دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن — ۲۴ فروردین ۹۳

جلسه‌ی ۱۳: متغیرهای تصادفی هندسی، فوق هندسی، دو جمله‌ای منفی و استقلال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارنده: آرمیتا خواجه‌نصیری و شراره عزّت‌نژاد*

۱ متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید آزمایش‌های مستقلی را که هرکدام احتمال موفقیت p را دارند، آنقدر تکرار کنیم تا یک موفقیت حاصل شود. اگر X نشان دهنده تعداد تکرار آزمایش‌های لازم باشد، به آن یک متغیر تصادفی هندسی[1] می‌گویند.

تعریف ۱ *توزیع هندسی با پارامتر p با تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود.*

$$\Pr\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,$$
$$k=1,2,3,\ldots$$

حال به بررسی خصوصیات این توزیع می‌پردازیم:

۱. متوسط (امید ریاضی)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p \\ &= \tfrac{p}{1-p}\tfrac{1-p}{[1-(1-p)]^2} \\ &= \tfrac{1}{p}\end{aligned}$$

عبارت سطر دوم از این واقعیت که $\sum_{k=0}^{\infty} kr^k=\frac{r}{(1-r)^2}$ نتیجه شده است.

۲. واریانس

می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2] &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p \\ &= \tfrac{p}{1-p}\tfrac{(1-p)(2-p)}{[1-(1-p)]^3} \\ &= \tfrac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

[1] Geometric random variable

عبارت سطر دوم از این واقعیت که $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$ نتیجه شده است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 \\ &= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

۲ متغیر تصادفی فوق هندسی

فرض کنید از جعبه‌ای که حاوی D شیء خراب و $N-D$ شیء سالم است، n شیء را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد اشیاء خراب خارج شده باشد، به آن یک متغیر تصادفی فوق هندسی[2] می‌گویند.

تعریف ۲ *توزیع هندسی با پارامترهای N و D و n با تابع جرم احتمال زیر تعریف می‌شود.*

$$\Pr\{X=k\} = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$k = 0, 1, ..., n$$

حال به بررسی خصوصیات این توزیع می‌پردازیم:

۱. متوسط (امید ریاضی)

$$\mathrm{E}[X] = \frac{nD}{N}$$

۲. واریانس

$$\mathrm{Var}(X) = n\frac{D}{N}(1-\frac{D}{N})(1-\frac{n-1}{N-1})$$

نکته ۱ *توجه کنید که اگر از جعبه‌ای که حاوی D شی خراب و $N-D$ شی سالم است، k شیء را به تصادف و با جایگذاری انتخاب کنیم، آنگاه X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و $\frac{D}{N}$ خواهد بود که تابع توزیع، متوسط و واریانس آن به صورت زیر خواهد بود.*

$$\Pr\{(X=k\} = \binom{n}{k}(\frac{D}{n})^k(1-\frac{D}{N})^{n-k}$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{nD}{N}$$

$$\mathrm{Var}(X) = n\frac{D}{N}(1-\frac{D}{N})$$

[2] HYPERGEOMETRIC RANDOM VARIABLE

۳ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی

فرض کنید یک دنباله از آزمایش‌های برنولی هرکدام با احتمال موفقیت p، انجام گیرند و X تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به rامین موفقیت باشد. آنگاه X یک متغیر تصادفی گسسته به نام دو جمله‌ای منفی[۳] است.

تعریف ۳ *توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامتر (r,p) به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\Pr\{X=k\} = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$
$$k = r, r+1, r+2, ...$$

۱. متوسط (امید ریاضی)

$$\mathrm{E}[X] = \frac{r}{p}$$

۲. واریانس

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

مثال ۱ (مسأله کبریت باناخ) *یک ریاضیدان سیگاری همیشه دو قوطی کبریت، هر یک حاوی N چوب کبریت، همراه خود دارد که یکی در جیب راست و دیگری در جیب چپ او قرار دارد. هر وقت که بخواهد سیگار بکشد، یک جیب را به تصادف انتخاب می‌کند و کبریتی از آن خارج می‌نماید. وقتی ریاضیدان برای اولین بار با یک قوطی خالی مواجه می‌شود، احتمال اینکه در قوطی دیگر دقیقاً m چوب کبریت باشد که $(m = 0, 1, 2, .., N)$، چقدر است؟*

