$PSL(2,\mathbb{R})$ و زیرگروه‌های گسستهٔ آن

اصطلاح دیگر برای زیرگروه‌های گسستهٔ $PSL(2,\mathbb{R})$: گروه فوخسی (Fuchsian)

$$SL(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \middle| ad-bc=1, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}, \quad PSL(2,\mathbb{R})=\frac{SL(2,\mathbb{R})}{\{\pm I\}}$$

رده‌بندی عناصر $PSL(2,\mathbb{R})$ برحسب $|trace|=|a+d|$

(آ) $|a+d|<2$ بیضوی : در اینصورت دو نقطهٔ ثابت (مزدوج) که یکی در $\mathbb{H}$ است.

(آآ) $|a+d|=2$ سهموی : در اینصورت یک نقطهٔ ثابت روی $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

(آآآ) $|a+d|>2$ هذلولوی : دو نقطهٔ ثابت روی $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

گزاره (تمرین ۳) فرض کنید $f\in PSL(2,\mathbb{R})$. در اینصورت :

(آ) اگر f بیضوی باشد، f یک دوران (حول نقطهٔ ثابت) در هندسهٔ هذلولوی است. در این حالت نشان دهید $\alpha\in\,]0,\pi[$ منحصر به فردی وجود دارد که f در $PSL(2,\mathbb{R})$ با نگاشت زیر مزدوج است :

$$\frac{(\cos\alpha)z-\sin\alpha}{(\sin\alpha)z+\cos\alpha} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

(آآ) اگر f سهموی باشد، f با یکی از دو انتقال افقی $z\mapsto z+1$ یا $z\mapsto z-1$ در $PSL(2,\mathbb{R})$ مزدوج است. به علاوه این دو انتقال با یکدیگر مزدوج نیستند.

(آآآ) اگر f هذلولوی باشد، f با یک تجانس $z\mapsto kz$، $k>0$، مزدوج است (در $PSL(2,\mathbb{R})$). دو تجانس $z\mapsto kz$ و $z\mapsto lz$ با یکدیگر مزدوج هستند اگر و فقط اگر $k=l$ و یا $kl=1$.

تمرین ۱ (الف) $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{H}$ ترایا است یعنی به ازای هر دو عضو $z_1,z_2\in\mathbb{H}$ عضوی مانند $g\in PSL(2,\mathbb{R})$ وجود دارد که $g(z_1)=z_2$. (ب) $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ به طور مضاعف ترایا است یعنی که برای هر دو زوج مرتب (z_1,w_1) و (z_2,w_2) از $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$، عضوی $g\in PSL(2,\mathbb{R})$ وجود دارد که $g(z_1)=z_2$ و $g(w_1)=w_2$.

تمرین ۲ (الف) دو عضو غیرهمانی $PSL(2,\mathbb{R})$ با هم جابه‌جا می‌شوند اگر و فقط اگر مجموعهٔ نقاط ثابت آنها یکی باشد.

(ب) برای هر $g\in PSL(2,\mathbb{R})$، مرکزساز g، $C(g)$، عبارت است از زیرگروه عناصر $PSL(2,\mathbb{R})$ که با g

جا به جا می‌شوند. نشان دهید عناصر $C(g)$، به استثنای همانی، هم با g از یک نوع (بیضوی، سهموی یا هذلولوی) هستند.

ساختار توپولوژیک $PSL(2,\mathbb{R})$: شاید تجسم $Aut(\mathbb{D})$ بهتر از $Aut(\mathbb{H})$ که همان $PSL(2,\mathbb{R})$ است، ساده‌تر باشد. می‌دانیم خودریختی‌های تحلیلی $\mathbb{D}$ به شکل

$$e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

هستند. $e^{i\alpha}$ یک عضو از دایره واحد، S^1، است و z_0 می‌تواند هر عضو $\mathbb{D}$ باشد و این دو از هم مستقل هستند. بدین ترتیب می‌توان $Aut(\mathbb{D})$ را در تناظر با $S^1\times\mathbb{D}$ قرار داد. روی $S^1\times\mathbb{D}$ توپولوژی القا شده از $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^4$ را در نظر می‌گیریم و به $Aut(\mathbb{D})$، یا ساده‌تر $Aut(\mathbb{H})$، منتقل می‌کنیم. پس $Aut(\mathbb{H})$ را می‌توان به صورت چنبره توپر باز تجسم کرد. در تناظر با این توپولوژی گسسته بودن یک زیرگروه $Aut(\mathbb{H})$ معنی دار است: زیرگروه باید زیرمجموعه‌ای گسسته در $S^1\times\mathbb{D}$ باشد.

