فرگه

(۱) هم‌عددبودن یعنی وجود تناظر یک به یک

(۲) عدد (یا تعداد) محمول F عبارت است از دامنهٔ صدق محمول هم‌عددبودن با F

(۳) اگر Z محمول ($x \neq x$) باشد ($Zx \leftrightarrow x \neq x$)، دامنهٔ صدق Z تهی است. عدد Z را صفر می‌نامیم. چون فقط یک مجموعهٔ تهی وجود دارد، بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$0 = \{\Phi\}$$

(۴) فرض کنید n و n^+ به ترتیب عددهای محمول‌های F و F^+ باشند. اگر با کنار گذاشتن یک عضو از دامنهٔ صدق F^+، آنچه می‌ماند هم‌عدد با F باشد، می‌گوییم n^+ تالی n است. توجه کنید که آنچه با کنار گذاشتن یک عضو از دامنهٔ صدق F^+ حاصل می‌شود خود یک دامنهٔ صدق است زیرا اگر مثلاً x عضو کنار گذاشته شده، محمول F' را در نظر بگیرید که $F'y$ اگر و فقط اگر Fy و $x \neq y$.

(۵) n را یک عدد طبیعی می‌نامیم اگر متعلق به دامنهٔ صدق هر محمول F باشد که واجد دو شرط زیر است:

الف) $F0$

ب) هرگاه Fk، آنگاه Fk^+.

راسل

[تذکر: (رده = class) در نوشته‌های راسل و وایتهد در واقع قابل تعبیر به مجموعه است]

(۱) نظریهٔ ساده رده‌ها: نخست اشیاء ~~[illegible]~~ مرتبهٔ (نوع) 0 را داریم. سپس اشیاء مرتبهٔ (نوع) 1 که عبارتند از رده‌هایی که اعضای آنها اشیاء نوع 0 هستند، سپس اشیاء مرتبهٔ (نوع) 2 که رده‌های اشیاء نوع 1 هستند، ...

(۲) نخست راسل تعریف فرگه از عدد صفر را می‌پذیرد. بدین ترتیب صفر شیئی از مرتبهٔ (نوع) 2 است. ~~[illegible]~~

(۳) عدد یک رده از نوع k+1 عبارت است از ردهٔ همهٔ رده‌های متشکل از عناصر ردهٔ k که در تناظر یک به یک با ردهٔ آغازی هستند. پس در مورد راسل (برخلاف فرگه) فقط رده‌های همان نوع در نظر گرفته می‌شوند.

(۴) فرض کنید n یک ردهٔ نوع 2 به صورت بالا است یعنی n ردهٔ همهٔ رده‌های نوع 1 هم‌عدد است، $\alpha \in n$، و $x \notin \alpha$ که x از مرتبهٔ 0 است، آنگاه تالی n را عدد $\alpha \cup \{x\}$ می‌گیریم.

(۵) توجه کنید که جز برای صفر، تعریف‌های فرگه و راسل از اعداد مطابقت نخواهند داشت. مثلاً از نظر فرگه 1 [illegible] شامل $\{\{\Phi\}\}$ است که از نوع 3 راسل است در حالی که برای راسل اگر x یک شیء از مرتبهٔ 0 باشد، عدد 1 ردهٔ مربوط به $\{x\}$ خواهد بود، به همین ترتیب برای اعداد دیگر. نظریهٔ راسل محتاج اصل است، اصل بی‌نهایت، اصل وجود بی‌نهایت شیء از مرتبهٔ 0 را بپذیرد تا بتواند همهٔ اعداد را در مرتبهٔ 2 تولید کند. در مورد فرگه چنین نیست، او می‌تواند از $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ برای 2 استفاده کند، و غیره.

(۶) حال اگر به سیاق فرگه، راسل مجموعهٔ S را متشکل از آن موجودات از مرتبهٔ 2 تعریف کند که عضو هر مجموعهٔ مرتبهٔ 3، مانند S، باشند که اولاً $0 \in S$ و ثانیاً اگر $n \in S$ آنگاه تالی n نیز عضو

باشد، تعریف او دچار impredicativity نمی‌شود زیرا خود ها یکی از جربه‌هایی است که مورد اشاره است، و در اصل اصل impredicativity را نمی‌پذیرد. بنابراین او هر نوع (رتبه) را به لایه‌های 0، 1، 2، ... تجزیه می‌کند (نظریهٔ نوع شاخه‌دار یا Ramified Type Theory). در تعریف یک رده از نوع k و لایهٔ l، نه فقط اشیای نوع (k-1) قابل استفاده‌اند، بلکه در تعریف می‌توان از رده‌های لایهٔ l یا بالاتر استفاده کرد. رده‌های لایهٔ 0 را predicative می‌خوانند، پس در تعریف این رده‌ها، اشاره‌ای به رده‌های همان رتبه نیست. بدین ترتیب نسخه‌های مختلفی از ها به دست می‌آید، مثلاً n یک عدد طبیعی از لایهٔ 1 است اگر متعلق به هر ردهٔ لایهٔ 0 (predicative) از نوع 3 باشد که 0 در آن است و نیز تالی هر n همراه n در آن است (توصیف ها در لایهٔ 1). به همین ترتیب n یک عدد طبیعی از لایهٔ 2 است اگر متعلق به هر ردهٔ لایهٔ 1 (از نوع 3) باشد که 0 در آن است و نیز تالی هر n همراه خود n در آن است (توصیف ها در لایهٔ 2). این هم یکتایی تعریف ها و صحیح بودن آن که ادعا می‌کند باید باشد، که راسل در ادامه به اصل فروکاهی (Reducibility) روی آورد که طبق آن در هر رتبه (نوع) هر شیء از لایهٔ k دارای شیء هم‌ارزی در لایهٔ 0 همان رتبه (نوع) است که دقیقاً همان اعضای شیء اول را دارد.