پاسخ *هر دفعه که جیب سمت چپ انتخاب می‌شود، می‌گوییم یک موفقیت رخ داده است. وقتی ریاضیدان پی می‌برد که قوطی چپ خالی است، قوطی سمت راست حاوی k کبریت است اگر و تنها اگر $(N+1)$ امین موفقیت در $(N-k)+(N+1) = (2N-k+1))$ امین تلاش رخ بدهد. احتمال این پیشآمد به صورت زیر است:*

$$\binom{(2N-k+1)-1}{(N+1)-1}(\frac{1}{2})^{N+1}(\frac{1}{2})^{(2N-k+1)-(N+1)} = \binom{2N-k}{N}(\frac{1}{2})^{(2N-k+1)}$$

از آنجایی که با احتمال یکسان قوطی جیب راست یا چپ می‌تواند خالی باشد، پس احتمال دو برابر احتمال محاسبه شده در بالا است. پس احتمال خواسته شده به صورت زیر خواهد بود:

$$2\binom{2N-k}{N}(\frac{1}{2})^{(2N-k+1)} = \binom{2N-k}{N}(\frac{1}{2})^{2N-k}$$

[۳] NEGATIVE BINOMINAL RANDOM VARIABLE

مثال ۲ (مساله تانک) تانک‌های سپاه یک کشور از ۱ تا N شماره گذاری شده‌اند. در یک جنگ، این کشور n عدد از تانک‌های خود را از دست می‌دهد و به دست دشمن می‌افتد. دشمن در می‌یابد که تانک‌های تصاحب شده شماره گذاری شده‌اند. دشمن چگونه می‌تواند تخمینی برای تعدلد کلّ تانک‌های این کشور، N، به دست آورد؟

پاسخ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ شماره تانک‌های تصاحب شده باشند که به طور کاملا تصادفی از بین N تانک انتخاب شده‌اند. متغیر تصادفی $Y = \max(X_i)$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$k = n, n+1, n+2, ..., N$$

بیش‌ترین شماره تانک تصاحب شده را می‌توان به عنوان تخمینی از $\mathrm{E}[Y]$ در نظر گرفت. داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \sum_{k=n}^{N} k \Pr\{Y = k\} \\ &= \sum_{k=n}^{N} k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \frac{k!}{(n-1)!(k-n)!} \\ &= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} \end{aligned}$$

برای محاسبه $\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n}$ باید توجه کنیم که $\binom{k}{n}$ ضریب x^n در چند جمله‌ای $(1+x)^k$ است. درنتیجه $\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n}$ ضریب x^n در چند جمله‌ای $\sum_{k=n}^{N}(1+x)^k$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{N}(1+x)^k &= (1+x)^n \sum_{k=0}^{N-n}(1+x)^k \\ &= (1+x)^n \frac{(1+x)^{N-n+1}-1}{(1+x)-1} \\ &= \frac{1}{x}[(1+x)^{N+1} - (1+x)^n] \end{aligned}$$

ضریب x^n در چند جمله‌ای $\frac{1}{x}[(1+x)^{N+1}-(1+x)^n]$، همان ضریب x^{n+1}است در چندجمله‌ای $(1+x)^{N+1}$ که برابر است با $\binom{N+1}{n+1}$. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \frac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n\frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\ &= \frac{n(N+1)}{n+1} \end{aligned}$$

برای تخمین زدن کلّ تانک‌های این کشور معادله $\mathrm{E}[Y] = \frac{n(N+1)}{n+1}$ را برای N حل می‌کنیم که مقدار $N = \frac{(n+1)}{n}\mathrm{E}[Y] - 1$ به دست می‌آید.
برای مثال اگر دشمن ۱۲ تانک تصاحب کند و بیشترین شماره تانک گرفته شده ۱۱۷ باشد، با استفاده از رابطه به دست آمده $N \approx (\frac{13}{12}) \times 117 - 1 \approx 126$ می‌شود.

مثال ۳ (مساله نمونه‌خوان) دو نمونه‌خوان[۴] به نام‌های مریم و رضا یک کتاب را هر کدام به صورت مستقل می‌خوانند و به ترتیب m و r اشتباه پیدا می‌کنند. فرض کنید احتمال اینکه رضا متوجه یک اشتباه شود، p و

[۴] proofreader

احتمال اینکه مریم متوجه شود، q باشد. پیشامدهای مربوطه را در نظر بگیرید. اگر اشتباهاتی که به صورت مشترک متوجه آن شده باشند برابر b باشد، تعداد اشتباهات پیدا نشده توسط این دو نفر را تخمین بزنید.