به کنش (action) گروه $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{H}$ خواهیم پرداخت که همان

$$\Phi: PSL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}, z\right)=\frac{az+b}{cz+d}$$

است. دو اصطلاح discontinuous و properly discontinuous در مراجع مختلف به معانی متفاوت مورد استفاده‌اند. ما تعریف‌های زیر را اتخاذ می‌کنیم:

کنش زیرگروه G از $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{H}$ را ناپیوسته (discontinuous) می‌نامیم در صورتی که برای هر $z\in\mathbb{H}$، همسایگی باز U از z وجود داشته باشد که برای هر عضو نابدیهی $g\in G$ داشته باشیم $g(U)\cap U=\phi$. کنش زیرگروه G از $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{H}$ را منفصل (properly discontinuous) می‌نامیم در صورتی که برای هر $z\in\mathbb{H}$، همسایگی باز U از z وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر عضو نابدیهی $g\in G$ که $g(U)\cap U\neq\phi$، داشته باشیم $g(z)=z$. بدین ترتیب شرط ناپیوسته بودن محدودکننده‌تر است.

تمرین: فرض کنید Γ یک زیرگروه $PSL(2,\mathbb{R})$ است. در این صورت:

(الف) Γ گسسته (فوکسی) است اگر و فقط اگر کنش Γ روی $\mathbb{H}$ منفصل باشد.

(ب) اگر Γ به طور منفصل عمل کند، مجموعه نقاط ثابت عناصر نابدیهی Γ یک زیرمجموعه گسسته از $\mathbb{H}$ است.

(پ) Γ فوکسی است اگر و فقط اگر برای هر $z\in\mathbb{H}$، مدار z، یعنی $\Gamma z=\{g.z\mid g\in\Gamma\}$، یک زیرمجموعه گسسته $\mathbb{H}$ باشد.

لم. فرض کنید $z\in\mathbb{H}$ داده شده است. نگاشت $\Phi^z: PSL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ را به صورت

$$\Phi^z(g) = g\cdot z$$

تعریف می‌کنیم. Φ^z یک نگاشت سره است، یعنی برای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از $\mathbb{H}$، پیش‌تصویر

$$(\Phi^z)^{-1}(K) = \{g\in PSL(2,\mathbb{R}) \mid g\cdot z\in K\}$$

در $PSL(2,\mathbb{R})$ فشرده است.

اثبات لم. یادآوری می‌کنیم که توپولوژی $PSL(2,\mathbb{R})$ القا شده از $\mathbb{R}^4$ است، پس باید ثابت کنیم $(\Phi^z)^{-1}(K)$ بسته و کراندار است. بسته بودن از پیوستگی Φ^z و بسته بودن K نتیجه می‌شود (توجه: کنش $PSL(2,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{H}$ پیوسته است زیرا که توسط عبارت $z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ تعریف می‌شود، در نتیجه تحدید Φ به تقاطع $PSL(2,\mathbb{R})\times\{z\}$، یعنی Φ^z، پیوسته است)، بنابراین کافی است ثابت کنیم $(\Phi^z)^{-1}(K)$ کراندار است. چون K فشرده، پس کراندار است، $M>0$ وجود دارد که برای هر عنصر $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ از $(\Phi^z)^{-1}(K)$:

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|\le M \qquad (1)$$

همچنین چون فشردهٔ K از $\partial\mathbb{H}=\mathbb{R}$ فاصلهٔ مثبت ρ دارد، پس

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\ge\rho$$

داریم

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar z+d)}{|cz+d|^2}\right)$$

$$=\operatorname{Im}\frac{adz+bc\bar z}{|cz+d|^2}=\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

پس

$$|cz+d|\le\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\rho}\right)^{\frac12} \qquad (2)$$

و بنابر (1):

$$|az+b|\le M\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\rho}\right)^{\frac12} \qquad (3)$$

z ثابت است، پس از (2) و (3) نتیجه می‌گیریم که برای درایه‌های a, b, c, d ماتریس عضو $(\Phi^z)^{-1}(K)$ کران یکنواختی وجود دارد. □

