درباره تابع j (در بسیاری منابع به جای j می‌نویسند J)

شبکه $\Omega=\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ در صفحه $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید که نسبت $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ را به ω نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\Im\omega>0$. یادآوری می‌کنیم که ضرایب g_2 و g_3 به ترتیب همگن‌های چهار و منهای شش عناصر شبکه وابسته‌اند، پس در مورد دو شبکه $\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ و $\langle 1,\omega\rangle$ داریم:

$$g_2(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{\omega_1^4}g_2(1,\omega), \quad g_3(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{\omega_1^6}g_3(1,\omega)$$

با توجه به تعریف

$$j=j(\omega_1,\omega_2)=\frac{g_2^3(\omega_1,\omega_2)}{\Delta(\omega_1,\omega_2)}$$

که در آن $\Delta=g_2^3-27g_3^2$، نتیجه می‌شود که $j=j(\omega_1,\omega_2)=j(1,\omega)$، یعنی j فقط به نسبت $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\omega$ وابسته است. در این صورت j را تابعی از $\omega\in\mathbb{H}$ تلقی می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که j یک تابع پیمانه‌ای است، یعنی اگر $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$، آنگاه

$$j\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)=j(\omega)$$

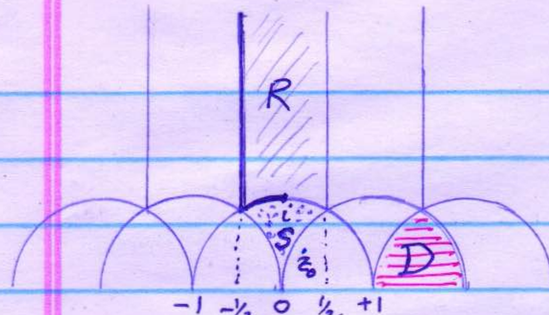
دلیل این است که ماتریس $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ شبکه $\Omega=\langle\omega_1,\omega_2\rangle$ را به خودش می‌نگارد، پس j عوض نمی‌شود ولی از طرف دیگر اگر (ω_1',ω_2') پایه جدید باشد، $\omega'=\frac{\omega_2'}{\omega_1'}=\frac{a\omega+b}{c\omega+d}$. می‌توان این مطلب را از مشاهده سری‌های مربوط به ضرایب g_2 و g_3 نیز ملاحظه کرد. به این ترتیب که همچنان که بعداً خواهیم دید هر تبدیل پیمانه‌ای (عضو $PSL(2,\mathbb{Z})$) ترکیبی از $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ است. و به آسانی دیده می‌شود که این دو تبدیل سری‌های مربوط به g_2 و g_3 را عوض نمی‌کنند.

مطلب مهم دیگر رفتار j در ∞ است. برای این کار نخست به برخی از عناصر $SL(2,\mathbb{Z})$ و ساختار گروهی آن می‌پردازیم. سه عضو زیر از $PSL(2,\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید:

$$T:\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ z\mapsto z+1 ، \quad V:\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ z\mapsto\frac{-1}{z} ، \quad W=VT:\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix},\ z\mapsto\frac{-1}{z+1}$$

هر دو عضو از سه عضو بالا عضو سوم را تولید می‌کنند: $W=VT$، $V=WT^{-1}$، $T=VW$. توجه کنید که V از مرتبه ۲ است: $V^{-1}=V$، W از مرتبه ۳ است، و T یک گروه دوری نامتناهی یکریخت با $(\mathbb{Z},+)$ (انتقال‌های افقی به طول ۱) ایجاد می‌کند. ناحیه R در $\mathbb{H}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: درون R عبارت است از $\{z\in\mathbb{H} \mid -\frac12<\Re z<\frac12,\ |z|>1\}$. نقاط مرزی زیر را از مرز R به R می‌افزاییم: $\Re z=-\frac12$ و نقاط $|z|=1$ که $-\frac12\le\Re z\le 0$. به این ترتیب:

$$R=\{z\in\mathbb{H}\mid -\tfrac12<\Re z<\tfrac12,\ |z|>1\}\cup\{z\in\mathbb{H}\mid\Re z=-\tfrac12,\ \Im(z)\ge\tfrac{\sqrt3}{2}\}\cup\{z\in\mathbb{H}\mid |z|=1,\ -\tfrac12\le\Re z\le0\}$$