پاسخ فرض کنید تعداد کلّ اشتباهات موجود در کتاب M باشد.آنگاه متوسط تعداد اشتباهاتی که توسط رضا، مریم، و هر دو آنها تشخیص داده می‌شود، به ترتیب Mp و Mq و Mpq هستند.با فرض اینکه تعداد اشتباهات پیدا شده تقریبا با متوسط شان برابری می‌کند، یعنی $Mp \approx r$ و $Mq \approx m$ و $Mpq \approx b$. خواهیم داشت:

$$M = \frac{(Mp)(Mq)}{Mpq} \approx \frac{rm}{b}$$

پس تعداد خطاهای تشخیص داده نشده به صورت زیر خواهد بود:

$$M - (r + m - b) = \frac{(r-b)(m-b)}{b}$$

مثال ۴ فرض‌کنید ۱۰ لامپ موجود است که احتمال خراب‌بودن هر لامپ ۰.۱ است. احتمال اینکه تعداد لامپ‌های خراب حداکثر ۱۰ تا باشد چقدر است؟

پاسخ فرض کنید متغیر تصادفی X بیانگر تعداد لامپ‌های خراب باشد. با توجه به‌صورت سوال باید از توزیع دوجمله‌ای استفاده کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\Pr\{X \leq ۱\} &= \Pr\{X = ۰\} + \Pr\{X = ۱\} \\ &= \binom{۱۰}{۰}(۰/۱)^{۰}(۰/۹)^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}(۰/۱)^{۱}(۰/۹)^{۹} \simeq ۰/۷۳۶\end{aligned}$$

۴ چند نکته

۱.۴ متغیر تصادفی بی‌حافظه

نکته ۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p ، $۰ < p < ۱$ باشد. در اینصورت برای تمام اعداد صحیح و مثبت m, n داریم:

$$\Pr\{X > n + m | X > m\} = \frac{\Pr\{X > n + m\}}{\Pr\{X > m\}} = \frac{(۱-p)^{n+m}}{(۱-p)^{m}} = (۱-p)^{n} = \Pr\{X > n\}$$

هر توزیع گسسته با این ویژگی بی‌حافظه [۵] نامیده می‌شود. توزیع‌هندسی تنها توزیع گسسته‌ای است که بی‌حافظه است.

[5] memory-less

۲.۴ تابع جرم احتمال و متوسط شرطی

اگر X یک متغیر تصادفی روی فضای نمونه‌ای Ω با تابع جرم احتمال $p_X(\cdot)$ و A یک پیشامد ممکن روی همین فضای نمونه‌ای باشد، می‌توانیم تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را که مشروط به پیشامد A است، این‌گونه تعریف کنیم:

$$p_{X|A}(x) = \Pr\{X = x|A\} = \frac{\Pr\{X = x\}}{\Pr\{A\}}$$

متوسط متغیر تصادفی X را که به پیشامد A مشروط شده است را می‌توان با استفاده از تابع احتمال شرطی‌شده، مانند سابق تعریف‌کرد.

$$\mathrm{E}[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x|A)$$

در نکته‌ی زیر کاربرد جالبی از متوسط شرطی که شبیه قانون احتمال کل است بیان شده است که در برخی موارد محاسبه‌ی متوسط را ساده‌تر می‌کند.

نکته ۳ (قانون متوسط کل) *اگر X یک متغیر تصادفی باشد و پیشامدهای $A_۱, A_۲, \cdots$ فضای نمونه‌ای آن را افراز کنند، آنگاه می‌توان متوسط متغیر تصادفی X را از رابطه‌ی زیر بدست آورد:*

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i \Pr\{A_i\}\mathrm{E}[X|A_i]$$

مثال ۵ *فرض‌کنید تعداد افرادی که در طی یک روز از جلوی موزه‌ای می‌گذرند دارای توزیع پواسون با نرخ λ باشد. اگر هریک از این افراد با احتمال p وارد موزه شوند، در اینصورت امید ریاضی تعداد افرادی که در طی یک روز وارد موزه می‌شوند چقدر است؟*