اثبات دقیق نکته. فرض کنید Γ گسسته است و $z\in\mathbb{H}$. گوی بستهٔ $\bar B$ به مرکز z در نظر بگیرید. چون $\bar B$ فشرده است، طبق لم $(\Phi^z)^{-1}(\bar B)$ فشرده است و چون Γ گسسته است، $(\Phi^z)^{-1}(\bar B)$ باید متناهی باشد. بنابراین به تعداد متناهی از اعضای مدار z، Γz، در $\bar B$ قرار می‌گیرند. بنابراین می‌توان $\varepsilon>0$ را به گونه‌ای اختیار کرد که گوی $B_\varepsilon(z)$ فاقد نقاط Γz به استثنای خود z باشد (در اینجا از یک تعبیر بیشتر هندسی

را به کار می‌گیریم. (می‌دانیم که توپولوژی حاصل از آن با توپولوژی ترک اقلیدسی یکی است.)
ادعا می‌کنیم $U=B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ شرط منفصل بودن را برقرار می‌کند، یعنی اگر برای $g\in\Gamma$ داشته باشیم $U\cap gU\neq\phi$ آنگاه $g(z)=z$. فرض کنید $w\in U$ وجود دارد که $g(w)\in U$. آنگاه:

$$d(z,g.z)\le d(z,g.w)+d(g.w,g.z)$$

چون $g\in Aut(\mathbb{H})$ داریم $d(gw,gz)=d(w,z)$، پس

$$d(z,g.z)<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

بنابراین با انتخاب ε باید داشته باشیم $g.z=z$ و حکم به اثبات می‌رسد. قبل از اثبات عکس حکم (الف) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید z یک نقطه ثابت برای عضو (بیضوی) $g\in\Gamma$ باشد. طبق آنچه در بالا ثابت شد، همسایگی U از z وجود دارد که اگر $g'U\cap U\neq\phi$ برای $g'\in\Gamma$، آنگاه $g'.z=z$. ادعا می‌کنیم در U هیچ نقطه ثابت دیگری برای اعضای غیرهمانی Γ وجود ندارد. فرض کنید $w(\neq z)$ در U به گونه‌ای است که $g'.w=w$ برای $g'\in\Gamma$. پس $g'U\cap U\neq\phi$ که نتیجه می‌دهد $g'.z=z$، یعنی g' دارای دو نقطه ثابت متمایز z و w است. این غیرممکن است زیرا اگر یک عضو $PSL(2,\mathbb{R})$ نقطه ثابت داشته باشد، آن عضو بیضوی است و فقط یک نقطه ثابت در $\mathbb{H}$ دارد. حال به اثبات جهت دیگر (الف) می‌پردازیم. فرض کنید Γ به طور منفصل عمل می‌کند. با برهان خلف فرض کنید Γ گسسته نیست. اگر Γ گسسته نباشد، عضوی $g\in\Gamma$ وجود دارد و دنباله‌ای $g_n\in\Gamma$ که $g_n\to g$ (یادآوری می‌کنیم که $PSL(2,\mathbb{R})$ توپولوژی $\mathbb{R}^+\times\mathbb{D}$ را دارد). بنابراین دنباله $(g^{-1}g_n)$ به عضو همانی گرایش می‌کند. قرار دهید $h_n=g^{-1}g_n$. طبق (ب) نقاطی $z\in\mathbb{H}$ وجود دارند که هیچ عضو غیرهمانی Γ آنها را ثابت نگه نمی‌دارد. فرض کنید z چنین نقطه‌ای است و U یک همسایگی باز z. از آنجا که $h_n.z\to z$ نتیجه می‌گیریم که nای وجود دارد که $h_nU\cap U\neq\phi$ ولی $h_nz\neq z$. این تناقض نشان می‌دهد که Γ باید گسسته باشد.
برای (ب)، اگر Γ گسسته باشد که طبق (الف) هر نقطه $z\in\mathbb{H}$ دارای همسایگی‌ای است که فاقد نقاط ثابت به جز خود z است. بالعکس فرض کنید هر Γ_z گسسته است. نتیجه می‌شود برای هر z همسایگی U از آن وجود دارد که تنها نقطه Γ_z در آن خود z است. $\varepsilon>0$ را طوری می‌گیریم که $B_\varepsilon(z)\subset U$. طبق استدلال قسمت (الف)، اگر $V=B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$، آنگاه $V\cap g.V\neq\phi$ نتیجه می‌دهد $g.z=z$، پس Γ به طور منفصل عمل می‌کند و طبق (الف) Γ باید گسسته باشد. □

