



جلسه‌ی ۱۹: ماشین پشته‌ای

نگارنده: جواد عابدی گزل آباد

مدرس: دکتر شهرام خزائی

## ۱ هدف

هدف از این جلسه آشنایی با مفهومی دیگر از ماشین حالات است که قابلیت‌های جدیدی را در اختیار ما قرار می‌دهد، بصورتی که می‌توان به کمک آن زبان‌های جدیدی را پذیرفت. شاید معروف‌ترین زبان با این خاصیت  $L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$  باشد که در جلسات قبلی ثابت کردیم به کمک ماشین حالات گفته شده نمی‌توان این زبان را پذیرفت. در ادامه نحوه ساخت این زبان را نیز بیان خواهیم کرد. به این ماشین حالت جدید، ماشین پشته‌ای<sup>۱</sup> گفته می‌شود.

## ۲ تعریف

**تعریف ۱** یک ماشین حالت پشته‌ای یک هفت‌تایی منظم به صورت  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  می‌باشد که:

- $Q$ : مجموعه‌ای متناهی از حالت‌ها است؛
- $\Sigma$ : مجموعه‌ای متناهی از نمادها است که الفبای ورودی نامیده می‌شود؛
- $\Gamma$ : مجموعه‌ای متناهی از نمادها است که الفبای پشته نامیده می‌شود؛
- $\delta$ : تابع انتقال حالت از  $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma$  به زیرمجموعه‌های متناهی از  $Q \times \Gamma^*$  است؛
- $q_0$ : حالت شروع است؛
- $Z_0$ : مقدار اولیه‌ی پشته است؛
- $F$ : مجموعه حالت‌های نهایی است که  $F \subseteq Q$ .

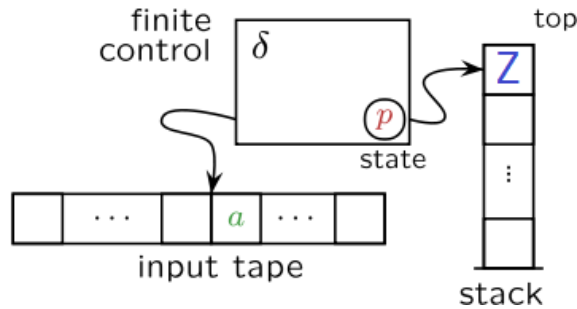
در صورتیکه  $\delta(q, a, Z)$  که  $a \in \Sigma$  یا  $a = \epsilon$  و  $Z \in \Gamma$ ، شامل  $(p, \alpha)$  باشد که  $p \in Q$  و  $\alpha \in \Gamma^*$ ، ماشین حرف  $a$  را از رشته ورودی حذف می‌کند، حالت  $p$  را به حالت  $q$  تغییر می‌دهد و  $Z$  را از بالای پشته حذف کرده و با  $\alpha$  جایگزین می‌کند. به زبان ساده‌تر، در این ماشین‌ها علاوه بر امکانات قبلی، یک پشته در اختیار ما قرار گرفته است که می‌توانیم حروفی را بر بالای پشته اضافه کرده<sup>۲</sup> و یا حرفی را از بالای آن خارج کنیم<sup>۳</sup>. در هر مرحله از خواندن یک رشته نیز، هم حالت ماشین و هم بالایی‌ترین نماد پشته در انتخاب مسیر بعدی نقش دارند.

<sup>۱</sup>Push Down Automata

<sup>۲</sup>Push

<sup>۳</sup>Pop

اگر  $\alpha = \epsilon$  مقدار  $Z$  از پشته خارج می‌شود.  
 اگر  $\alpha = Z$  محتویات پشته تغییر نمی‌کند.  
 اگر  $\alpha = X_1 \dots X_t$  مقدار  $Z$  با  $X_1 \dots X_t$  جایگزین می‌شود.