پاسخ *فرض کنید متغیرهای تصادفی N و M بیانگر تعداد افرادی باشد که به ترتیب از جلوی موزه می‌گذرند و وارد موزه می‌شوند. تحت پیشامد $N = n$، تعداد افرادی که وارد موزه می‌شوند، متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است. پس $\mathrm{E}[M|N = n] = np$. داریم:*

$$\mathrm{E}[M] = \sum_{n=۰}^{\infty} \mathrm{E}[M|N = n] \Pr\{N = n\} = \sum_{n=۰}^{\infty} np \Pr\{N = n\} = p \sum_{n=۰}^{\infty} n \Pr\{N = n\} = p\mathrm{E}[N] = p\lambda$$

مثال ۶ *آزمایش زیر را در نظر بگیرید. تاسی پرتاب می‌شود و اگر مقدار n ظاهر شود n تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. اگر X بیانگر متغیر تصادفی مجموع n تاس پرتاب شده باشد، امید ریاضی X چقدر است؟*

حال به بیان مثالی می‌پردازیم که در آن با استفاده از ایده شرطی‌سازی میانگین متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۷ *فرض کنید دو پیشامد مانند $A_۱$ و $A_۲$ داریم که فضای نمونه‌ای را به‌صورت زیر افراز می‌کنند.*

$$A_۱ = \{X > ۱\}$$

$$A_۲ = \{X \leq ۱\}$$

همچنین تابع جرم‌احتمال متغیر تصادفی X به‌شکل زیر است.

$$p_X(k) = (۱ - p)^{k-۱}p \ , k = ۱, ۲, ...$$

پس طبق نکته‌ی بالا می‌توان متوسط متغیر تصادفی X را بدست آورد. داریم:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X|X > ۱] \Pr\{X > ۱\} + \mathrm{E}[X|X \leq ۱] \Pr\{X \leq ۱\}$$

بیاد بیاورید که متغیر تصادفی هندسی بی‌حافظه است. بنابراین متغیر تصادفی X که مشروط بر پیشامد $\{X > ۱\}$ شده است، همان توزیع هندسی است که تابع جرم‌احتمال آن یک واحد به سمت راست انتقال یافته است؛ پس $\mathrm{E}[X|X > ۱] = \mathrm{E}[X + ۱]$. همچنین متغیر تصادفی X که مشروط بر پیشامد $\{X \leq ۱\}$ شده است، یک متغیر تصادفی ثابت است که مقدار یک را با احتمال یک می‌گیرد؛ پس $\mathrm{E}[X|X \leq ۱] = \mathrm{E}[۱] = ۱$. بنابراین:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X + ۱](۱ - p) + ۱ \times p$$

که از ساده‌کردن آن به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$\mathrm{E}[X] = (۱ - p)(\mathrm{E}[X] + ۱) + p$$

که از آن بدست‌می‌آید $\mathrm{E}[X] = \frac{۱}{p}$.

۳.۴ استقلال

مفهوم استقلال دو پیشامد در جلسات گذشته معرفی و بررسی شد. این مفهوم را می‌توان به متغیرهای تصادفی نیز تعمیم داد. بدین‌صورت که دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گوییم هرگاه به‌ازای هر بازه‌ی $I, J \subseteq R$، برای پیشامدهای $X \in I$ و $Y \in J$ داشته باشیم:

$$\Pr\{X \in I, Y \in J\} = \Pr\{X \in I\} \Pr\{Y \in J\}$$

۴.۴ توزیع همزمان دو متغیر تصادفی

مثال ۸ *آزمایشی را درنظر بگیرید که در آن تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم.متغیر تصادفی X را برآمد تاس اول و متغیر تصادفی Y را برآمد تاس دوم درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم که $\Pr\{X = Y\}$ چه‌مقداری دارد. توجه کنید که:*

$$\Pr\{X = k\} = \frac{۱}{۶}, \ k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

$$\Pr\{Y = k\} = \frac{۱}{۶}, \ k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

پس بنابراین داریم:

$$\Pr\{X = Y\} = \frac{۱}{۶}$$

حال اگر X را برآمد روی تاس و Y را برآمد زیر تاس باشد، باز هم توزیع احتمال متغیرهای تصادفی X و Y به صورت بالاست. اما در این حالت خواهیم داشت:

$$\Pr\{X = Y\} = 0$$

نکته ۴ *صرفاً با دانستن توزیع تک تک احتمال‌ها نمی‌توانیم راجع‌به مقدار $\Pr\{X = Y\}$ اظهار نظر کنیم.*