برای گروه فوکسی Γ در $\mathbb{H}$، $z\in\mathbb{H}$، طبق حکم (پ)، اگر (g_n) یک دنباله از اعضای (تمایز) Γ باشد و $g_n.z\to w$، w باید در $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ باشد. مجموعه چنین نقاط w را مجموعه حدی Γ می‌نامیم و با $L(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تمرین ۴: اگر g یک عضو سهموی یا هذلولوی $PSL(2,\mathbb{R})$ باشد، نشان دهید زیرگروه دوری ایجاد شده

توسط g و با $\mathbb{Z}$ یکریخت است و مجموعه حدی این زیرگروه را مشخص کنید.

تمرین ۵. اگر g یک عضو سهموی $PSL(2,\mathbb{R})$ باشد، نشان دهید زیرگروه دوری ایجاد شده توسط g گسسته است و نتیجه بگیرید که مجموعه حدی این زیرگروه تک‌عضوی است.

تمرین ۶. گروه پیمانه‌ای $PSL(2,\mathbb{Z})$ متشکل از آن اعضای $PSL(2,\mathbb{R})$ است مانند $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. نشان دهید گروه پیمانه‌ای گسسته است و مجموعه حدی آن برابر $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ است.

مراجع این بخش: مرجع کلاسیک کتاب زیر است:

L.R. Ford Automorphic Functions

کتاب خوش‌خوان جدید:

G.A. Jones & D. Singerman Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint

و دهها کتاب دیگر. بعضی مردم از کتاب A. Beardon بنام
Geometry of Discrete Groups
خوششان می‌آید.

تمرین ۷. تست (3) از Proposition 21.14 کتاب Hubbard. تعریف $D(\alpha)$ در صفحه ۳۰ کتاب آمده است.

تکلیف خواندنی: اگر فضای پوششی (covering space) را نمی‌دانستید آن را یاد بگیرید. مراجع: حدود ۲۰ صفحه کتاب Hatcher، اول کتاب Forster، تمرین‌ها و کتاب‌های توپولوژی جبری. یک کتاب خیلی خوش‌خوان کتاب برزیلی است که از پرتغالی به انگلیسی ترجمه شده:

E.Lima Fundamental Groups and Covering Spaces

(۶)

قضیه Γ زیرگروهی از $PSL(2,\mathbb{R})$ که همه اعضای آن به غیر از همانی هذلولوی هستند. اگر Γ آبلی نباشد، Γ گسسته است.

لم فرض کنید Γ یک زیرگروه $PSL(2,\mathbb{R})$ است که همه اعضای غیرهمانی آن هذلولوی هستند. اگر (A_n) دنباله‌ای از اعضای Γ باشد که $A_n \to I$ (I: ماتریس همانی) و $A \in \Gamma$، آنگاه N موجود است که $AA_n = A_nA$ برای $n \geq N$.

اثبات لم با مزدوج‌سازی (در صورت لزوم) می‌توان فرض کرد که نقاط ثابت A عبارتند از 0 و ∞، پس ماتریس A به شکل $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ است که $0 < \lambda \neq 1$. ماتریس A_n را به صورت $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم. محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که برای $B_n = AA_nA^{-1}A_n^{-1}$ و $C_n = AB_nA^{-1}B_n^{-1}$ داریم:

$$(1) \quad \operatorname{trace} B_n = 2 - b_nc_n(\lambda - \lambda^{-1})^2$$

$$(2) \quad \operatorname{trace} C_n = 2 + a_nb_nc_nd_n(\lambda - \lambda^{-1})^4$$