ادعا می‌کنیم R یک ناحیهٔ بنیادی (یا شکل بنیادی)
برای $PSL(2,\mathbb{Z})$ است، به این معنی که:

(۱) برای هر $z\in\mathbb{H}$، عضوی از مدار z در $\bar{R}$ هست

(۲) برای هر $z\in\mathbb{H}$، بیش از یک عضو مدار z در R نیست

توجه داشته باشید که تحت اثر T، ضلع عمودی چپ R به ضلع راست که جزو R نیست منتقل می‌شود، و تحت V، نیمهٔ چپ کمان مرزی R به نیمهٔ راست نگاشته می‌شود که چون $i \mapsto i$ نقطهٔ i در دو نیمه مشترک است.

<u>اثبات (۱)</u> این ادعا معادل این است که نشان دهیم با کنش اعضای $PSL(2,\mathbb{Z})$، $\bar{R}$ همهٔ $\mathbb{H}$ را می‌پوشاند. تحت T توجه کنید که ناحیهٔ نقطه‌چین S در زیر آن تقریباً تصویر R تحت $W=VT$ است (با اثر دهندهٔ V روی اضلاع مرزی تصویر R توجه کنید). با انتقال T^k، $k\in\mathbb{Z}$، همهٔ $\mathbb{H}$ با شکل‌های درون ناحیه‌های گنبدی شکل (مانند D) با پایه روی محور $\mathbb{R}$ پوشش داده می‌شوند، پس کافی است نشان دهیم یک ناحیهٔ گنبدی شکل نیز تحت $PSL(2,\mathbb{Z})$ از $\bar{R}$ پوشیده می‌شود، زیرا به کمک T^k همهٔ ناحیه‌های گنبدی شکل پوشش داده می‌شوند. بنابراین می‌توان از دو نیمهٔ گنبد که ناحیهٔ

$$A=\{z\in\mathbb{H} \mid -\tfrac{1}{2}\leq \operatorname{Re} z\leq \tfrac{1}{2},\ z\notin \bar{R}\cup\bar{S}\}$$

را تشکیل می‌دهند استفاده کرد زیرا که با T می‌توان نیمهٔ چپ را منتقل کرد به گنبدی که با نیمهٔ راست یک گنبد کامل تشکیل دهد. نقطه‌ای z_0 در A در نظر بگیرید. اگر نقطه‌ای از مدار z_0 با اجتماع $\bar{R}\cup\bar{S}$ یا انتقال‌های آن تحت T^k، $k\in\mathbb{Z}$، وارد شود که کار تمام است، پس فرض می‌کنیم مدار z_0 تماماً در اجتماع گنبدها قرار گیرد. ادعا می‌کنیم عضوی z از این مدار هست که $\operatorname{Im}(z)$ نسبت به سایر نقاط مدار ماکسیمم است. اگر چنین نباشد، دنباله‌ای $g_n\in PSL(2,\mathbb{Z})$ وجود دارد که $\operatorname{Im}(g_n\cdot z_0)$ صعودی است ولی حد آن متناهی است. حال $g_n\cdot z_0$ در یکی از $T^{k_n}(A)$ قرار دارد. دنبالهٔ $T^{-k_n}(g_n\cdot z_0)$ در A است ولی به عضوی از مدار میل نمی‌کند. این با گسسته بودن گروه $PSL(2,\mathbb{Z})$ در تناقض است [مثلاً به جزوه Topics in Geometry of Discrete Groups در sharif.ir/~shahshah مراجعه کنید]. بنابراین این دنباله قطعاً تعداد متناهی عضو دارد و در نتیجه یکی از آنها ماکسیمم است. فرض کنید $\operatorname{Im}(z_0)$ این ماکسیمم را اختیار کند. قرار می‌دهیم $z_1=V\cdot z_0$. داریم:

$$\operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im}\left(\frac{-1}{z_0}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{-x+iy_0}{|z_0|^2}\right)=\frac{y_0}{|z_0|^2}\geq y_0\left(\frac{4}{3}\right)$$

($\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$) که متناقض با ماکسیمم بودن $\operatorname{Im} z_0$ است، و حکم به اثبات می‌رسد.

