangle_h$$

~~حال از $P\wedge T_1=N_1$ و $Q\wedge T_3=N_3$ و روابط (۵) می‌بینیم که $P=T_1\wedge N_1$ و $Q=T_3\wedge N_3$، پس~~

$$\cancel{\cosh\delta=-\langle T_1\wedge N_1|T_3\wedge N_3\rangle_h}$$

$$\cancel{=\langle T_1|T_3\rangle_h\langle N_1|N_3\rangle_h}$$

طبق ۱۱، $N_1\wedge N_2=-P$ و $N_2\wedge N_3=-Q$، بنابراین

$$\cosh\delta=-\langle N_1\wedge N_2|N_2\wedge N_3\rangle_h$$

$$=\langle N_1|N_2\rangle_h\langle N_2|N_3\rangle_h-\langle N_1|N_3\rangle_h\langle N_2|N_2\rangle_h \qquad \text{(طبق (ب) تمرین ۲۲)}$$

$$=-\langle N_1|N_3\rangle_h \qquad \text{(با استفاده از رابطهٔ سمت چپ (۱۱))}$$

برای رابطهٔ دوم داریم $\sinh\delta=\langle T_2|Q\rangle_h$ و از (۱۰) می‌بینیم که $T_2=N_1$، پس با استفاده از $Q=-N_2\wedge N_3$:

$$\sinh\delta=\langle N_1|Q\rangle_h=-\operatorname{vol}(N_1,N_2,N_3)\quad .□$$

(۸)

<u>وضعیت نسبی دو ژئودزیک</u> می‌دانیم که در صفحه هذلولوی دو ژئودزیک γ_1 و γ_2 یکی از سه وضعیت زیر را دارند:

متقاطع: $\gamma_1(s_1)=\gamma_2(s_2)$ به ازای مقادیر مناسب s_1 و s_2

موازی: با تنظیم جهت ژئودزیک‌ها، $\lim_{s\to+\infty} d(\gamma_1(s),\gamma_2(s))=0$

متنافر یا ابرموازی: اگر در هر دو جهت فاصله ژئودزیک‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند.

ارائه یک ضابطه کمّی قابل محاسبه برای تشخیص این سه وضعیت در مدل‌های تحلیلی و گوی دشوار است ولی در مدل هذلولوی ما به سبب ثابت بودن قائم‌ها ضابطه بسیار ساده‌ای وجود دارد:

<u>لم ۴</u> فرض کنید γ_1 و γ_2 دو ژئودزیک هستند. در این صورت یک و فقط یکی از سه وضعیت زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \text{ژئودزیک‌ها متقاطع هستند اگر و فقط اگر } |\langle N_1|N_2\rangle_h|<1 \\ \text{〃 موازی 〃 〃 〃 〃 } |\langle N_1|N_2\rangle_h|=1 \\ \text{〃 متنافر 〃 〃 〃 〃 } |\langle N_1|N_2\rangle_h|>1 \end{cases} \tag{14}$$

در حالت آخر (و فقط در این حالت) دو ژئودزیک دارای عمود مشترک (ژئودزیکی) هستند و طول این عمود مشترک عبارت است از $|\langle N_1|N_2\rangle_h|$.

<u>اثبات</u> در واقع فرمول (۱۰) در رابطه اول لم ۳ دلالت بر این حکم دارند. توجه کنید که اگر $P\neq Q$، $|\cosh d(P,Q)|>1$، و در حالت‌های متقاطع و موازی عمود مشترک وجود ندارد زیرا مجموع زوایای یک مثلث ژئودزیکی در صفحه هذلولوی ما اکیداً کوچک‌تر از π باشد. □

مطلب بعد ترجمه تعبیر هم‌تغییری بودن تابع det است:

<u>لم ۵</u> برای هر دو سه‌تایی مرتب (A_1,A_2,A_3) و (B_1,B_2,B_3) از عناصر $\mathbb{R}^3$:

$$vol(A_1,A_2,A_3)\cdot vol(B_1,B_2,B_3) = -\det\left[\langle A_i|B_j\rangle_h\right] \tag{15}$$

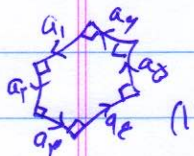
<u>اثبات</u> با ثابت نگه داشتن یکی از سه‌تایی‌ها هر دو طرف نسبت به سه‌تایی دیگر سه‌خطی و متناوب‌اند. پس برای اثبات رابطه کافی است که آن را برای حالتی که سه‌تایی‌ها سه بردار پایه‌ای $e_0=(1,0,0)$، $e_1=(0,1,0)$ و $e_2=(0,0,1)$ هستند تحقیق کرد که به سادگی برقرار است. □

با در دست داشتن پنج لم بالا، اکنون می‌توان شرایط وجود چندضلعی‌های گوناگون در رابطه با طول اضلاع آن‌ها را بررسی کرد. از این رو فرض می‌کنیم $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ ژئودزیک‌هایی هستند با قائم‌های یکه قراردادی $N_1,\dots,N_k$ (به ترتیب)، و به گونه‌ای که γ_{i+1} بر γ_i عمود است. هیچ فرضی در مورد متقاطع بودن ژئودزیک‌های غیرمجاور قائل نیستیم، و فقط اینکه γ_{i+1} ژئودزیک γ_i را به طور عمود قطع می‌کند.