چون $A_n \to I$ داریم:

$$(3) \quad a_n \to 1, \quad d_n \to 1$$

$$(4) \quad b_n \to 0, \quad c_n \to 0$$

از (1) نتیجه می‌گیریم که $b_nc_n \leq 0$ (چون B_n یا هذلولوی است یا برابر I). از طرفی دیگر (3) و (2) برای n بزرگ نتیجه می‌دهند که $b_nc_n \geq 0$ زیرا که C_n یا هذلولوی است یا برابر I. پس باید داشته باشیم $b_nc_n = 0$ برای n های به اندازه کافی بزرگ، و در نتیجه $\operatorname{trace} B_n = 2$. ولی B_n سهموی نیست، پس لزوماً B_n باید همانی باشد، یعنی برای n بزرگ $A_nA = AA_n$ و لم به اثبات می‌رسد. $\square$

اثبات قضیه مجدداً با مزدوج گرفتن از Γ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که عضوی A از Γ وجود دارد که نقاط ثابت آن 0 و ∞ هستند. اگر Γ گسسته نباشد، دنباله‌ای از اعضای متمایز آن وجود دارد که به عضوی از گروه مانند S میل می‌کند. با ضرب کردن در S^{-1}، می‌توان فرض کرد دنباله‌ای از نقاط متمایز وجود دارد که به ماتریس همانی، یعنی I، میل می‌کند. طبق لم، برای n به اندازه کافی بزرگ $AA_n = A_nA$، پس نقاط ثابت A_n نیز 0 و ∞ هستند، یعنی می‌توان نوشت:

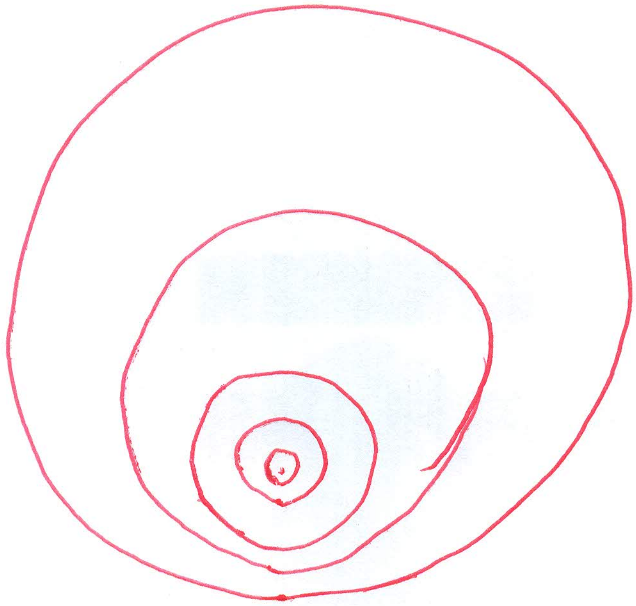
$$A_n = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ 0 & a_n^{-1} \end{bmatrix}, \quad 0 < a_n \neq 1, \quad A_n \to I$$

اگر $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ عضو دلخواهی از Γ باشد، جابجاگر $A_nBA_n^{-1}B^{-1}$ را در نظر می‌گیریم. محاسبه مستقیم نشان می‌دهد:

$$A_nBA_n^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} * & \alpha\beta(a_n^2 - 1) \\ \gamma\delta(a_n^{-2} - 1) & * \end{bmatrix}, \quad A_nBA_n^{-1}B^{-1} \longrightarrow I$$