<u>اثبات (۲)</u> فرض کنید $z\in R$، با برهان خلف فرض کنیم $w=f(z)$ برای $f\in PSL(2,\mathbb{Z})$، در R نیست.
اگر $c=0$ که f یک انتقال افقی است به شکل T^k، پس w در R نیست. اگر $|c|=1$

(۳)

می‌توان با ضرب کردن چهار درایه ماتریس در (-1) در صورت لزوم، فرض کرد که $c=+1$. برای $f:\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$|w-a| = \left|\frac{az+b}{cz+d} - a\right| = \frac{1}{|z+d|}$$

چون d ~~...~~ یک عدد صحیح است و $z\in R$، داریم $|z+d|>1$، پس $|w-a|<1$ یعنی فاصله w از نقطه صحیح محور $\mathbb{R}$ کوچکتر از 1 است، پس w نمی‌تواند در R باشد. بالاخره در حالت $|c|\geq 2$ داریم:

$$\left|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c}\right| = \frac{1}{c^2|z+\frac{d}{c}|}$$

$\frac{d}{c}$ یک عدد گویا روی $\mathbb{R}$ است، پس $|z+\frac{d}{c}| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه

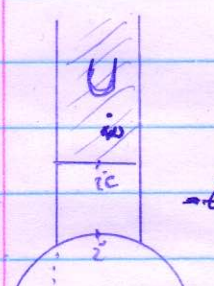
$$\frac{1}{c^2|z+\frac{d}{c}|} < \frac{2}{\sqrt{3}\times 4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

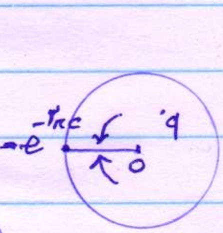
پس فاصله w از یک نقطه روی $\mathbb{R}$ کوچکتر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و w نمی‌تواند در R باشد.

بدین ترتیب ثابت شده است که R یک ~~...~~ ناحیه بنیادی است. ضمناً با توجه به اینکه در استدلال بالا فقط از T و V استفاده شد، یک دستاورد استدلال این است که T و V (یا در واقع هر دو تای T، V و W) گروه $PSL(2,\mathbb{Z})$ را تولید می‌کنند.

حال تابع j روی R را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌دانیم سه ریشه e_1، e_2 و e_3 از $4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$ متمایز هستند، پس $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. نتیجه اینکه $j = \frac{g_2^3(1,\omega)}{\Delta(1,\omega)}$ تابعی تحلیلی از $\omega \in R$ است. می‌خواهیم رفتار این تابع را بررسی کنیم وقتی y در $\omega = iy$ به $+\infty$ میل کند. ~~...~~ فرض کنید $c>1$ و ناحیه زیر را در نظر بگیرید:

$$U = \{\omega \in R \mid \operatorname{Im}\omega > c\} = \{x+iy \mid |x|<\tfrac{1}{2},\ |y|>c\}$$