<u>لم ۶</u>

$$-vol(N_1,N_2,N_3)\cdot vol(N_2,N_3,N_4)=\langle N_1|N_4\rangle_h \tag{16}$$

<u>اثبات</u> از نتیجه لم ۵ و محاسبه دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & \langle N_1|N_3\rangle_h & \langle N_1|N_4\rangle_h \\ 1 & 0 & \langle N_2|N_4\rangle_h \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ است. □



گزاره برای یک شش ضلعی قائم الزاویه با طول ضلع های به ترتیب a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 داریم:

(۱۷) $$\frac{\sinh a_4}{\sinh a_1}=\frac{\sinh a_6}{\sinh a_3}=\frac{\sinh a_2}{\sinh a_5}$$

اثبات از رابطه لم ۶ و تشابه‌ها

$$vol(N_4N_5N_6)vol(N_5,N_6,N_1)=\langle N_4|N_1\rangle_h$$

و با قرار دادن آنها یکی از روابط اصلی درست شود، و مشابهاً روابط دیگر. □

لم ۷ برای $k=5$ داریم:

(۱۸) $$-vol(N_1,N_3,N_4)vol(N_3N_4N_5)=\langle N_1|N_5\rangle_h-\langle N_1|N_3\rangle_h\langle N_3|N_5\rangle_h$$

اثبات دترمینان زیر رابطه را با دو ترتیب بسط ماتریس

$$\begin{bmatrix}\langle N_1|N_3\rangle_h & \langle N_1|N_4\rangle_h & \langle N_1|N_5\rangle_h\\ 1 & 0 & \langle N_3|N_5\rangle_h\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

می‌باشد. □

لم ۸ برای $k=3$، فرض کنید به علاوه که n_1، n_2 و n_3 از یک نقطه نمی‌گذرند. در این صورت برای هر $X\in\mathbb{R}^3$:

(۱۹) $$vol(N_1,X,N_3)=vol(N_1,N_2,N_3)\langle N_2|X\rangle_h$$

اثبات اینکه سه ژئودزیک از یک نقطه نگذرند معادل است با نمادهای لم ۳ به اینکه $P\neq Q$، و $P\neq Q$ معادل است با $d(P,Q)>0$ یا $\sinh d(P,Q)\neq 0$ و بنابراین طبق لم ۳ اینکه $vol(N_1N_2N_3)\neq 0$ یعنی سه تایی (N_1,N_2,N_3) مستقل خطی است. پس چون دو طرف (۱۹) نسبت به X خطی است، کافی است (۱۹) برای $X=N_1,N_2,N_3$ ثابت شود که به سادگی معلوم می‌شود. □

لم ۹ برای $k=5$ داریم:

(۲۰) $$(\sinh a_2)(\cosh a_3)(\sinh a_4)=(\cosh a_2)(\cosh a_4)-\langle N_1|N_5\rangle_h$$

اثبات رابطه (۱۸) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$+vol(N_1N_4N_3)(-\sinh a_4)=\langle N_1|N_5\rangle_h-(\cosh a_2)(\cosh a_4)$$

حال با قرار دادن $X=N_4$ از (۱۹) رابطه (۲۰) نتیجه می‌شود. □

گزاره برای یک شش ضلعی قائم الزاویه با طول ضلع های به ترتیب a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 داریم:

(۲۱) $$(\sinh a_2)(\cosh a_3)(\sinh a_4)=(\cosh a_2)(\cosh a_4)+\cosh a_6$$

اثبات اگر چنین ۶ ضلعی وجود داشته باشد، لزوماً طبق (۸)، $\langle N_1|N_5\rangle_h=-\cosh a_6$، و (۲۱) از (۲۰) نتیجه می‌شود. □

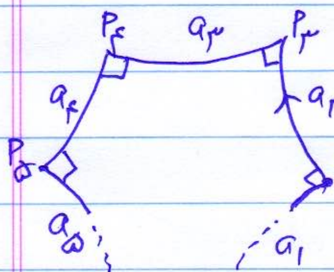
نکته جالب‌تر نتیجه زیر است:

<u>قضیه</u> برای هر سه عدد مثبت داده شدهٔ a_2, a_4, a_6، یک و تنها یک (با تقریب ایزومتری) شش‌ضلعی تمام‌القائمه وجود دارد که سه ضلع متناوب آن طول‌های a_2، a_4 و a_6 دارند.