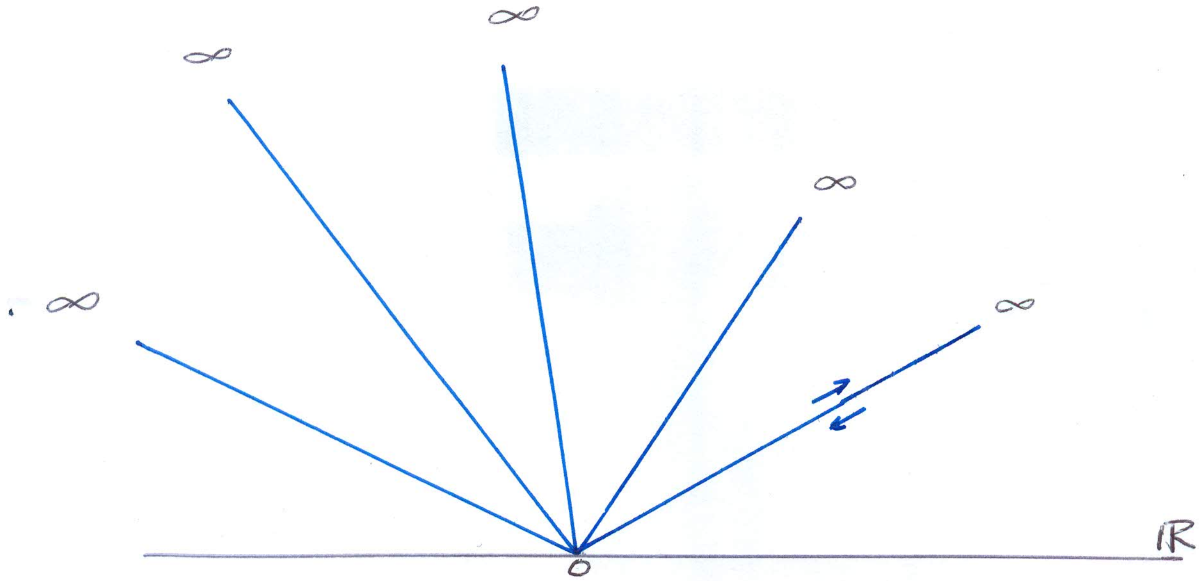
طبق لم، برای n به اندازه کافی بزرگ باید داشته باشیم $\gamma\delta = 0 = \alpha\beta$.

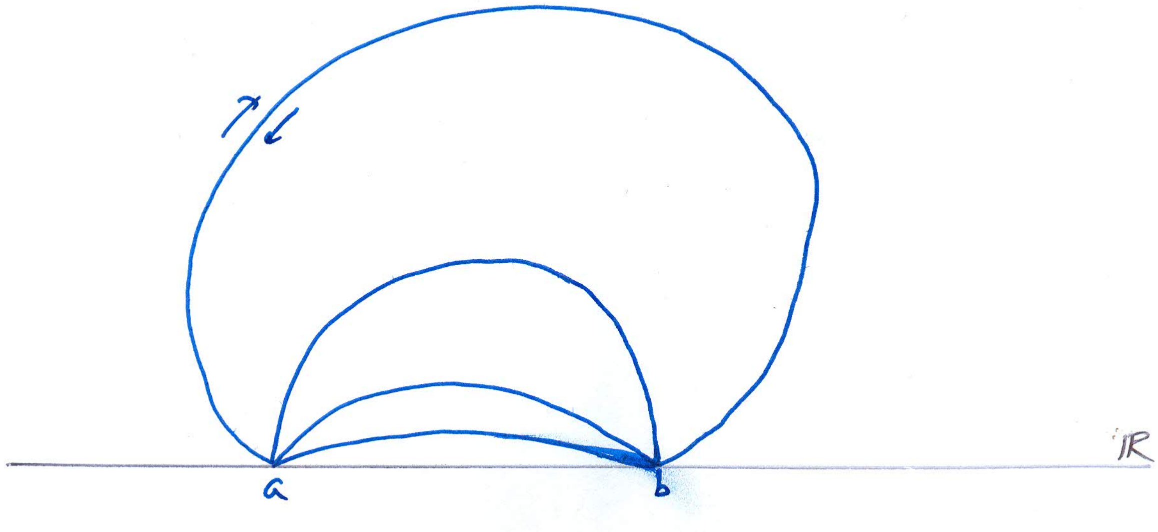
اگر $\alpha = 0$ که از $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ نتیجه می‌گیرد $\gamma \neq 0$، پس $\delta = 0$ و $\alpha + \delta = 0$ که خلاف هذلولوی بودن B است. پس $\beta = 0$. به همین ترتیب نتیجه می‌دهیم $\delta \neq 0$ (از $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) و $\gamma = 0$. بنابراین داریم $\beta = \gamma = 0$ و ماتریس B، که عضو دلخواهی از Γ انتخاب شده بود، باید 0 و ∞ را به عنوان نقاط ثابت داشته باشد، پس Γ آبلی است. $\square$



