درس دوم جلسه ۱۹/۸/۹۹

در آغاز کلاس پس اشتباهاً به جای $dz+\mu\, d\bar{z}$ نوشتم $d\bar{z}+\mu\, dz$ دانشجویان همه چیز را از اول به هم ریخت. در این جلسه بر شرح مجدد آنچه می‌خواستم بگویم، اصل خلاصه این کار را که در واقع در آغاز بحث Mapping Theorem هم به آن اشاره داشتم به صورت کامل‌تری می‌نویسم که هیچ ابهامی باقی نماند زیرا که در آینده هم بحث حول این محور خواهد بود.

از معادلات دیفرانسیل عادی شروع می‌کنیم. فرض کنید دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر در صفحه داده شده است:

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=f_2(x,y) \end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه خم‌های پارامتری $(x,y)=\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t))$ در صفحه هستند، یعنی $x=\alpha_1(t)$ و $y=\alpha_2(t)$. تابع $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ یک انتگرال اولیه (First integral) برای دستگاه (*) خوانده می‌شود در صورتی که مقدار F روی هر خم جواب، یعنی تصویر $\alpha(t)$، ثابت بماند (معمولاً اضافه می‌کنند که خود F ثابت نباشد). بدین ترتیب:

$$0=\frac{d}{dt}\big((F\circ\alpha)(t)\big)=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot f_1(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot f_2(x,y)$$

(به بیان دیگر گرادیان F بر جهت‌های جواب یا میدان دیفرانسیل عمود باشد). در حالتی که f_1 و f_2 هیچگاه صفر نشوند می‌توان دو معادله (*) را بر هم تقسیم کرد و به طور موضعی y را به عنوان تابعی از x (یا x را به عنوان تابعی از y) نوشت، که معادله $\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$، یا معادل آن معادله زیر به دست می‌آید:

$$(**)\qquad f_2\cdot dx-f_1\cdot dy=0$$

بسیاری اوقات معادلات دیفرانسیل در صفحه به صورت (**) طرح می‌شوند، که طرف چپ یک فرم دیفرانسیل است. منظور از حل (**) (یا یافتن جواب برای آن) همان یافتن خم‌های $\alpha(t)$ است، و انتگرال اولیه برای (**) همان انتگرال اولیه برای (*) است، یعنی تابعی که روی هر جواب مقدار ثابت داشته باشد. به بیان دیگر، جواب‌های (**)، به صورت خم هندسی، منحنی‌های تراز یک انتگرال اولیه برای (**) هستند. با این دیدگاه، معنی هندسی "فاکتور انتگرال‌گیری" (integrating factor) در درس دیفرانسیل روشن می‌شود: اگر تابع $M(x,y)$ یافت شود که

$$\frac{\partial}{\partial y}(M\cdot f_2)=\frac{\partial}{\partial x}(-M\cdot f_1)$$

آنگاه به طور ضمنی تابعی F وجود دارد که:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M.f_2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -M.f_1$$

بنابراین $(**)$ را می‌توان با ضرب کردن در M به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

یا $dF=0$، پس یک انتگرال اولیه F یافت شده است که جوابهای تراز آن جواب $(**)$ هستند.

به عبارت دیگر، حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه اول را به طور ضمنی می‌دانیم: فرض کنید معادله

$$(\#) \qquad A(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

داده شده است. به دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = B(x,y) \end{cases}$$

یا معادله $Bdx-Ady=0$ توجه کنید. اگر یک فاکتور انتگرال‌گیری M برای این دستگاه وجود داشته باشد، با ضرب کردن $(\#)$ در $M(x,y)$، می‌بینیم که جواب عمومی F برای $(\#)$ یک انتگرال اولیه برای معادله دیفرانسیل عادی است. به این ترتیب دو مسأله زیر معادل هستند:

$$(\#\#) \begin{cases} A\frac{\partial F}{\partial x} + B\frac{\partial F}{\partial y} = 0 & \text{حل} \\ Bdx-Ady=0 & \text{یافتن انتگرال اولیه برای} \end{cases}$$

بالاخره به جای متغیرهای x و y از z و $\bar{z}$ استفاده می‌کنیم که داریم $dz=dx+idy$، $d\bar{z}=dx-idy$، $dx=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z})$، $dy=\frac{1}{2i}(dz-d\bar{z})$، $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$، $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$، $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ و $\frac{\partial}{\partial y}=i(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$. با جاگذاری در $(\#\#)$، به معادلات دو مسأله زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} P\frac{\partial}{\partial z} + Q\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0 \\ Qdz - Pd\bar{z} = 0 \end{cases} \text{و به طور کلی} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z} = 0 & \text{حل معادله برای} \\ dz + \mu d\bar{z} = 0 & \text{یافتن انتگرال اولیه برای} \end{cases}$$

حال این سوالی که می‌خواستم در کلاس بگویم: اگر فرم بلترامی یک دستگاه مختصات به شکل $dz+\mu d\bar{z}$ و در دستگاه دیگر به شکل $dw+\nu d\bar{w}$ باشد و اگر از یک دستگاه به دستگاه دیگر با تابع تحلیلی $w=\varphi(z)$ برویم، چه رابطه‌ای بین μ و ν برقرار است؟

از رابطه تغییر $dw=\varphi'(z)dz$، بنابراین:

$$dw+\nu d\bar{w} = \varphi'(z)dz + \nu(\varphi(z))\overline{\varphi'(z)}\,d\bar{z}$$
$$= \varphi'(z)\left[dz + \nu(\varphi(z))\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}d\bar{z}\right]$$

توجه کنید که $\varphi(z)$ تحلیلی است و از این رو ضریب کلی ندارد، بنابراین

$$\mu(z)d\bar{z} = \nu(\varphi(z))\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}d\bar{z}$$
$$= \nu(\varphi(z))\frac{\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}}{\frac{dw}{dz}}d\bar{z} \quad , \quad \Rightarrow \mu(z)\frac{dw}{dz} = \nu(w)\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}$$

یا به طور نمادین

$$\square. \quad \mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz} = \nu(w)\frac{d\bar{w}}{dw}$$