<u>اثبات</u> فرض کنید a_2، a_4 و a_6 مثبت داده شده‌اند. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{(\cosh a_2)(\cosh a_4)}{(\sinh a_2)(\sinh a_4)} + \frac{\cosh a_6}{(\sinh a_2)(\sinh a_4)} = (\coth a_2)(\coth a_4) + c \qquad (۲۲)$$

که $c = \frac{\cosh a_6}{(\sinh a_2)(\sinh a_4)}$ یک عدد مثبت است. بنابراین طرف راست یک عدد مثبت (البته اکیداً بزرگتر از ۱) است و عدد منحصر به فردی a_3 وجود دارد که



$$\cosh a_3 = (\coth a_2)(\coth a_4) + c$$

به ترتیب می‌توانیم سه ضلع P_2P_3، P_3P_4 و P_4P_5 را بسازیم.
حال از P_2 و P_5 پاره‌خط‌هایی به طول a_1 و a_5 عمود بر اضلاع P_2P_3 و P_4P_5 رسم می‌کنیم که a_1 و a_5 دقیقاً مانند a_3 از روابطی مشابه (۲۲) حاصل شده‌اند.
برای اینکه بتوان شش‌ضلعی را کامل کرد باید اطمینان حاصل کنیم که اضلاع P_1P_2 و P_5P_6 متنافرند یا یک عمود مشترک دارند (لم ۴). و این دقیقاً از جایگزینی مقدار به دست آمده برای $\cosh a_3$ در (۲۲) در رابطهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود که خواهیم داشت $|\langle N_1|N_5\rangle_h| > 1$، و وجود شش‌ضلعی به اثبات می‌رسد. یکتایی از ایزومتری‌های H حاصل می‌شود. □

<u>تمرین ۲۳</u> برای پنج‌ضلعی تمام‌القائمه با طول ضلع‌های به ترتیب a_1 تا a_5 ثابت کنید:

$$\cosh a_5 = (\sinh a_2)(\sinh a_3) = (\coth a_1)(\coth a_4)$$

<u>تمرین ۲۴</u> در صفحهٔ هذلولوی چهارضلعی $ABCD$ با زاویه‌های قائمه در رأس‌های A، B و C داده شده است. زاویهٔ رأس D را δ بنامید و ثابت کنید:

$$\cosh d(A,B) = \cosh d(C,D) \cdot \sin\delta \,, \quad \sinh d(A,B) \sinh d(A,C) = \cos\delta$$

<u>تمرین ۲۵</u> تمرین‌های 3.5.5 و 3.5.6 هابارد را از مطالب جزوه نتیجه بگیرید.

<u>تمرین ۲۶</u> همهٔ قضایای شکل‌گیری هابارد یعنی 2.4.7، 2.4.10 و 2.4.13 را از مطالب جزوه نتیجه بگیرید.

<u>تمرین ۲۷</u> در صفحهٔ هذلولوی: (الف) سه عدد مثبت a، b و c داده شده‌اند که برای هر جایگشت آنها اکیداً در نامساوی مثلث صدق می‌کنند. آیا مثلثی با طول ضلع‌های a، b و c وجود دارد؟ (ب) سه عدد مثبت α، β و γ داده شده‌اند که $0<\alpha+\beta+\gamma<\pi$. آیا مثلثی با زوایای α، β و γ وجود دارد؟

<u>تمرین ۲۸</u> در صفحهٔ ۵۸ کتاب هابارد به سه‌تایی $x=(x_0,x_1,x_2)$ ماتریس $\begin{bmatrix} x_0+x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0-x_1 \end{bmatrix}$ نسبت داده شده است. این ماتریس را با $\tilde{x}$ نمایش دهید. ثابت کنید $\langle x|y\rangle_h = \frac{-1}{2}\operatorname{tr}(\tilde{x}\tilde{y})$. آیا می‌توانید $x\wedge y$ را نیز برحسب یک عملیات ماتریسی تعریف کنید؟

<u>تمرین ۲۹</u> در مورد راستگرد بودن یا نبودن سه‌تایی مرتب $(x, y, x\wedge y)$ بحث کنید ($x\wedge y$ طبق تعریف جزوه).

<u>تمرین ۳۰</u> در صفحهٔ هذلولوی چهارضلعی <u>محدب</u> $ABCD$ را در نظر بگیرید (هیچ رأسی درون مثلث سه رأس دیگر قرار ندارد) که هر دو ضلع روبروی آن طول (هذلولوی) برابر دارند. ثابت کنید دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند و هر دو ضلع مقابل متنافرند.