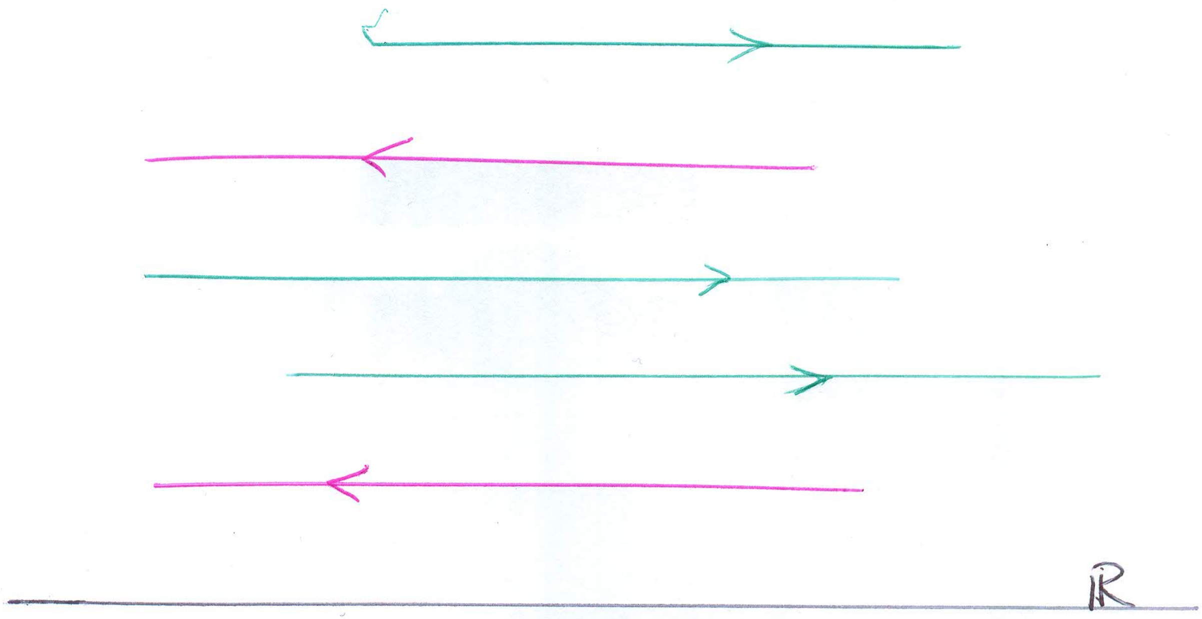
IR

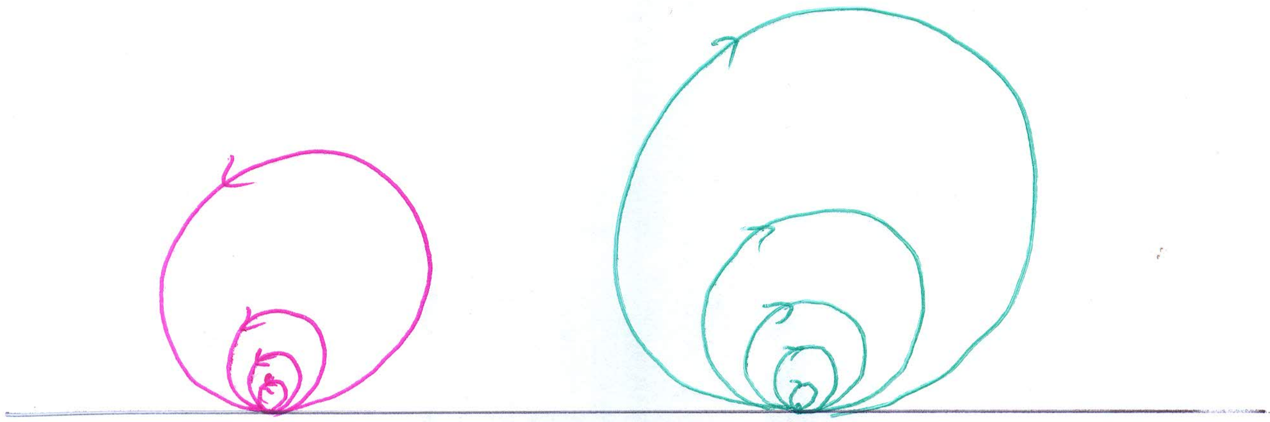
تبدیل مقعری با طره‌های (هذلولی) تا مردا





تبدیل هذلولوی و قطره‌ای همفاصله تاوردا





تبدیل سهموی و دورهای ساعتی نادردا