تابع تحلیلی $\omega \mapsto q = e^{2\pi i\omega}$ را در نظر می‌گیریم. تصویر U تحت $\omega \mapsto q$ عبارت است از گوی باز به مرکز 0 و شعاع $e^{-2\pi c}$ که از آن شعاع واصل از 0 به $(-e^{-2\pi c})$ حذف شده است. این شعاع مربوط به دو ضلع قائم $x = \pm\frac{1}{2}$ می‌باشد. چون تابع $T: z \mapsto z+1$ دو ضلع را به هم می‌نگارد، اگر از بالا یا پایین به این شعاع نزدیک شویم، q به یک مقدار می‌گراید، بنابراین ~~...~~ $\omega \mapsto q$ به طور پیوسته به دو ضلع قائم توسیع می‌یابد. حال اگر وارون $q \mapsto \omega$ را به h نمایش دهیم، تابع $j \circ h$ روی گوی حذف‌شده به مرکز 0 و شعاع $e^{-2\pi c}$ پیوسته و روی گوی حذف‌شده منهای شعاع ذکر شده پیوسته است، بنابراین طبق قضیه‌ای از آنالیز مختلط روی این شعاع نیز تحلیلی می‌شود. بدین ترتیب تابعی تحلیلی روی گوی حذف‌شده داریم که می‌خواهیم وضعیت آن را در نقطه حذف‌شده 0 بررسی کنیم. توجه کنید که تحت $\omega \mapsto q$، وقتی در $\omega = iy$، $y \to +\infty$، q به 0 میل می‌کند، پس بررسی وضعیت $j \circ h$ در 0 معادل بررسی تابع j است وقتی $y \to +\infty$.

(۴)

رفتار g_k ها در ∞ طبق کتاب

$$\cot\pi z=\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\frac{\dfrac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2}}{\dfrac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}}=i\,\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}$$

قرار می‌دهیم $\zeta=e^{2\pi i z}$ و از سری هندسی استفاده می‌کنیم:

$$\pi\cot\pi z=(-i\pi)(1+\zeta)(1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\cdots)$$

$$(*)\qquad \pi\cot\pi z=(-i\pi)\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n\Big)$$

فرمول کلاسیک زیر از آنالیز مختلط مورد نیاز است

$$(**)\qquad \pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\Big(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\Big)$$

طرف‌های راست $(*)$ و $(**)$ را برابر قرار داده و تا پنج بار نسبت به z مشتق می‌گیریم. توجه کنید که $\frac{d\zeta}{dz}=2\pi i\zeta$:

(سه بار مشتق) $$(-6)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^4}=(-16\pi^4)(\zeta+8\zeta^2+\cdots)$$

(پنج بار مشتق) $$(-120)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^6}=(64\pi^6)(\zeta+32\zeta^2+\cdots)$$

حال قرار می‌دهیم $z=m\omega$ که $\omega\in U$، و با یادآوری $q=e^{2\pi i\omega}$ داریم $\zeta=q^m$، پس

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\omega+n)^4}=\frac{8}{3}\pi^4(q^m+8q^{2m}+\cdots)\\[2mm] \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\omega+n)^6}=-\frac{8}{15}\pi^6(q^m+32q^{2m}+\cdots)\end{cases}$$

پس با توجه به فرمول‌های g_2 و g_3 در صفحه ۸۷ کتاب داریم:

$$g_2(1,\omega)=(60)\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{1}{n^4}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\omega+n)^4}\Big]$$

$$=(60)\Big[\frac{\pi^4}{45}+\frac{16}{3}\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}(q^m+8q^{2m}+\cdots)\Big]$$

(با استفاده از $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ که از مشتق‌گیری دیگر از $(**)$ و قرار دادن مقدار z برابر ...)

از همگرایی سری‌ها شاهد هستیم که تابع تحلیلی در $q=0$ حاصل می‌شود و داریم:

$$g_2(1,\omega)=\pi^4\Big(\frac{4}{3}+320q+\cdots\Big)$$

$$g_3(1,\omega)=\pi^6\Big(\frac{8}{27}-\frac{448}{3}q+\cdots\Big)$$ به صورت مشابه می‌توان نشان داد

$$\Delta(1,\omega)=\pi^{12}(4096q+\cdots)$$

و با الحاق (تحلیلی) $j(\omega)=\frac{1}{1728q}+\cdots$ یعنی j قطب مرتبه اول در ∞ دارد. در واقع با استفاده از حقیقت ... از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که j یک یکریختی تحلیلی از $\hat{\mathbb{C}}$ به $\hat{\mathbb{C}}$ است.