شکل ۱: شمای ماشین پشته‌ای

### ۳ چند مثال

برای آشنایی بیشتر با این مفهوم به حل دو مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ می‌خواهیم یک ماشین پشته‌ای طراحی کنیم که زبان زیر را بپذیرد:

$$L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

ماشین پشته‌ای ما دارای ۳ حالت و الفبای پشته‌ای آن دارای ۲ حرف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Q &= \{p, q, f\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ \Gamma &= \{Z_0, X\} \end{aligned}$$

سه حالت معرفی شده را بدینگونه تعبیر می‌کنیم:

$q$ : حالت آغازین<sup>۴</sup> که هنوز ۱ دیده نشده است.

$p$ : حالتی که حداقل یک ۱ دیده شده است.

$f$ : حالت پایانی<sup>۵</sup> که رشته پذیرفته می‌شود.

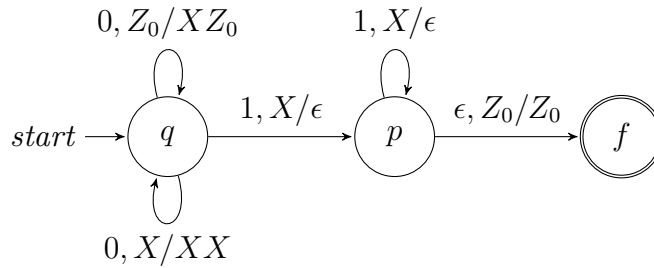
همچنین حرکاتی که برای تغییر بین حالات وجود دارند، بدین ترتیب هستند:

$$\begin{aligned} \delta(q, 0, Z_0) &= \{(q, XZ_0)\} \\ \delta(q, 0, X) &= \{(q, XX)\} \\ \delta(q, 1, X) &= \{(p, \epsilon)\} \\ \delta(p, \epsilon, Z_0) &= \{(f, Z_0)\} \end{aligned}$$

<sup>۴</sup>start state

<sup>۵</sup>final state

دو حرکت اول به ازای هر  $0$  در رشته حرف  $X$  را در پشته قرار می‌دهد. و در صورتیکه در رشته  $1$  وارد شود به حالت  $p$  می‌رویم و یک حرف  $X$  را از پشته خارج می‌کنیم. در صورتیکه پس از اتمام رشته، پشته خالی شود به حالت پایانی رفته و رشته پذیرفته خواهد شد. در نتیجه گراف انتقال حالت این ماشین بدین ترتیب خواهد بود:



نکته ۱ وقتی از گراف انتقال حالت استفاده می‌کنیم باید ذکر شود که مقدار اولیه پشته چیست، مگر اینکه روشن باشد (مثلاً نماد  $Z_0$ ) یا از قبل گفته شده باشد.

مثال ۲ همانند مثال قبل می‌خواهیم یک ماشین پشته‌ای طراحی کنیم که زبان زیر را بپذیرد:

$$\{\omega\omega^R : \omega \in \{0, 1\}^*\}$$

برای طراحی این ماشین از سه حالت استفاده می‌کنیم. در حالت اول به ازای خواندن هر حرف، نمادی معادل با آن در پشته ذخیره می‌شود و در حالت دوم به ازای هر حرف خوانده شده، نماد معادل با آن از پشته حذف شود و بالاخره حالت سوم نیز حالت نهایی است. در نتیجه در نهایت ماشین پشته‌ای ما دارای سه حالت و الفبای پشته‌ی آن نیز دارای سه حرف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ \Gamma &= \{Z_0, 0, 1\} \end{aligned}$$

سه حالت معرفی شده، بدین ترتیب تفسیر می‌گردند:

$q_0$ : حدس ما این است که در حال خواندن  $\omega$  هستیم.

$q_1$ : حدس ما این است که  $\omega$  خوانده شده است.

$q_2$ : حالت پایانی که رشته پذیرفته می‌شود.

همچنین حرکتی که برای جابجایی بین حالات وجود دارند، اینگونه ارائه می‌شوند که  $a \in \Sigma$  و  $X \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, aX)\} \\ \delta(q_0, \epsilon, X) &= \{(q_1, X)\} \\ \delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \epsilon)\} \\ \delta(q_1, \epsilon, Z_0) &= \{(q_2, Z_0)\} \end{aligned}$$

در نتیجه گراف انتقال حالت این ماشین نیز بدین ترتیب خواهد بود که  $a \in \Sigma$  و  $X \in \Gamma$  هستند:

