راهنمای معلم

ریاضیات ۱

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز:
پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی و حرفه‌ای و کاردانش

نام کتاب : راهنمای معلم ریاضیات ـ ۳۶۹/۱

مؤلفان : کورش رستگار ، محمدحسن رستگار ، بهروز رحیمی

اعضای کمیسیون تخصصی :

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ : ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتابهای درسی

صفحه‌آرا : خدیجه محمدی

طراح جلد :

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان دارو پخش
تلفن: ۴ ـ ۶۰۲۶۲۴۱، دورنگار: ۶۰۲۶۲۴۰، صندوق پستی: ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اوّل ۱۳۸۰

ISBN 964-05-1167-6 شابک ۶-۱۱۶۷-۰۵-۹۶۴

فهرست

بخش اوّل

بخش اوّل

راهنمای برنامه درسی ریاضیات

بخش دوّم

چرا ریاضیات؟

جهان در حال حاضر در بحبوحهٔ یک انقلاب عظیم فن‌آوری ـ اطلاعاتی ـ رسانه‌ای قرار دارد و با سرعتی غیرقابل پیش‌بینی در حال دگرگونی است. قرن آینده که با استیلای یکپارچگی جهان دست به گریبان است، با خود تنشهای دیرپایی را به همراه خواهد آورد که باید بر آنها غلبه کرد. بعضی از این تنشها ریشه در دوران کهن دارد و در گذشته نیز استمرار داشته است. مهم‌ترین این تنشها عبارتند از : خدامحوری در برابر انسان محوری، اخلاقیات و معنویات در برابر مادیات، جهانی‌شدن در مقابل محلی ماندن، همگانی شدن در برابر انفرادی ماندن، سنت‌گرایی در تقابل با نوگرایی، ملاحظات کوتاه مدت یا بلندمدت، رقابت و برابری فرصتها، توسعه نامحدود دانش و ظرفیت محدود بشر در جذب آن.

از منظری دیگر تأثیرات فن‌آوری جدید رسانه‌ای و ارتباطی بر تمدن بشری و از همه مهم‌تر سرعت شتابان و غیرمعمول تغییر و تحولات، چالشهای جدیدی را پیش خواهد آورد. به‌عنوان مثالی ساده و ملموس می‌توان یادآور شد که در اواخر دههٔ هشتاد میلادی، رایانه‌ها و ماشینهای حسابگر علمی یک وسیله مورد استفاده همگانی نبود و در آموزش تنها در تعداد اندکی از کشورها در بخشی از محیطهای آموزشی یک وسیله قابل دسترس بود. در صورتی که اکنون شبکه جهانی ارتباطی و اطلاع‌رسانی (اینترنت) اکثریت کشورها و مراکز علمی و آموزشی را به هم متصل کرده است و برای بخش بزرگی از کره مسکون یک وسیله همگانی شده است! و به سرعت در حال فراگیری سراسری است. اکثر صاحب‌نظران و متخصصان در اواخر دههٔ هشتاد میلادی وضعیت کنونی را پیش‌بینی نمی‌کردند! در سال ۲۰۱۰ وضعیت چگونه خواهد بود؟ و یا در سال ۱۴۰۰ شمسی که کشور ما درصدد برنامه‌ریزی برای آن است، وضعیت چگونه است؟

در این راستا، یادگیری در طول زندگی یکی از کلیدهای پیروزی در رویارویی با چالشهای قرن آینده است. همان‌گونه که اکنون یادگیری محدود به مدرسه نیست در آینده نیز به‌طور وسیع فراگیران از خارج از مدرسه و در خانه با دانش و اطلاعات مواجه خواهند شد. عدم برنامه‌ریزی و هدایت یادگیری در خارج از مدرسه می‌تواند خسارت بار و برنامه‌ریزی و هدایت یادگیری در خارج از مدرسه می‌تواند انفجار شکوفاییها باشد. بنابراین رسالت آموزش و پرورش سنگین‌تر از آن است که بتوان تصور کرد. آموزش و پرورش در رشد فردی و اجتماعی و شکوفایی همه تواناییهای انسان نقش اساسی ایفا می‌کند و به راستی اهمیت و ارزش «توانا بود هرکه دانا بود» و «تعلیم و تعلم عبادت است»، امروز آشکارتر شده است.

امروز به جوانانی که دارای سینه‌ای فراخ و بازوان ستبر باشند نیازی نیست، بلکه به جوانانی نیازمندیم که دارای تواناییهایی چون تفکر، استدلال، تحلیل و نقد، خلاقیت، تصمیم‌سازی و انتخاب‌گری، ساماندهی حجم عظیم داده‌های غنی، برخورد منطقی و درست با پدیده‌ها و تحولات، یادگیری مستمر و مستقل و برقراری ارتباط سازنده‌ای باشند که همگی از ویژگی‌های ضروری شهروند شایسته و فرزند زمان خویش بودن، است. به جوانانی نیازمندیم که گنجهای درونشان شکوفا شده، وارد عرصه عمل زندگی شوند. سرلوحه این نعمتهای الهی درون آدمی «یادگیری» است. باید تأکید کرد که «یادگیری» را نیز باید آموخت!

اکنون که آموزش و پرورش و تربیت «شهروند شایسته» یا «عبدصالح» یگانه راه شکوفایی تواناییها و پیامد طبیعی آن چیرگی بر چالشهاست، پرسش همیشگی «جامعه آرمانی» یا «مدینه فاضله» مطرح می‌شود که برنامه آموزشی مطلوب چیست؟ چه دانشهایی اساسی‌اند و باید محور برنامه آموزشی مطلوب باشند؟ به بیانی دیگر چه دانشهایی موجب شکوفایی تواناییهای انسان می‌شود و چه دانشهایی موجب تزکیه روح، که همانا مقدمه شکوفایی تواناییها است، و حرکت از ظلمت به نور و رسیدن به کمال مطلوب می‌شود؟ برای نزدیک شدن به پاسخ این پرسش، تاریخ تمدن بشری را ورق می‌زنیم.

در دوران باستان یعنی قبل از تمدن یونانی نشانه‌های تاریخی از وجود تمدنهایی در نقاط دیگر کره زمین از جمله چین، هند، مصر، بین‌النهرین وجود دارد. در بعضی موارد شواهد قابل توجه به‌دست آمده است. در همه تمدنها نشانه‌هایی از اعداد و حساب وجود دارد. مفهوم عدد و فرآیند شمارش به قدیمی‌ترین اعصار، وقتی که دست کم به مفهوم بیشی و کمی نیاز داشته است باز می‌گردد و با تکامل تدریجی زندگی انسان و آغاز زندگی جمعی به شمارشهای ساده نیاز بوده است.

در یکی از اسناد قدیمی تاریخ یعنی «پاپیروس رایند» (۱۶۰۰ قبل از میلاد مسیح) که مربوط به تمدن اطراف رود نیل در مصر می‌باشد، آمده است:

«به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخصه شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجه تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلی این قدرت و توانایی به بهترین وجهی می‌تواند در مهارتهای ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

بنابراین اگر یکی از عجایب هفت‌گانه عالم اهرام ثلاثه است که با دانش و فن آوری امروز بشر نیز اسرارآمیز می‌نماید و هنوز کشف ناشدهٔ بسیار دارد، هیچ جای تعجب نیست؛ زیرا که چنان اظهارات حکیمانه از دانش غنی و پیشرفته ریاضی و فضای فکری حاکم در آن دوران خبر می‌دهد.

تمدن بین‌النهرین را مورد بررسی قرار دهیم. علم مساحی زمین ــ هندسه ــ که از ضروریتهای زندگی کشاورزی اطراف دجله و فرات بوده است، دستگاه شمار شصت‌گانی، محاسبات پیشرفته بازرگانی، سود، مرابحه، صورت‌حسابها، رسید سفته، قباله و ضمانت مربوط به شرکتهای بازرگانی، دستگاههای اوزان و مقادیر، معادلات درجه دوم و سوم و چهارم، بناها و کاخها از جمله یکی از عجائب هفت‌گانه یعنی «حدائق معلقه» همگی حکایت از به‌کارگیری ریاضیات عمیق بوده است.

به تمدن یونان باستان می‌رویم که از آن آثار بسیار به‌جای مانده است. در این دوران که از ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح شروع می‌شود، حکمت و فلسفه و در قلب آن ریاضیات و منطق به تحول و شکوفایی غیرقابل تصور می‌رسند. از طرف دیگر زندگی اجتماعی در ابعاد دیگر پیشرفت شگرفی می‌کند. در این تمدن عقلانیت، اخلاقیات و معنویات در همه زوایای زندگی اجتماعی رسوخ کرده و خود بیش از پیش مورد توجه قرار می‌گیرد. بزرگانی چون تالس، فیثاغورس، سقراط حکیم، افلاطون، ارسطو و اقلیدس تربیت می‌شوند و بر علم و جامعه تأثیر فراوان می‌گذارند.

در این دوران منطق متولد شد و رسمیت یافت. علم هندسه به اوج رسید و تأثیر ریاضیات بر هنر به آنجا رسید که معبد پارتنون که در همه اجزای معماری آن نسبت طلایی رعایت شده است در آتن ساخته شد. امنیت و آرامش، پیشرفت زندگی اجتماعی و پیدایش و استقرار دولت شهرها از ویژگیهای آن دوران است. از همه اسرارآمیزتر که هنوز مکشوف نشده، این است که ریاضیات به دستگاه و نظامی قیاسی تبدیل شد، طوری که استدلالها و براهین ریاضی چنان استحکامی یافتند که قطعیت آنها جاودانه شد و ریاضی به شیوه اصل موضوعی سازمان و نظام دوباره یافت. در این دوران ریاضیات از منظر دیگری به جز تأثیر آن بر زندگی مادی، بر تمدن بشر تأثیر گذارد که ضروری است عنایتی به آن داشته باشیم.

مکتب افلاطون بر پایه اخلاق استوار گشت و در آن **سعادت** نوع بشر در مرتبه نخستین، رسیدن به **کمال مطلوب** (مُثُل، ایده) و تماشای آن در جایگاه رفیعش و در مرتبه دوم وارد کردن «کمال مطلوب» به جهان مادی (کوْن و فساد) تا در پرتو آن دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم روز به روز زیباتر، کامل‌تر و هماهنگ‌تر گردد. از نظر این مکتب تنها تربیت درست است که می‌تواند راه رسیدن به سعادت را هموار کند و البته تربیت در دامن جامعه. بر این اساس جامعه آرمانی شکل می‌گیرد.

برنامه آموزشی افلاطون برای تربیت سپاهیان، زمامداران و شهروندان شایسته (تحقق جامعه آرمانی) بر پایه چهار دانش اساسی حساب، هندسه، نجوم و منطق است! که در کتاب هفتم از مجموعه «جمهوری افلاطون» تبیین شده است. استدلال افلاطون برای انتخاب دانشهای اساسی از استحکام

و استواری کم‌نظیری برخوردار است که تاکنون نیز ادامه دارد. طبق نظر افلاطون تربیت بر پایه این دانشها اساس حرکت از ظلمت به‌سوی نور است و در سایه این تربیت است که «کمال مطلوب» و جامعه آرمانی محقق می‌گردد و بشر به سعادت واقعی می‌رسد.

دوران طلایی تمدن اسلامی همزمان با شکوفایی ریاضیات است. کتب علمی ریاضیات یونان باستان و مکتب اسکندریه به زبان عربی ــ زبان علمی آن دوران ــ برگردان شد و ریاضیدانان و حکیمانی چون خوارزمی، بیرونی، خیام، جمشید کاشانی که همگی در ریاضیات سرآمد شدند، پرورش یافتند و بر تمدن اسلامی تأثیر فراوان گذاشتند. ایده‌های ریاضی ریاضیدانان دوران اسلامی که همگی ایرانی بودند چنان ناب و اصیل بود که رنسانس علمی در اروپا سراسر مدیون آن است و امروز بعضی از آن ایده‌های ناب در ریاضیات دبیرستانی حضور دارد و برخی دیگر در سطوح پیشرفته تعمیم یافتند. در تمدن اسلامی فیلسوفان بزرگی چون فارابی، ابن‌رشد، بوعلی‌سینا، خواجه‌نصیرالدین طوسی پرورش یافتند و فلسفه و حکمت شکوفا شد. این بزرگان همگی دست توانایی در ریاضیات داشتند. آثار معماری و شهرسازی و مدنیت چنان از علوم ریاضی بخصوص از هندسه استفاده کرده است که هنوز موجب حیرت همگان است طوری که تنها از منظر هنر، هنرمند بزرگی چون اِشر خود اظهار می‌دارد که نقشهای هندسی مسجدالحمراء در اسپانیا سبب اصلی پیدایش مکتب هنری او شده است. در دوران تمدن اسلامی مفاهیم ریاضی و هندسی با اعتقادات دینی همگام و همراه شد و از نوعی قداست برخوردار شد. تدریس ریاضیات، هندسه، مثلثات و منطق سنت حوزه‌های علمیه گشت که هم‌اکنون نیز ادامه دارد.

آغاز رنسانس و شروع تمدن اروپایی متأثر از انتقال دانش اسلامی از مسیر اسپانیا و اندلس شروع شد و دانشمندان بزرگی چون دکارت و گالیله با متحمل شدن مرارتهای زیاد آغازگر رنسانس علمی بودند. اگرچه دکارت و گالیله در حکمت و فلسفه و علوم تجربی صاحب نام هستند ولی از منظر ریاضیات سرآمد بودند. دکارت روش تحقیق علمی را تنها براساس روش ریاضی، و ریاضیات را بنای اصلی علم می‌دانست. گالیله نیز اعتقاد شگفت‌انگیزی نسبت به ریاضیات دارد و شناخت هستی را تنها با ریاضیات ممکن می‌داند، گالیله می‌گوید :

«این کتاب عظیم هستی برای همیشه در پیش چشمان ما گشوده است و زبانی دارد، اما بدون دانستن آن، فهم حتی یک واژه هستی غیرممکن می‌نماید. آن زبان «ریاضیات» است!»

سلسله ریاضیدانان این دوران بیش از آن است که در این مجال بگنجد. فقط یادآور می‌شویم که گاوس و نیوتن دو تن از سه ریاضیدان بزرگ تاریخ متعلق به این دوران هستند و گاوس سرآمد همه ریاضیدانان طول تاریخ می‌گوید : «ریاضیات ملکه علوم است.»

نقش ریاضی در پیدایش تمدن صنعتی در سده‌های اخیر برای همگان اظهر من الشمس است و سرعت افزایش و وسعت ریاضی چنان است که در ربع قرن پایانی قرن بیستم برابر تمام طول تاریخ رشد کرده است و هیچ علم بشری نیست که مستقیماً یا غیرمستقیم به مفاهیم و ایده‌های ریاضی نیاز نداشته باشد. امروز تحقیق در اکثر علوم از روان‌شناسی، زبان‌شناسی گرفته تا علوم پایه و علم سیاست همگی نیاز به نتایج ریاضی دارند، این بررسیها نشان می‌دهد که تمدن بشری و ریاضیات رابطه تنگاتنگی با یکدیگر دارند و یکی از نظریه‌های جدید جامعه‌شناسی مبتنی بر این است که ریاضیات تمدن‌ساز است.

در پایان این گفتار از منظر تفکر، اشاراتی به نقش ریاضی می‌کنیم. در ابتدای آموزش مدرسه‌ای، کودکان با مسائل متعددی روبرو می شوند که عملیاتی نظیر «دویست کارگر × سه هزار تومان» را در متن خود دارد. آیا در واقعیت می‌توان ۲۰۰ کارگر را در ۳۰۰۰ تومان ضرب کرد؟ این ضرب چه معنی دارد؟ وقتی ذهن این مسئله را حل می کند چه عملی انجام می‌دهد؟ آیا جز این است که ذهن یک مدل ریاضی از این واقعیت می‌سازد (۳۰۰۰×۲۰۰) و در فضایی ریاضی و صوری عمل ضرب را انجام می‌دهد؟

عبارات عددی و نمادین ریاضی طبیعی‌ترین «فکرورزیهایی» است که تفکر (انتزاعی) به آن نیاز دارد. عبارات عددی و نمادین ریاضی، انتزاعی‌ترین ایدههایی هستند که ذهن آدمی توانایی شکل‌گیری آن را دارد. اما این خمیرمایه‌های تفکر انتزاعی با سرشت آدمی هماهنگ است. اگر معلم تاریخ به کلاس ابتدایی برود و به دانش‌آموزان بگوید «جنگ جهانی دوم ده سال طول کشید» همه باور می‌کنند، اما اگر پای تخته بنویسید «دو چهارتا می‌شود ده‌تا» در کلاس بحث شروع می‌شود. چرا چنین است؟ چرا ذهن کودک در مورد درستی ایده‌های اولیه ریاضی قدرت تشخیص «درستی» را دارد ولی در علوم غیر ریاضی تسلیم است؟

ما این نظریه را اعلام می‌کنیم که «ریاضی جریان طبیعی تفکر بشر است». در پایان این گفتار اشاره می‌کنیم که قصد بررسی و استدلال در مورد پرسش «چرا ریاضیات؟» نداشتیم بلکه سرخطهایی نمونه برای اندیشیدن در مورد این پرسش را اشاره کردیم و سخن را با این پرسش به پایان می‌بریم که: اگر اعداد و ایده‌های ریاضی نبود وضعیت علوم دیگر چگونه بود و زندگی چگونه جریان داشت؟ برای تسهیل اندیشیدن بهتر است ابتدا فرض کنید خودتان می‌خواهید بدون به‌کارگیری هیچ ایده‌ای از ریاضی زندگی کنید. آیا زندگی ممکن است؟

مبانی فلسفی دربارهٔ «چیستی» ریاضیات و نقش آنها در آموزش

هرگاه کار روزانه‌مان ریاضیات باشد، به نظرمان طبیعی‌ترین کار در دنیا است. اما اگر لختی از کار بازایستیم و در ماهیت و معنای کاری که می‌کنیم بیندیشیم، خواهیم دید که ریاضیات یکی از اسرارآمیزترین کارهاست.

چگونه می‌توان درباره چیزهایی که هرگز کسی آنها را به چشم ندیده سخن گفت و خواص و روابط آنها را حتی از اشیای مادی دوروبر خودمان هم بهتر فهمید؟

چرا هندسه اقلیدسی هنوز صادق است ولی فیزیک ارسطویی متروک شده است؟ در ریاضیات آن چیست که می‌شناسیمش و چگونه آن را می‌شناسیم؟

«دیویس وهرش ــ تجربهٔ ریاضی»

آموزش ریاضی با دو دانش سروکار دارد، یکی دانش ریاضیات است و دیگری دانش مربوط به یادگیری انسان. اگرچه آموزش ریاضیات با آموزش علوم دیگر مشابهتهایی دارد ولی یقیناً تفاوتهایی دارد. باید سرشت و ویژگیهای فراگیر را بشناسیم و چگونگی حصول شناخت در او را نیز بدانیم. از طرف دیگر باید بدانیم که کسب دانش ریاضی و درک مفاهیم ریاضی چه ویژگیهایی دارد. بنابراین داشتن شناخت درستی از ماهیت ریاضی یکی از محورهای اساسی آموزش ریاضی است. به عبارت دیگر باید بدانیم که :

ــ چه چیزی ریاضی را از درسهای دیگر جدا می‌کند؟

ــ آیا یک دانش کشف شدنی است یا ابداع شدنی و یا ساختنی؟

ــ استنتاجی است یا استقرایی؟

ــ شهودی است یا منطقی؟

ــ مطلق است یا نسبی ؟

ــ فوق انسانی است یا فعالیتی بشری است؟

ــ خطاپذیر است یا اصلاح‌پذیر یا چیزی دیگر؟

ــ دگرگونی‌پذیر است یا غیر آن؟

ــ کاربردپذیر است یا نه؟

ــ آیا ارزش زیبایی شناختی دارد؟

ـ زیبایی ریاضی در چیست؟

ـ ریاضی دربارهٔ چیست؟

در همهٔ این زمینه‌ها برداشتهای نادرست و ابهامات ذهنی فراوان وجود دارد و شفاف کردن این‌گونه پرسشها نقش مهمی در یاددهی ـ یادگیری ریاضی دارد. اکنون با رویکردی تاریخی به بررسی «ماهیت ریاضی» می‌پردازیم. در این بررسی قصد آن نداریم که فلسفه‌های گوناگون ریاضی را تأیید یا رد کنیم و یا از زوایای مختلف در تقابل قرار دهیم، بلکه تنها می خواهیم از منظر تأثیر دیدگاهها در آموزش و کلاس درس مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین از میان تقسیم بندیهای گوناگون آن را که مناسب کار ماست برمی‌گزینیم. پیش این کار دو دیدگاه در مورد ماهیت ریاضی را از نظر می‌گذرانیم.

۱ـ ریاضیات دارای دو بخش «جلوی صحنه» و «پشت صحنه» است. همانند رستورانی که سالن پذیرایی آن به اتفاق همه امکانات و افراد آن بخش جلوی صحنه را تشکیل می‌دهند و انبارهای مواد اولیه، محل طبخ انواع غذاها، تهیه سالادها و نوشیدنیها و آماده کردن جهت پذیرایی و افراد آن بخش پشت صحنه را تشکیل می‌دهند و یا مثال مناسب دیگر تئاتر است. جلوی صحنه شامل مکانی است که هنرمندان نمایش را اجرا می‌کنند به انضمام خود هنرمندان در لباسها و گریمهای نمایش. پشت صحنه محل آماده شدن هنرمندان از جهت لباس، گریم شدن، شنیدن دستورات کارگردان و طراحی صحنه و همه فعالیتهای قبل از روی صحنه آمدن نمایش است. نهادها و رسوم دیگر ما نیز دارای چنین تقسیم‌بندی هستند.

جلوی صحنه و پشت صحنه ریاضی شبیه موقعیتهای فیزیکی سالن غذاخوری و آشپزخانه نیست. بلکه دارای سیمای عمومی و همگانی و سیمای مستور و محرمانه می‌باشند. جلوی صحنه برای بیرونیها باز است و پشت صحنه منحصر و محدود به «درونیها» می‌باشد. جلوی صحنه ریاضیات در شکل سخنرانیهای تکمیل شده و پایان یافته، کتابهای درسی و مجلات علمی است. پشت صحنه ریاضیات بقیه کارهای ریاضیدانها، گفت‌و گو در محل کار یا میزهای صرف چای و غذا است. دانشجویان دوره‌های کارشناسی، تحصیلات تکمیلی و کاربران بخش همگانی ریاضیات است که جلوی صحنه را تشکیل می‌دهند و نظریه‌پردازان حوزه‌های گروههای متناهی، جبر خطی عددی، نظریه عملگرها، نظریه فرآیندهای تصادفی، آنالیز غیراستاندارد، آنالیز تابعی، آنالیز تصادفی و غیره پشت صحنه ریاضی را تشکیل می‌دهند.

جلوی صحنه ریاضیات رسمی و صوری، دقیق، صریح، مختصر، جامع، مرتب شده و مجرد و انتزاعی است، که به تعاریف، قضیه‌ها، یادداشتها تفکیک می‌شود. هر پرسشی یا جواب داده شده است یا یک «مسئله باز» نامیده می‌شود. در شروع هر فصل هدفی معین شده است و در پایان فصل آن هدف محقق شده است. پشت صحنه ریاضیات غیررسمی غیرصوری، تکه‌تکه و شکسته و ناقص،

شهودی، آزمایشی و تجربی است. ما این و آن را مورد سعی و تلاش قرار می‌دهیم، می‌گوئیم «شاید» یا «مشابه آن به‌نظر می‌رسد.»

پولیا در مقدمه کتاب «ریاضیات و استدلال محتمل» این تقسیم‌بندی در ریاضیات را به‌صورت زیر توصیف می‌کند:

«پایان ریاضیات ارائه شده در یک شکل تکمیل شده همانند شرح‌دهنده یا مدلل کننده خالص و محض، فقط شامل اثباتهاست. با این حال ریاضیات در حال ساخته شدن همانند دانشهای دیگر بشری ساخته می‌شود. شما باید یک قضیه ریاضی را حدس بزنید، قبل از آن که آن را اثبات کنید. باید ایده‌ای برای اثبات داشته باشید، قبل از این که آن را با جزئیات اجرا کنید. باید مشاهدات و تمثیلهای بعدی را ترکیب کنید، شما باید تلاش کنید و باز هم تلاش کنید.»

۲ــ موجودات ریاضی واقعی هستند. وجودشان کاملاً مستقل از شناخت ما از آنها و مستقل از ذهن ما، یک واقعیت عینی و خارجی است. این اشیا و موجودات متعلق به عالم ظاهر نیستند یعنی فیزیکی و مادی نیستند. آنها خارج از از فضا و زمان فیزیکی وجود دارند. ازلی هستند و جاودانه و لایتغیر. به این معنی که به‌وجود نمی‌آیند یا ساخته نمی‌شوند و دگرگونی نمی‌پذیرند و نابود نمی‌شوند. هر پرسش معناداری درباره یک موجود ریاضی پاسخی معین دارد، چه قادر به یافتن آن باشیم، چه نباشیم. مجموعه‌های نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی شما را، خمینه‌های بی‌نهایت بعدی، خمهای فضاپرکن و خلاصه همه موجودات ریاضی معین و با خواص معین هستند که بعضی از آنها را می‌شناسیم و برخی دیگر را نمی‌شناسیم. اشیاء ریاضی دارای معانی معنوی و روحانی هستند. آموزش آنها موجب تربیت درست و حرکت به‌سوی کمال مطلوب است. یادگیری آن موجب سفر از ظلمت به نور است و روح را تلطیف می‌کند. همه‌اش زیبایی واقعی است. چون هر چیز را هم به‌صورت واحد می‌بینیم و هم به‌صورت کثیر و بی‌نهایت، بنابراین ادراک ما همیشه واحد را با ضد آن (کثیر و بی‌نهایت) دریافت می‌کند و چون تنها ادراک حسی که فکر را بیدار می‌کند آنهایی هستند که با ضد خود درک می‌شوند (یعرف الاشیاء با ضدادها)، بنابراین اعداد همگی اینگونه‌اند. پس این دانش است که آدمی را به مشاهدهٔ جهان حقیقت رهنمون می‌سازد. قوانین جامعه باید آموختن حساب را واجب بشمارد. ریاضیات را نه تنها باید برای نیازهای روزانه آموخت، بلکه باید آن اندازه فراگرفت که بتوان با دیده روح، ذات و ماهیت اعداد را رؤیت کرد. در این صورت روح از دنیای کون و فساد برگردانده شده به جهان حقیقت معطوف می‌شود. این دانش تنها با تفکر و برهان عقلی دریافتنی است و دارای این خاصیت است که روح آدمی را مجبور می‌سازد برای دست‌یابی به حقیقت از تفکر انتزاعی یاری جوید و لذا حرکت به‌سوی عالم بالا و رسیدن به کمال محقق گردد.

این دو دیدگاه از چیستی ریاضیات گویای این حقیقت است که درک از ماهیت ریاضی چه دامنه گسترده‌ای دارد و به‌علاوه به مسائل زندگی اجتماعی مرتبط است. تأثیر آن بر یادگیری نیز آشکار است.

۱ــ اساس‌گرایی در ریاضیات (جریان اصلی)

عنوان «اساس‌گرایی» (Foundationism) به‌وسیله ایمره لاکاتوش ابداع شد. ریشه‌های اساس‌گرایی در ابتدا به گوتلب فرِگه و سپس به برتراندراسل (در مرحله کاملاً منطق‌گرا) و اِل ــ براوئر معلم شهودگرایی و دیوید هیلبرت اولین حامی صورت‌گرایی باز می‌گردد. لاکاتوش مشاهده کرد که با وجود گوناگونی دیدگاههایشان همگی گرفتار پنداری مبهم و شاید بیهوده شده‌اند. یعنی: «ریاضیات باید دارای اساس یا اساسهایی محکم و استوار باشد» تنها اختلاف آنها بر سر این است که چه چیزی پایه و اساس ریاضیات است.

اساس‌گرایی ریشه‌های کهن دارد. قبل از فرِگه، هیلبرت و براوئر جانشین اِمانوئل کانت شدند و قبل از کانت، لایپنیتز و اسپینوزا و دکارت ادامه این سلسله در حرکت روبه عقب قرار می‌گیرند. نهایتاً افلاطون و فیثاغورس که پدربزرگ اساس‌گرایی است، زندگی می‌کرده‌اند. ریشه‌های این تفکر با آئین و خداشناسی نیز مرتبط است. برای یافتن به دوران فیثاغورس، داستان را به دو سلسله موازی تفکیک می‌کنیم. سلسله اول دربارهٔ «جریان اصلی» (Mainstream) و دومین سلسله موازی مربوط به انسان‌گراها و نوگرایان مستقل (Humanists and Mavericks) است.

برای «جریان اصلی» ریاضیات فوق انسانی، انتزاعی، ایده‌آل، خطاناپذیر، ازلی، فناناپذیر و جاودانه و کشف شدنی است. بزرگان این سلسله عبارتند از: فیثاغورس، افلاطون، دکارت، اسپینوزا، لایپنیتز، کانت (عضویت کانت در این گروه جزئی است). فرگه، راسل، کارناپ انسان‌گرایانی هستند که ریاضیات را یک فعالیت بشری می‌بینند، یک آفرینش و خلق بشری. با این تفسیر ارسطو سر سلسله انسان‌گرایان است. لاک، هیوم و میل از این دسته‌اند. فیلسوفان مدرن که خارج از سنت‌گرایی راسل قرار داشتند و ما آنها را نوگرایان مستقل (Mavericks) می‌نامیم که عبارتند از: پیزس، دِوی، سالِرز، ویتگنشتاین، پوپر، لاکاتوش، وُنگْ، تیماچکو و کیتخر. در این رده تعدادی از نویسندگان ارزشمند وجود دارند که فیلسوف نیستند، از جمله پیاژه روانشناس، لسْلی وایت انسان‌شناس، دیوید بلور جامعه‌شناس، میشل پولائیی شیمی‌دان، ماریو بُونگ فیزیکدان. آموزشگرانی چون پل ارنست، گیلاهانا، آنااسفرد و ریاضیدانانی همانند پوانکاره، آلفرد رینی، جورج پولیا، ریموند وایلدر، فیل دیویس و برین روتمن در همین راستا هستند.

نام فیثاغورس، امروزه برای نوجوانانی که مدرسه می‌روند آشناست و قضیه او درباره مثلث

قائم‌الزاویه ــ که شاید مهم‌ترین قضیه ریاضیات باشد ــ از ریاضیات دوران نوجوانی تا اعماق ریاضی تعمیم‌وار جریان دارد. با این حال نشانه‌های تاریخی مؤید این نظریه هستند که آگاهی از این قضیه به دوران دورتر از یونان باستان باز می‌گردد.

فیثاغورس بنیان‌گذار مکتبی در ریاضیات شد که پیش از آن نبود و اکنون نیز این اندیشه ادامه دارد. در مکتب فیثاغورس خداشناسی با ریاضیات پیوند می‌خورد و فلسفه اخلاقی و روحانی یونان را پدید می‌آورد.

بویر و ماززباخ می‌نویسند که : بسیاری از تمدنهای پیشین سیمای گوناگونی از اسرار و معناشناسی اعداد به‌وجود آورده‌اند، ولی فیثاغورسیان اعداد را در افراطی‌ترین شکل ستایش می‌کردند. آنها استدلال می‌کردند که واحد (عدد یک) مولد همه اعداد است و نشان‌دهندهٔ تعداد خرد و عقل است و نشانه یگانگی و وحدانیت عالم است. عدد دو اولین عدد مؤنث یا زوج است و تعداد اندیشه و عقیده را نشان می‌دهد. عدد سه اولین عدد درست مذکر است که تعداد هارمونی و همسازی را نشان می‌دهد که از وحدت و گوناگونی ترکیب شده است و به همین ترتیب همه عددها دارای معانی و رموزی هستند.

آر. تارناس (The Passion of the Western mind) می‌گوید : برای فیثاغورسیان الگوهای ریاضی که در جهان طبیعی سِرّی و پنهان هستند، قابل کشف کردن می‌باشند. به‌طوری که دارای معنای عمیق‌تری بوده و با ماورای سطح مادی واقعیت سروکار دارند. هویدا کردن موجودات ریاضی در طبیعت برای تزکیه روح است و روح پاک یزدانی را آشکار می‌کند. فیثاغورسیان کشف کرده بودند که هارمونیهای موسیقی، ریاضی هستند و به‌وسیله زنجیره‌ای از اندازه‌های معین شده با نسبتهای عددی، تولید می‌شوند و به‌عنوان الهام روحانی مورد توجه هستند. فهمیدن ریاضیات، یافتن کلیدی برای حکمت و معرفت آفرینش الهی بود. از راه هوشمندی و نظام اخلاقی، انسان می‌تواند به‌وجود و خواص اشیاء ریاضی دست یابد و سپس شروع به گشودن اسرار طبیعت و روان آدمی کند. فیثاغورسیان معتقدند که هر چیزی را می‌توان از اعداد قیاس گرفت و استنتاج کرد.

دیدگاه فیثاغورسیان به‌وسیله افلاطون ادامه یافت و وحدت بین خداشناسی و ریاضیات آشکارتر شد. افلاطون نظریه مُثُل را ایجاد کرد و ریاضیات را متعلق به عالم مُثُل شمرد. در ابتدای این بخش دو دیدگاه فلسفی در مورد ماهیت ریاضی بیان شد که دومی دیدگاه افلاطون و افلاطون‌گرایان است.

تا دوران رنسانس فلسفه ریاضی در رکود به‌سر برد و از این زمان به بعد با تحولات وسیع علمی، ریاضیات شکوفایی آغاز کرد و مکاتب فلسفی جدیدی همزمان با گسترش و پیشرفت ریاضیات مطرح گردید. مهم‌ترین این دیدگاههای فلسفی در مورد ماهیت ریاضی در سه دسته منطق‌گرایی، صورت‌گرایی و شهودگرایی قابل بررسی هستند. ریشه منطق گرایی به لایپنیتز باز می‌گردد. سرمنشأ

صورت‌گرایی و نقطه آغازین مکتب شهودگرایی به کانت می‌رسد.

منطق‌گرایی: فرگه، وایتهد و راسل از بنیان‌گذاران مکتب منطق‌گرایی در ریاضیات هستند، با این حال فرگه مستقل کار می‌کرد. در این فلسفه منطق به‌عنوان پایه و اساس ریاضیات قرار دارد و ریاضیات را چیزی جز گسترش منطق نمی‌دانند. در این رهیافت، کار بامنطق محض آغاز می‌شود و ریاضیات، بی‌آن که به هیچ اصلی از ریاضیات متعارف نیاز داشته باشد، نتیجه می‌شود. گسترش منطق شامل بیان پاره‌ای از اصول منطقی است که از آنها، قضایایی استنتاج می‌شود. این قضیه‌ها را می‌توان در استدلالهای بعدی به‌کار گرفت. اصول متعارف منطق و نتایجی که از آن حاصل می‌شود کاملاً اختیاری است و به علاوه کاملاً صوری هستند. منطق بی‌آن که هیچ محتوایی داشته باشد، تنها یک قالب صرف است. در نتیجه ریاضیات هم از هرگونه محتوای مادی تهی است و قالبی خشک و خالی است. تغییرات فیزیکی و مادی که از اعداد و مفاهیم هندسه داریم مربوط به ریاضی نیست.

برنامه منطق‌گرایی مبتنی است بر :

۱ــ اصول متعارف منطق به عنوان پایه و اساس

۲ــ نهادهای اولیه، گزاره‌ها و توابع گزاره‌ای

صورت‌گرایی: افکار فلسفی کانت مبنای صورت‌گرایی است. از نظر کانت نقش منطق در ریاضیات مانند نقش منطق در علوم دیگر است. اگرچه قضیه‌ها و نتایج ریاضی مبتنی بر اصول متعارف، به‌وسیله اصول منطق به‌دست می‌آیند ولی جدای از اصول منطق هستند و به‌طور کلی نمی‌توانند تجلّی خاصی از اصول منطق باشند. هیلبرت با الهام از تفکرات کانت و با توجه به ایرادهای (تناقضات) منطق‌گرایی، برنامه‌ای را در ساختمان و فلسفه ریاضی تدوین کرد که صورت‌گرایی نامیده می‌شود.

طبق نظر هیلبرت (در خلاف اصول منطق‌گرایی) چیزی که در استنتاجهای منطقی و احکام مرکب منطق مفروض است، قبل از آن در معلومات و فرضهای اولیه تفکر و تعقل در ذهن آدمی وجود دارد. یعنی ریاضیدان در ذهن خود، از پیش، اشیاء غیرمنطقی متعینی را ــ که از طریق حدس فلسفی برای او آشکار است ــ بدون واسطه کسب می‌کند. این اشیاء ریاضی هستند که تفکر ریاضی او را می‌سازند. یعنی برخلاف منطق‌گرایان که ریاضیات را مبتنی بر اصول مسلم منطق قابل ساخته شدن می‌دانند اصول‌گرایان اصول اولیه ساختمان ریاضی را در وجود اشیاء ضروری فرا منطقی بازمی‌شناسند. برنامه صورت‌گرایی مبتنی بر درک مفهوم اصلی است :

۱ــ ریاضیات شامل ترسیمی از اشیاء و ساختمانهای متعین است.

۲ــ پیوست عناصر آرمانی به یک قضیه ریاضی مستلزم اثبات سازگاری دستگاه ریاضی است.

بنابراین می‌توانیم تعریف صورت‌گرایی از ریاضیات را بیان کنیم :

«ریاضیات علم دستگاههای صوری است. یعنی برخلاف منطق‌گرایی، ریاضیات گام به گام به‌وسیله اثبات سازگاری دستگاههای صوری ساخته می شود و یک نظام کلی منطق غیرمرتبط با موضوع مُدرِک نیست، و همواره رابطه مُدرِک و مُدرَک در ساختمان ریاضی از جمله شرایط اولیه است.»

می‌توان دستگاههای صوری را به‌صورت زیر توصیف کرد:

یک دستگاه صوری شامل:

الف ــ یک زبان رسمی (گردایه‌ای ازنهادها به همراه قواعدی روشن که عبارتهای این زبان را تشکیل می‌دهند.)

ب ــ گردایه‌ای از احکام یا اصول

پ ــ یک دستگاه استنتاجی (گردایه‌ای از قواعد بدون ابهامی که به هنگام نتیجه‌گیری حکمی از حکمهای دیگر به‌کار می‌روند.)

در یک دستگاه صوری مفروض، قضیه‌ها آنهایی هستند که با گامهای متناهی از اصول نتیجه می‌شوند. مطالعه دستگاههای صوری همان مطالعه این احکام و قضیه‌ها می‌باشند. بنابراین ریاضیات شامل مشتی فرمول است و فقط و فقط از اصول، تعاریف و قضیه تشکیل شده است!

شهودگرایی: شهودگرایی فلسفی‌ترین و با اهمیت‌ترین مکتب مبانی ریاضیات است. نقش تعقل و حدس فلسفی ریاضیدان نقش اساسی است. شهودگرایی ریاضیات را یک کُنش فلسفی توسط موضوع مُدرِک می‌داند و نتایج این کُنش را کشف حقایق می‌شناسد، حقایقی که مستقل از اندیشه وجود دارند. شهودگرایان این امکان را نمی‌پذیرند که ساختمان ریاضی به‌وسیله یک «ماشین» بر مبنای ضوابط منطقی و صوری ایجاد می‌شود.

کانت از جمله فیلسوفانی بود که «شهود» در فلسفه او نقش مهمی دارد. به عقیدهٔ او هیچ گاه بزرگ‌ترین عدد مشخص وجود پیدا نمی‌کند، زیرا همیشه می‌توان عدد بعدی را شمرد. بنابراین اعداد اصلی نمی‌توانند وجود داشته باشند. به‌طور مشابه کانت معتقد بود در هندسه حداکثر طول نمی‌تواند وجود پیدا کند. زیرا با وجود این که یک خط را می‌توان از دو طرف امتداد داد، اما به‌طور نامتناهی نمی‌توان آن را امتداد داد. (چون این عمل محتاج داشتن وقت نامتناهی است که تحقق‌پذیر نیست) به این ترتیب کانت به جای پیروی از نظریه بی‌نهایت بالفعل، نظریه بیکران بالقوه یا کلیات نامعین را ابراز کرد.

در سلسله ریاضیدانان کرونکر نخستین کسی بود که به بیان اندیشه‌های شهودگرایی پرداخت. کرونکر شیوهٔ افراطی ریزسنجی و دقیق وایراشتراس را نمی‌پسندید و کارکانتور روی نظریه مجموعه‌ها و اعداد ترانسفینی (فرامتناهی) را ریاضیات نمی‌دانست و به نظر او نوعی جادوگری می‌آمد. کرونکر موجودیت اعداد طبیعی را از این‌رو که «شهوداً» قابل درک‌اند، می‌پذیرفت. معتقد بود تنها اعداد

طبیعی «آفریدهٔ خدا» هستند و بقیه ساخته ذهن بشرند. او به بسیاری از بخشهای ریاضیات ایراد می‌گرفت و معتقد بود که آنان روشهای ساختنی و یا معیارهایی که بتوان به‌وسیله آنها و با طی مراحل متناهی اشیای مورد بحث را معین کرد، ارائه نمی‌کنند. به‌طور صریح و تکامل یافته براوئر اولین کسی است که این فلسفه را تبیین کرد.

از نظر براوئر «شهود اساسی» عبارت است از حدوث رشته‌ای از قضایا در یک توالی زمانی و تفکر ریاضی فرایندی ساختنی است که دنیای ویژه خود را، مستقل از جهان تجربیات ما بنا می‌کند. طراحی آزادی است که تنها با لزوم پایه‌ریزی براساس «شهود اساسی» ریاضی مقید می‌شود. براوئر معتقد است : «تنها اساسی که برای ریاضیات امکان‌پذیر است، باید براین فرایند ساختنی، که با لزوم پیروی از پذیرش یا رد قوهٔ شهود مقید می‌شود، پی‌ریزی شده باشد.» مفاهیم ریاضی مقدم بر زبان، منطق و تجربه در ذهن انسانها جای گرفته‌اند. درستی و قابلیت پذیرش مفاهیم ریاضی نه با تجربه یا منطق، بلکه با شهود محک می‌خورد.

از دیدگاه شهودگرایان عالم شهود ریاضی در برابر عالم ادراک علّی قرار دارند. زبان که وسیله‌ای برای تفاهم عمومی است و نه به عالم ریاضی، به قلمرو ادراک علّی تعلق دارد. زبان به یاری اصوات و نمادها رونوشتهایی از افکار موجود در ذهن انسان را بازسازی می‌کند. اما اندیشه‌های بشری، هرگز به‌طور کامل قابل نمایش نیستند.

زبان ریاضی و زبان نهادین همین وضعیت را دارد. مفاهیم ریاضی مستقل از رونمای زبانی‌شان بوده و بسیار غنی‌تر از این رونما هستند. اصول شهودگرایی توسط براوئر به‌صورت دوکنش اصلی (بینش فلسفی) عنوان شده‌اند.

۱ـ اولین کنش یا بینش و کشف، به‌کلی ریاضیات را از زبان ریاضی و از زبان منطقی جدا می‌کند و در نتیجه ریاضیات یک کنش ذهنی و ماسوای زبان است و این کنش بر تصوری از امتداد زمان که توسط قوهٔ حافظه در ذهن باقی می‌ماند، مبتنی است.

۲ـ کنش دوم، حدسی اساسی از ریاضیات می‌باشد (ولو در بدو امر ریاضیدان از بیان آن قاصر است) که تصوری از چیستی کُل ریاضیات است. به دیگر کلام، شهودگرایی معتقد است که ریاضیات دارای ماهیتی است قائم، که در لحظات بینش فلسفی و یا آنات اشراق در ذهن متصور می‌شود و از این طریق یک موضوع مُدرَک محدود با ماهیتی قائم و نامتناهی مربوط می‌شود. بنابراین ریاضیات هم از محسوسات جداست و هم از روابط منطقی که مفاهیم و امکان بیان شدن مفاهیم را مرتبط می‌سازد.

شهودگرایی به فرآیند ساختنی تأکید اساسی دارد و معتقد است آنچه با ساخت و سازی متناهی به‌دست می‌آید ریاضیات معتبر است، از این‌رو ساختگرا نیز نامیده می‌شود.

۲ـ انسان‌گرایی و نوگرایان مستقل (جریان دوم)

ارسطو از اولین فلاسفه‌ای است که ریاضیات را فعالیتی بشری می‌داند. اگرچه ارسطو همانند افلاطون معتقد است که علم بر محسوسات (که جزئیات‌اند) تعلق نمی‌گیرد، بلکه فقط به کلیات معلوم که به‌وسیله عقل ادراک می‌شوند، تعلق می‌گیرد ولیکن اختلاف شاگرد و استاد از این‌جا شروع می‌شود که افلاطون کلیات معقول را موجود واقعی می‌داند و مستقل از ذهن و فیزیک و ماده و حس و تجربه، ازلی و ابدی، و بر این اساس نظریه عالم مُثُل را بیان می‌کند در صورتی که ارسطو جدایی کلیات از محسوسات را تنها در ذهن قائل است و نه در خارج. حس را مقدمه علم و افراد را موجود حقیقی می‌داند. او معتقد است که ذهن از اشیاء و محسوسات یک صورت مجرد ایجاد می‌کند و این صور مجرد ساخته ذهن بشرند و عالم واقع همان دنیای مادی است. طبق نظر ارسطو نکته اصلی این است که جهان تجربی ما جهان اشیاء منفرد و ملموسی است که بر یکدیگر کنش و واکنش دارند. در بررسی این اشیای جزئی از خصوصیاتی آگاه می‌شویم که برای بسیاری از افراد مشترکند. این خصوصیاتی از نظر ارسطو واقعی، عینی و فرداند. کشف حقیقت و ماهیت آنها که صورتش در ذهن مصور می‌شود از راه مشاهده و استقراء در احوالشان که منتهی به دریافت حد و رسم آنها می‌شود، میسر می‌گردد.

در باب بی‌نهایت، ارسطو بر خلاف فیثاغورسیان که معتقدند یک بی‌نهایت وجود دارد که نه تکثّر است و نه یک امتداد، این نظریه را تکذیب کرده و تمایزی بین دو نوع بی‌نهایت قائل می‌شود یکی نوعی که ویژگیش افزایش است و در نتیجه با توجه به روند جزء به جزء استهلاک در این بی‌نهایت راهی ندارد. دومی نوعی است که شاخصه‌اش تقسیم بوده و ابعادش با توجه به بی‌انتهایی تجزیه‌پذیر می‌باشد. عدد در معنای نخست بی‌نهایت است و امتداد (خط) به معنای دوم. زمان به هر دو معنی بی‌نهایت است. با این حال ارسطو به بی‌نهایت بالفعل معتقد نیست و به بی‌نهایت بالقوه معتقد است.

بخش‌پذیری نامعین امتداد، فرآیند تقسیم را برای نتایجی که به‌طور پیوسته و بدون مستهلک کردن آن به‌دست می‌آید، جایز می‌شمرد. در نتیجه اضافه کردن قسمتهایی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند نیز فرایندی پیوسته است که نمی‌تواند قدر اصلی را به تمامی مجدداً فراهم کند. در واقع ارسطو از طریق افناء، این تحلیل و نظریه را به‌وجود می‌آورد.

اگرچه تجربه گرایانی چون جان‌لاک، دیوید هیوم و جان‌استیورات میل در سلسله جریان انسان‌گرایی قرار دارند ولی با توجه به هدفمان بر روی دیدگاههای پوپر و لاکاتوش متمرکز شده و از پرداختن به نظریات آنها درمی‌گذریم.

در سال ۱۹۳۴ میلادی کارل پوپر فلسفه علم را با بیان افراطی زیر در مورد حصول علم متحول کرد. او اظهار کرد که: «تصدیق کردن و محق دانستن استدلال استقرایی نه ممکن است و نه

لازم! نظریه‌های علمی به‌طور استقرایی از حقایق به‌دست نمی‌آیند. آنها به‌عنوان فرضیه‌ها، تفکرات عمیق و حدسها ابداع می‌شوند و سپس موضوعی برای آزمایشهای تجربی می‌شوند که کارشناسان و متخصصین خبره برای رد آنها تلاش کنند. یک نظریه، علمی است هرگاه قابلیت آزمایش شدن و در معرض ابطال قرار گرفتن را داشته باشد و از آن به سلامت بیرون آمده باشد. شاید یک نظریه در برابر آزمایشها طول عمر بیشتری داشته باشد و در آزمایش تجربی تصدیق شود ولی هرگز نتوان آن را ثابت کرد. حتی اگر یک نظریه علمی به‌طور عینی درست باشد، هرگز نمی‌توان آن را قطعی و یقینی دانست. ایده‌های پوپر گاهی یک طرفه و ناقص به‌نظر می‌رسند ولی نقدگرایی او از استقراگرایان متعصب، یک دگرگونی اساسی در این که مردم درباره دانش علمی چگونه می‌اندیشند، ایجاد می‌کند.

از جریان انسان گرایان جدید پوپر از اهمیت خاصی برخوردار است. نظریه عالمهای سه‌گانه او تبیین جالبی در مورد فلسفه علم است و با توجه به قرارگاه ریاضی در یکی از این سه عالم می‌توان راجع به چیستی و ماهیت ریاضی دیدگاهی به‌دست آورد. طبق تقسیم‌بندی پوپر عالم اول همان جهان مادی است، جهان جرم و انرژی و خلاصه دنیای ابر و باد و مه و خورشید است. عالم دوم یا عالم آگاهی طی روند تکامل زیستی از جهان مادی (جهان اول) منتج می‌شود. اندیشه‌ها، عواطف و هشیاری واقعیتهای غیرمادی هستند. هرچند وجود اینها را نمی‌توان از وجود ارگانیسمهای زنده جدا انگاشت. با این حال سنخیت این پدیده‌ها با سنخیت پدیده‌هایی که موضوع علوم فیزیولوژی و تشریح واقع می‌شوند، فرق دارد؛ اینها را باید در سطح یادگیری تحلیل کرد.

در مرحله بعدی تکامل ــ که در امتداد روند تکاملی عالم اول و دوم قرار دارد ــ پدیده‌هایی چون آگاهی اجتماعی، سنتها، زبان، نظریه‌ها، نهادهای اجتماعی و خلاصه همه فرهنگ غیرمادی بشر به‌وجود می آید. وجود اینها را هم نمی‌توان از آگاهی فردی تک‌تک افراد جامعه جدا کرد، اما این پدیده‌ها ازسنخ آگاهیهای فردی نیستند. اینها را هم باید در سطح دیگری تحلیل کرد. این پدیده‌ها عالم سوم را تشکیل می‌دهند. ریاضیات البته در این عالم جای می‌گیرد.

با این که اساس‌گرایی ــ در تلاش برای تصدیق وجود پایه و اساسی بی‌شک و تردید برای ریاضیات ــ فلسفه ریاضیات را در قرن بیستم تحت سیطرهٔ خود داشت، ولی لاکاتوش در همین دوران به‌گونه‌ای افراطی یک بدیل متفاوت ارائه کرد. او مسیرهای جدیدی را در فلسفه علم رشد و پرورش داد. در علوم، پژوهش برای اساسها و پایه‌ها با مسئله کلاسیک منطق استقرایی سروکار دارد. دیدگاه لاکاتوش در مورد ماهیت ریاضیات در کتاب «اثباتها و ابطالها» تبیین شده است. در این کتاب که به گفته روبن هرش پر از ایده‌های اصیل و نو می‌باشد فلسفه «نیمه تجربی» (quasi - empirical) ریاضیات به‌وسیله لاکاتوش ابداع شد. از آن‌جا که او شاگرد پوپر و پولیا بوده است

می‌توان حدس زد که از دیدگاه تجربی پوپر و ایده‌های پولیا تأثیر گرفته است. یادآوری می‌کنیم که پوپر نیز کتابی در فلسفه علم به نام «حدسها و ابطالها» دارد که به فارسی نیز برگردان شده است.

لاکاتوش در مقدمه کتاب «اثباتها و ابطالها» حمله آتشینی به‌صورت‌گرایی می‌کند. از دید او صورت‌گرایی: تمایل و توجه به یکی کردن ریاضیات با تجرید صوری **اصل موضوعی ـ مدار** و یکسان گرفتن فلسفه ریاضی با ماورای ریاضیات دارد. صورت‌گرایی تاریخ ریاضی را از فلسفه ریاضی تفکیک می‌کند و آنها را نامرتبط می‌داند.

اثباتها و ابطالها تاریخ را به‌عنوان متن و زمینه‌ای برای پند و اندرز درنظر می‌گیرد و بیان می‌کند که ریاضیات همانند علوم طبیعی خطاپذیر است. ریاضیات به‌وسیله نقدگرایی و اصلاح نظریه‌ها رشد می‌کند. از یک مسئله یا حدس علمی شروع می‌شود و یک جست‌وجو برای اثبات یا مثال های نقض لازم دارد. اثبات، مثالهای نقض را توضیح می‌دهد، مثالهای نقض به اثبات نقب می‌زنند. اثبات، یک فرایند مکانیکی نیست که حامل یک زنجیر غیرقابل شکست از حقایقی که از فرض به نتیجه تشکیل می‌شوند باشد، توضیح دادن، تصدیق کردن و با جزئیات و مشروح بیان کردن آن چیزی است که یک حدس علمی مناسب را به‌وجود می‌آورد و مثالهای نقض آنها را دقیق و ریزشده می‌سازد. هرگام از اثبات موضوعی برای نقادی است که می‌تواند شک‌گرایی محض باشد و یا یک مثال نقص برای یک روش ویژه باشد.

لاکاتوش تجزیه و تحلیلی معرفت شناسانه از ریاضیات غیررسمی انجام می‌دهد، ریاضیاتی که در فرآیند رشد و کشف انجام می‌شود و ریاضی‌دانها و دانش‌آموزان ریاضی آن را می‌شناسند. ریاضیات صوری شده (رسمی شده) به‌سختی خارج از متنهای منطق نمادین و روی زمین! یافت می‌شود. به اعتقاد او ریاضیات غیررسمی، یک علم به مفهوم پوپر است. ریاضیات غیررسمی به وسیله نقادی موفقیت‌آمیز و تظریف نظریه‌ها و معرفی ایده‌های جدید و رقابت نظریه‌ها رشد می‌کند و نه به‌وسیله الگوهای استنتاجی مربوط به ریاضیات صوری (رسمی) شده.

همان‌گونه که اشاره رفت لاکاتوش منطق کشف ریاضیات را اثباتها و ابطالها می‌داند و ریاضیات غیررسمی و غیرصوری را محور قرار می‌دهد. آنچه معنا، مفهوم و ایده در ریاضیات وجود دارد متعلق به ریاضیات غیررسمی (غیر صوری) می‌داند طوری که دقت و قطعیت ریاضی را مربوط به رسمیت بخشیدن به ریاضیات غیررسمی (غیر صوری) قلمداد می‌کند و می‌گوید:

اگر می‌خواهید ریاضیاتتان با معنی باشد قطعیت را رها کنید، اگر طالب قطعیت هستید معنی را رها کنید. نمی‌توانید هردو را باهم داشته باشید.

اثباتها و ابطالها/ صفحه ۱۰۲

لاکاتوش حقیقت تجربه ریاضی را همان‌گونه که هست می‌پذیرد یعنی : خطاپذیر، اصلاح‌پذیر و با معنی.

روش لاکاتوش برای پرداختن به ماهیت و چیستی ریاضیات بررسی، تفکر و تعمق در تاریخ ریاضیات است. تا با نگاه تیزبینانه دریابد که جریان تجربه تاریخی ریاضیات چگونه است. ایده‌ها چگونه به‌وجود می‌آیند و چگونه رشد می‌کنند، سرچشمه‌ها از کجا نشأت می‌گیرد. نظریه‌ها چگونه شکل می‌گیرند، پیروزیها و شکستها چگونه اتفاق می‌افتند. عوامل مهم و اصلی در جریان ریاضیات چه هستند؟ عوامل تأثیرگذار کدامند؟ و قس علیهذا. این‌گونه نگرش، اکنون سرخط جریان انسانگرایی در ریاضیات است به‌طوری که یکی از آخرین محصولات آن کتاب تجربه ریاضی اثر روبن هرش و فیلیپ دیویس دو ریاضیدان و دو فیلسوف ریاضی معاصر می‌باشد.

در کتاب تجربه ریاضی سه دیدگاه سنتی افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی و ساخت‌گرایی (شهودگرایی) مورد نقد و تحلیل قرار گرفته و ضمن انتقادها و ایرادهای اساسی بر آنها راهی نو انتخاب می‌شود تا بتواند در تبیین ماهیت ریاضیات نواقص دیدگاههای گذشته را برطرف کند. تجربه ریاضیات را متن قرار می‌دهد و نتیجه می‌گیرد که درباره ماهیت ریاضیات دو واقعیت آشکار است.

واقعیت اول این که ریاضیات آفریدهٔ بشر است و ریاضی‌دانها این را خوب می‌دانند، زیرا خود ریاضیات را می‌آفرینند. این که حساب و هندسه مقدماتی به‌نظر خدادادی می‌آیند، به خاطر این است که همه‌جا حضور دارند و گویا همیشه حضور داشته‌اند. برعکس، تاریخ ساخت ابزارهای جبری‌ای که توپولوژی‌دانها اخیراً به‌کار بسته اند و جدیدترین انواع عملگرهای شبه دیفرانسیلی، چنان تازه است که به اصطلاح هنوز مرکّب آنها خشک نشده است. اما شجره‌نامهٔ اینها هم به همان موضوعات قدیمی باز می‌گردد. میان جدیدترین نظریه‌ها و قدیمی‌ترین آنها، شباهتهای انکارناپذیر وجود دارد.

واقعیت دوم این است که چیزهایی که ریاضی‌دانها به جهان ارائه کرده‌اند، همین شکلهای هندسی و توابع حسابی و عملگرهای جبری، آری همینها برای آفرینندگانشان نیز موجودات اسرارآمیزی هستند. اینها خواصی دارند که مجبوریم با کلی جان کندن و به ضرب و زور پشتکار و قریحه و نبوغ از آنها سردرآوریم ؛ خواص دیگری دارند که به عبث می‌کوشیم آنها را کشف کنیم و خواصی هم دارند که هرگز به مخیله ما هم خطور نکرده است. کل فعالیتی که در زمینه حل مسئله‌های ریاضی می‌شود شاهدی بر صدق واقعیت دوم است.

اکنون اگر به تجربه ریاضی معتقد باشیم با این سؤال روبرو می‌شویم که چگونه می‌توان این دو واقعیت را به هم پیوند زد و چگونه می‌توان آنها را به‌عنوان حقایقی سازگار و نه متناقض، در نظر آورد؟ همه عادت کرده‌اند که در چهارچوب فلسفه، جهان را تنها مرکب از دو جوهر بدانند : ماده یا

جوهر مادی ــ یعنی آنچه که می‌توان در آزمایشگاه علوم طبیعی مطالعه کرد ــ و ذهن به‌عنوان جوهر دوم، یعنی آن روحی که در کالبد هریک از ما جای گرفته است. اما این دو مقوله کافی نیست. همان‌طور که در فیزیک امروز نمی‌توان چهار جوهری که یونانیان باستان بدان اعتقاد داشتند (آب، آتش، خاک و هوا) بسنده کرد.

ریاضیات یک واقعیت عینی است که نه ذهنی است و نه مادی. واقعیتی مثالی (ایده‌آلی، غیرمادی) است که عینی است یعنی در خارج از آگاهی هر انسانی وجود دارد. در نتیجه به‌جای این که سرو ته ریاضیات را بزنیم تا جامهٔ کوچک یک فلسفهٔ خاص بر قامت آن راست آید، بهتر است جامهٔ فلسفه را بزرگ کنیم تا پذیرای واقعیت تجربه ریاضی گردد.

روبن‌هرش در کتاب «ریاضیات واقعاً چیست؟» به تبیین دیدگاه فلسفی‌اش در مورد ریاضیات می‌پردازد و تلاش می‌کند نشان دهد که دیدگاهش درباره ریاضیات درست است. او اظهار می‌دارد :

«ریاضیات یک فعالیت بشری، یک پدیده اجتماعی، بخشی از فرهنگ بشری، درگیر با تاریخ و قابل درک و فهمیدنی است و باید آن را در یک بستر اجتماعی درک کرد. هرش این دیدگاه را «انسان‌گرا» (Humanist) می‌نامند و این عنوان را شامل همه فلسفه‌های ریاضی می‌داند که ریاضیات را یک فعالیت بشری، یک محصول و یک مشخصهٔ اجتماعی ــ فرهنگی قلمداد می‌کند. برای توصیف روشن‌تر از فلسفه‌اش می‌گوید :

ریاضیات مانند پول، جنگ یا مذهب است، نه فیزیکی خالص و نه روحی و روانی خالص (متعلق به معقولات و عواطف)، اما اجتماعی است. سروکار با ریاضیات از منظر فیزیکِ خالص غیرممکن است و ازمنظر روحی و روانی خالص نیز غیر ممکن است، یعنی ریاضیات نمی‌تواند تنها از تفکر خالص و عواطف خالص، عادت و یا بازتاب و عکس‌العمل غیرارادی باشد. ریاضیات تنها می‌تواند به‌عنوان مؤلفه‌های اجتماعی ــ فرهنگی ــ تاریخی انجام بگیرد.

این که گفته می‌شود ریاضیات مانند پول، جنگ یا مذهب است، یعنی یک پدیده اجتماعی ــ فرهنگی ــ تاریخی است. در واقع، این چهار پدیده باهم تفاوتهای اساسی دارند ولی همگی یک ویژگی مشترک دارند که همان موردنظر ماست. ریاضیات یک پدیده اجتماعی ــ فرهنگی ــ تاریخی است که هم مخصوص است و هم استثنایی و هم منحصر به فرد.

اکنون همه مواد لازم فراهم است تا نشان دهیم که چگونه فلسفه‌های گوناگون ریاضی به برنامه‌های درسی گوناگون و تدریس گوناگون منجر می‌شود.

فلسفه‌های ریاضی گوناگون، برنامه‌های درسی و تدریس گوناگون

چه رابطه‌ای بین فلسفه ریاضی و برنامه درسی ریاضی و تدریس ریاضی وجود دارد؟ آیا تدریس ریاضی پیامد فلسفه ریاضی است؟ آنچه مسلم است این است که اگر فلسفه ریاضی با این حقیقت که ریاضیات آموختنی و یادگرفتنی است، سازگار باشد، آن‌گاه در آموزش و تدریس ریاضی تأثیرگذار و مورد عنایت است. چنانچه فلسفه‌ای ماهیت ریاضی را غبارآلود و ابهام‌آمیز معرفی کند آموزش‌پذیری ریاضیات غیرقابل دسترس می‌شود. از منظری دیگر، اگر فلسفهٔ ریاضی‌ای ماهیت ریاضی را چنان تبیین کند که پیدایش، توسعه و آموزش آن را وابسته به بعضی از ابزارهای شناختی انسان بداند، آن‌گاه این دیدگاه در برابر فلسفه‌ای که پیدایش، توسعه و آموزش ریاضی را به‌وسیلهٔ همهٔ ابزارهای شناختی انسان ممکن بداند، با محدودیت بیش‌تری روبه‌رو است و کم‌تر مورد توجه قرار خواهد گرفت. ما این معیارها را به عنوان محکی برای بهره‌گیری از فلسفه‌های گوناگون ریاضیات درنظر می‌گیریم و سپس رویکردها را براساس آن تعیین می‌کنیم. بنابراین محک ما بر پایهٔ دو محور استوار است:

۱ـ آموزش پذیری،

۲ـ به‌کارگیری هرچه بیشتر ابزارهای شناختی انسان.

فیثاغورسیان و افلاطون در مورد ماهیت ریاضیات معتقد بودند موجودات ریاضی مستقل از ذهن بشر، مستقل از حس و تجربه، مکان و زمان هستند. ازلی و فناناپذیرند. علاوه بر اینها ریاضیات با الهیات مربوط است. به‌طوری که اعداد طبیعی در نزد فیثاغورسیان دارای معانی معنوی و روحانی بود. افلاطون معتقد بود ریاضیات دانش اساسی برای حرکت از ظلمت به نور است و رسیدن به کمال مطلوب از مسیر ریاضی میسر می‌شود. برای تربیت شایستگان و زمامداران و سرداران صالح، برنامه آموزشی باید متکی بر ریاضیات باشد. بر همین اساس یادگیری ریاضی برای همه یکسان نیست و آنها که استعداد طبیعی آموختن ریاضی را دارند می‌توانند همه دانشها را بیاموزند ولی کُندذهنها هرچند سودی از آن نمی‌برند ولی درکشان بیش‌تر می‌شود.

بنابراین ریاضیات را در انحصار نخبگان قرار می‌دهد و آموزش‌پذیری آن زیر سؤال می‌رود. از سوی دیگر اگر موجودات ریاضی را با تعابیر خاص خداشناسی قرین بدانیم آن‌گاه پیدایش مفاهیم جدید، بدعت و کفرگویی قلمداد می‌شود کمااین‌که در مورد پیدایش $\sqrt{2}$ چنین اتفاقی افتاد! و سالها این مسئله را مخفی کردند و این جلوگیری از پیشرفت علم ریاضی بود و لذا از منظر آموزشی مورد

اعتنا نیست. نخبه‌گرایان در آموزش با افلاطون‌گرایان در فلسفه کاملاً تطبیق می‌کنند و سازگاری دارند و این نیز محدودیت برای آموزش ایجاد می‌کند. در این‌جا نمونه‌ای از گفت و شنود معلمین افلاطون‌گرا را که آموزنده است یادآور می‌شویم (هرش ۱۹۹۸).

«معلم فکر می‌کند که جهان ریاضیات را که جهان دیگری است، می شناسد (یا می‌بیند). دانش‌آموز متقاعد شده است که معلم او واقعاً جهان ریاضیات را می‌بیند. ولی راهی وجود ندارد که دانش‌آموز باور کند که او نیز به دیدن جهان ریاضی نزدیک شده است!»

ملاحظه می‌کنیم که با این تفکر، ریاضیات دور از دسترس قرار می‌گیرد. در این‌جا لازم است به این مسئله اشاره کنیم که از دیدگاه افلاطون و فیثاغورس آثار تربیتی و اخلاقی (تربیت فکر و شخصیت) ریاضی بسیار مهم‌تر از کاربرد آن در زندگی واقعی بوده است و لذا محور برنامه آموزشی افلاطون برای جامعه آرمانی، ریاضیات است. این منظر ریاضیات یعنی تأثیر اخلاقی و تربیتی و فرهنگی ریاضی در اکثر دیدگاههای فلسفه به‌ویژه دیدگاه انسان‌گرایی مورد توجه است و کسی آن را رد نمی‌کند. نکته مهم دیگر این است که افلاطون معتقد است «اعداد تنها با تفکر دریافتنی هستند و دارای این ویژگی‌اند که روح آدمی را مجبور می‌سازند برای دست‌یابی به حقیقت، از تفکر انتزاعی یاری بجوید.» این دیدگاه این پیامد را دارد که حس و تجربه نقشی در یادگیری ریاضی ندارند و تنها تفکر محض و برهان عقلی موجب یادگیری ریاضی می‌شود. بنابراین نقش مسائل واقعی، کاربرد و ارتباط با زندگی، در این آموزش مورد توجه و تأکید نیست و این باور برنامه درسی ریاضی و تدریس ریاضی را دگرگون می‌کند.

از دوران یونان باستان به سده‌های اخیر می‌آییم و فلسفه‌های منطق‌گرایی و صورت‌گرایی را که در جریان اصلی فلسفه ریاضی قرار دارد موردنقد قرار می‌دهیم. از نظر راسل (مورتیس ۱۹۸۵): «ریاضی محض، ردهٔ تمام گزاره‌هایی به شکل «p نتیجه می‌دهد q» است که p و q گزاره‌هایی شامل یک یا چند متغیر هستند و هیچ یک از دو گزاره p و q ثابتی به جز ثابتهای منطقی ندارند». اگر اساس ریاضی این گونه گزارههای شرطی منطق باشد بنابراین برنامه درسی ریاضی باید شامل پیش‌نیاز منطق صوری باشد. یعنی ابتدا منطق صوری آموزش داده شودو سپس ریاضیات را در قالب منطق ریخته آموزش داد! تدریس ریاضی نیز همواره باید ساختار منطقی را محور قرار دهد و در هر مرحله ابتدا بر آن تأکید کند و سپس بر مفهوم ریاضی، آن هم در قالب منطق ریخته شدهٔ آن. در این صورت نقش شهود و فعالیتهای فکری غیررسمی ریاضیات کم‌رنگ شده و قسمت اعظم توانایی انسان درگیر یادگیری ریاضی نمی‌شود. طبیعی است که در آموزش ریاضی محدودیت ایجاد شده، به‌راحتی به زندگی واقعی پیوند نمی‌خورد و لذا براساس محک ما این دیدگاه نیز در آموزش نمی‌تواند محور قرار

گیرد. این تصور که تنها باید براساس منطق صوری ریاضیات را آموخت در جامعه آموزشی ما طرفداران بسیار دارد و در آموزش دبیرستانی بر آن تأکید می‌کنند. ریشه این باور از منطق‌گرایی راسل نشأت می‌گیرد و در دههٔ پنجاه شمسی وارد برنامه‌های دبیرستانی ما شد. نکته قابل توجه این است که بعضی از طرفداران این دیدگاه در کشور ما، خود به این شیوه ریاضیات را نیاموخته‌اند! از طرف دیگر در همان دوران پیدایش مکتب منطق‌گرایی، بسیاری از ریاضی‌دانها با آن مخالفت کردند و به‌طور کلی این تفکر که ریاضیات بخشی از منطق است و باید در قالب آن آموزش داده شود، مورد تأیید قرار نگرفت و اکنون نیز محل اعتنا نیست.

صورت‌گرایی هیلبرت بیش از منطق‌گرایی راسل بر برنامه درسی مدرسه تأثیر گذاشت. اگرچه صورت‌گرایی و تجرید در ریاضیات قطعاً معادل نیستند ولی جهت‌گیری مجرد بسیاری از تحقیقات ریاضی در این قرن دیدگاه صورت‌گرایی را تقویت کرده است به‌عنوان مثال مارشال استون (گریفیتز و هاوسون ۱۹۷۴) اظهار می‌دارد:

وقتی که مقایسهٔ بین ریاضیات امروز را با ریاضیات اواخر قرن نوزدهم متوقف کنیم، ممکن است از چگونگی رشد سریع دانش ریاضی، هم از نظر کیفیت و هم ازنظر کمیت متحیر شویم. نباید چشمانمان را بر روی این واقعیت ببندیم که چگونگی این رشد و توسعه با تأکید بر تجرید و دغدغه فزایندهٔ نسبت به ادراکات و تجرید و تحلیل الگوهای وسیع ریاضی ارتباط نزدیک داشت. درواقع، با بررسی دقیق‌تر می‌بینیم که این جهت‌گیری جدید که تنها با جدایی ریاضیات از کاربردهایش به‌وجود آمد، منبع حقیقی رشد بی سابقهٔ ریاضی در قرن حاضر شده است (ص ۱۲۰).

در برابر این دیدگاه درسی و دومین سالنامهٔ شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) (جونز، ۱۹۷۰) تصویر کمتر درخشانی ارائه می‌کند:

تمایل تحقیقات ریاضی امریکا به محض بودن زیاد، و به حوزهٔ مبانی ریاضی به‌جای ریاضی کاربردی، در قرن بیستم نیزادامه یافت و تبدیل به یک ناتوانی و معلولیت ملی واقعی در جنگ جهانی دوم شد (ص ۳۰).

ولادیمیر ایگوروویچ آرنولد می‌گوید:

اصل موضوعی کردن و جبری کردن ریاضیات، پس از پنجاه سال، باعث شده تعداد بسیاری از متون ریاضی غیرقابل خواندن باشد به‌طوری که خطر از دست رفتن کامل ارتباط (ریاضیات) با فیزیک و علوم طبیعی پیش آمده است.

این اظهارنظرها در مورد وضعیت ریاضیات ناشی از صورت‌گرایی جنبه‌های مثبت و منفی صورت‌گرایی را آشکار می‌کند ولی وضعیت در مدرسه (پیش از دانشگاه) همراه با جنبه‌های مثبت

نبود. یکی از آشکارترین دلالتهای تأثیر تفکر صورت‌گرایی مجرد در ریاضی مدرسه در امریکا را می‌توان از زبان ای. جی ــ بیگل فقید شنید (۱۹۷۹). ریاضیدانی که آموزشگر شد و رئیس گروه بسیار با نفوذ «گروه مطالعات ریاضیات مدرسه» (SMSG) در ایالات متحده شد. او گفت:

«من ریاضیات را مجموعه‌ای از نظامهای نمادین، مجرد و از درون مرتبط می‌بینم.»

ملاحظه می‌کنیم که چگونه صورت‌گرایی مجرد وارد برنامه درسی ریاضی شد و برنامه درسی ریاضی را دگرگون کرد. حال نظر یکی از منتقدان صورت‌گرایی را در مورد تأثیر این فلسفه در برنامه درسی ریاضی مرور می‌کنیم.

هرش می‌گوید: «نیمه گذشته قرن، شاهد ظهور صورت‌گرایی به‌عنوان پرطرفدارترین دیدگاه در فلسفه ریاضی بوده است. در همین دوره، شیوهٔ غالب شرح و تفسیرها در مجله‌ها و کتابهای درسی و رساله‌ها، اصرار بر ارائه جزئیات دقیق تعریفها و اثبات‌ها بوده است، به علاوه بر حذف یا می‌نیمم کردن بحث، راجع به این که چرا روش جذاب است، یا چرا از یک روش خاص اثبات استفاده شده است نیز اصرار ورزیده نشده است... تصور فرد از آنچه که ریاضی است بر تصور او از این که چگونه ریاضی ارائه شود تأثیر می‌گذارد.»

مثال دیگر، ورود نظریه مجموعه‌ها و اصول موضوع به برنامهٔ درسی ریاضی دبیرستان در طی دههٔ ۶۰ میلادی بوده است. این اتفاق، آنچنان که گاهی به‌نظر می‌رسد که بعضی از منتقدان تصور می‌کنند، یک انحراف غیرقابل توضیح نیست. این پیامد قابل پیش‌بینی دیدگاه صورتگرایی بود که تمام ریاضیات را به نظامهای اصل موضوعی بیان شدهٔ در زبان نظریه مجموعهٔ کاهش داد.

اکنون اگر صورت‌گرایی مبنای برنامهٔ درسی ریاضی باشد، تأکید بر آموزش نمادهای جبری و نظریه مجموعه‌ها در ابتدای آموزش و به‌عنوان زیربنای محتوای ریاضیات، پرهیز از تلاش برای معنادار کردن آنها، تأکید بر دستگاههای مجرد و صوری ریاضیات به عنوان اساس و پایه ریاضیات محور قرار می‌گیرد. در این مورد می‌توان برنامه درسی دههٔ پنجاه کشورمان، که کاملاً متأثر از صورت‌گرایی در غرب بود، را به‌عنوان نمونه درنظر گرفت. در دوره راهنمایی نیز تأکید بر دستگاههای اصول موضوعی اعداد، شامل اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد حقیقی بود و اصول موضوع این دستگاهها به‌عنوان خواص آنها فهرست می‌شد و استدلالهایی از جمله منحصر به فرد بودن قرینه یک عدد، وارون یک عدد براساس خاصیتها در دوره راهنمایی نیز وجود داشت (کتابهای ریاضی راهنمایی دهه پنجاه شمسی) وضعیت در دبیرستان بسیار شدیدتر بود، کتابهای ریاضیات جدید در هر چهار سال دبیرستان (رشته ریاضی) متکی بر نظریه مجموعه‌ها، منطق صوری، دستگاههای اصلی موضوعی (گروه، حلقه، میدان، فضای برداری، دستگاه بُولی) بود و صورت‌گرایی محض و منطق‌گرایی همه

جای آن برنامه درسی ریاضی آشکار بود. هنوز بعضی از آن سنتها (دستگاه اعداد حقیقی به‌عنوان میدان اعداد حقیقی) پابرجاست. اگرچه بسیاری از آنها در برنامه ریاضی کنونی وجود ندارد. البته در ابتدای نظام جدید آموزش متوسطه درس هندسه با صورت‌گرایی افراطی و اصل موضوعی شدیدتر از گذشته ارائه گردید و موفق نبود. این رویکرد در برنامه درسی در غرب به سرعت مورد انتقاد ریاضی‌دانان (بیانیه ۶۲) قرار گرفت و اکران آن طول عمر کوتاهی داشت. ولی آثار آن تا مدت طولانی ادامه داشت. این سؤال که اگر ریاضیات مشتی فرمول و نماد و دستگاههای اصل موضوعی بی‌معناست چگونه می‌توان آن را تدریس کرد طوری که همراه با درک و فهم باشد؟

به این ترتیب ریاضیات با تاریخ بشر پیوند نمی‌خورد و ریاضی ارزش فرهنگی نخواهد داشت. صورت‌گرایی محض موجب می‌شود بین شاگردان و ریاضی فاصله ایجاد شود و آنها نخواهند توانست ریاضیات را با زندگی و آرزوهایشان پیوند بزنند و چرایی آن برایشان بی‌پاسخ است؛ اینها از جمله عواملی هستند که آموزش پذیری ریاضیات را با ابهام مواجه می‌کند و بنابر محکمان نمی‌تواند زیربنای مناسبی برای آموزش ریاضیات باشد.

در دهه سوم و چهارم قرن بیستم مکتب جدیدی در ریاضیات پدید آمد که تأثیر بنیادی در آموزش ریاضی در دانشگاههای غرب گذاشت و دامنه آن به مدرسه نیز سرایت کرد. طبق گفته اندره ویل نقطه آغاز از بحث بر سر تدریس قضیه استوکس در حسابان، هنگام صرف نهار، پدیدار شد و آرام‌آرام این ایده که تدریس ریاضی، برنامه ریاضی و کتابهای درسی دانشگاهی نیازمند توجه است، شکل گرفت. گروهی از ریاضی‌دانان جوان با تشکیل جلساتی تصمیم به تألیف کتاب ریاضی گرفتند و نام مستعار بورباکی را برای برگزیدند. بحث تألیف و مباحثه‌ها، بحثهای جانبی دیگری را وارد جریان کرد و مکتب بورباکی شکل گرفت. دیدگاههای منطق‌گرایی و شهودگرایی و صورت‌گرایی همه در این گروه نقش داشتند. بورباکی از سلسله اساس‌گرایان است و به ساختارها به‌عنوان اساس ریاضیات عنایت بسیار داشتند. آنها نظریه مجموعه‌ها و منطق را مورد توجه زیاد قرار دادند. سه ساختار اساسی را برای زیربنای ریاضیات برگزیدند و معتقد بودند بقیه ساختارهای ریاضی از آنها به‌دست می‌آید. این سه ساختار عبارتند از:

۱ــ ترتیب (به مفهوم قرار گرفتن اشیاء یکی بعد از دیگری)

۲ــ جبر (مجموعه‌ها و عملیات روی آنها)

۳ــ توپولوژی (همسایگیها، بسته بودن)

به همین دلائل به ساختارگرایان مشهور شدند. برنامه این گروه نظام آموزش ریاضی در دانشگاهها را متحول کرد و کتابهای غنی ریاضی براساس ساختارهای ریاضی تألیف گشت و مورد استقبال قرار

گرفت. دیودونه یکی از ریاضی‌دانان بزرگ این گروه است که پس از موفقیت این گروه در دانشگاهها در سخنرانی خود اظهار کرد که: برنامه بورباکی برای آموزش ریاضی می‌تواند در دبیرستان نیز به اجرا درآید.

طبق نظر هرش (۱۹۹۸) بورباکی گرایی و ساختارگرایی با تغییر سبکها اکنون از مُد افتاده است و محل اعتنا نیست. این دیدگاه بعداً توسط استیوارت شاپیرو (Stuart shapiro) و میخائیل رزنیک (Michael Resnik) دچار تغییرات اساسی شد و ریاضیات را به‌عنوان «علم الگوها» درنظر گرفت. به‌طوری که دیگر همان مکتب اولیه نیست. براساس انتقادهایی که به تعریف جدید گرفته شد تعریف ریاضیات در ساختارگرایی متحول شد و ریاضیات به‌عنوان «مطالعه الگوهای ریاضی» تعریف شد. اما توضیح دادن «الگوهای ریاضی» ساده‌تر از «ریاضیات» نیست. در همین مورد پنلوپ مدی (Penelope Maddy) در کتاب «واقع‌گرایی در ریاضیات» می‌گوید که ساختارگرایی تنها در بیان شفاهی با واقع‌گرایی نظریه مجموعه‌ای تفاوت دارد.

نکته قابل توجه همزمانی کارهای روان‌شناسی و معرفت‌شناسی پیاژه در مورد ریاضیات است که کاملاً هماهنگ با مکتب بورباکی است و همان دیدگاه را برای کار خود انتخاب کرده بود که مضرات و فواید گوناگون داشت. این همزمانی در ریاضیات و معرفت‌شناسی یکی از عوامل اصلی برنامه درسی ریاضی در دوران ریاضیات جدید در دهه ۶۰ میلادی در غرب است و حاکی از تأثیر مستقیم بر برنامه درسی ریاضی مدرسه دارد. در بخش مبانی نظریه‌های یادگیری به این بحث بازخواهیم گشت.

منطق‌گرایی، صورت‌گرایی، بورباگرایی و دیدگاههای پیاژه و برونر از عوامل اصلی برنامه درسی ریاضی در دوران ریاضیات جدید در غرب بود که عمری کوتاه داشت! یکی از آموزه‌ها و اندرزهای این تحولات این است که نباید تصور کرد که موفقیتها در سطوح بالای ریاضیات تأییدی بر به‌کارگیری و کارآمدی همان روشها و رویکردها در مدرسه است.

حال جریان انسان‌گرایی و دیدگاه نوگرایان مستقل را از منظر آموزشی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سر سلسله این جریان یعنی ارسطو دیدگاهی متفاوت نسبت به بینش افلاطون داشت. تفاوت اساسی از این‌جا ناشی می‌شد که افلاطون ریاضیات را از راه تفکر ناب دست‌یافتنی می‌دانست در صورتی که ارسطو سرآغاز و سرچشمه علم را حس و تجربه و دنیای فیزیکی می‌دانست و معتقد بود که ذهن صورت مجردی از اشیاء واقعی (فیزیکی) ایجاد می‌کند. بنابراین ریاضیات نیز یک فعالیت بشری است و ساخته بشر است و انسانها می‌توانند از این مسیر به آن دست یابند. بنابراین دو پیامد مهم آموزشی به همراه دارد: ۱ـ شروع آموزش هر ایده یا مفهوم باید از دنیای طبیعی و به‌وسیله حس

و تجربه انجام گیرد. ۲ـ ریاضیات فعالیتی بشری است لذا آموزش‌پذیر است.

بنابراین براساس معیار ما این دیدگاه مورد توجه است و بایستی به آن عنایت کرد. در این صورت برنامه درسی ریاضی به روش‌شناسی علوم تجربی توجه می‌کند. حدس، آزمایش و تجربه، جمع‌آوری اطلاعات، تنظیم داده‌ها و استقرای تجربی و حدسیه‌سازی در برنامه درسی و تدریس ریاضی نقش دارد. در نتیجه تدریس ریاضی به تعاریف، اصول موضوع، قضیه‌ها و اثباتها محدود نمی‌شود و پشت صحنه ریاضی نه تنها حذف نمی‌شود، بلکه شروع کار ریاضی محسوب می‌شود.

تا دوران جدید علم، رکودی چشم‌گیر بر جریان علم حاکم بود و در مورد موضوعات مورد بحث، سخن شاخصی مطرح نشد. در رنسانس علمی دوباره جریان انسان‌گرایی به حرکت افتاد و تجربه‌گرایان و روش‌شناسی تجربی پدیدار شد. پوپر یکی از گروه تجربه‌گرایان است که در بخشهای قبل در موردش مطالبی بیان شد. اگرچه نظرات او در مورد علم افراطی است ولی از بعضی جنبه‌ها در فلسفه ریاضیات تأثیر گذاشت. او به‌طور کلی اثبات را از صحنه نظریه‌های علمی کنار گذاشت و اعتبار آنها را به سر بلند بودن در برابر آزمایشات می‌دانست. این نظریات موجب شد که جریان انسان‌گرایی و نوگرایان مستقل بیش‌تر به صحنه آید.

دیدگاه پوپر در مورد سطوح عمده واقعیت (عالمهای سه‌گانه) و جایگاه ریاضیات در آخرین مرحله تکاملی بسیار حائز اهمیت است. او ریاضیات را بخشی از فرهنگ غیرمادی بشر می‌داند که مراحل پیدایش و تکامل آن به دست بشر صورت می‌پذیرد. او ریاضیات را از سنخ آگاهیهای فردی قلمداد نمی‌کند، بلکه آگاهیهای جمعی و فرهنگ اجتماعی بشر می‌داند. این دیدگاه ضمن این که آموزش پذیری ریاضیات را قطعی می‌داند، ارزش و جایگاه متعالی برای آن قائل است. بنابراین برنامه درسی متأثر از این دیدگاه بر روش‌شناسی علوم تجربی استوار است و به لحاظ ارزشمندی و جایگاهش سهم مهمی در برنامه درسی خواهد داشت. معلمی که متأثر از این دیدگاه است به ریاضیات نیز مانند علوم تجربی نگاه می‌کند و در تدریس بر منظر صوری و دقیق ریاضی تأکید نمی‌کند. قیاس و استقراء را کنار می‌گذارد و ریاضیات را علمی یقینی نمی‌داند و اثبات در درس او جایی ندارد، بلکه صحت روابط را با آزمایش بررسی می‌کند. این دیدگاه کاملاً افراطی است و بخش مهمی از ریاضیات را در نظر نمی‌گیرد و تنها بخشی از پشت صحنه ریاضی را مورد توجه قرار می‌دهد.

دیدگاههای لاکاتوش در مقایسه با پوپر از اهمیت والایی برخوردار است. زیرا که بر ریاضیات و فلسفه ریاضی متمرکز بود. اگرچه شاگرد پوپر بود ولی پیرو محض او نشد و در مقابل «حدسها و ابطالها» منطق کشف ریاضی را «اثباتها و ابطالها» درنظر گرفت. لاکاتوش بر ریاضیات غیررسمی، شهود و همه فعالیتهای تجربی و آزمایشی و فکری تأکید بسیار دارد. این توجه نیمه اول فلسفه ریاضی

او را می‌سازد و در نیمه دوم قیاس و استقراء و استدلالهایی استنتاجی را در قالب «اثباتها و ابطالها» به‌کار می‌گیرد. برخلاف پوپر اثباتهای رسمی و صوری و غیررسمی و غیرصوری را بخشی از منطق کشف ریاضی می‌داند. او تاریخ را متن قرار می‌دهد و براساس آن به ماهیت ریاضی می‌نگرد. او ریاضی را یک فعالیت و پژوهش انسانی می‌داند که مانند همه فعالیتهای انسان می‌تواند خطاپذیر و اصلاح‌پذیر باشد بنابراین هم به پشت صحنه ریاضی و هم به جلوی صحنه ریاضی اهمیت می‌دهد با این تأکید که پشت صحنه ریاضی را محور قرار می‌دهد. بر همین اساس فلسفه خود را فلسفه نیمه‌تجربی ریاضیات می‌نامد. می‌توان گفت در این دیدگاه ریاضیات محصول همه ابزارها و تواناییهای شناختی انسان است و همین ویژگی موجب می‌شود که کاندیدی برای محور قرار گرفتن در آموزش باشد. در این دیدگاه جریان تاریخی و طبیعی پیدایش انگیزه‌ها و ایده‌ها و سپس مراحل تکوین آن بستری مهم قلمداد می‌شود. روش شناسی علوم تجربی به تمامی استفاده می‌شود و سپس روش استدلال استنتاجی نیز به تمامی درگیر می‌شود تا حکمی را ثابت یا رد کند. پشت صحنه ریاضیات محور قرار می‌گیرد و کار تنها با انجام جلوی صحنه ریاضیات کامل می‌گردد. نقش ریاضیات غیررسمی و شهودی و کامل نشده در آموزش بسیار پررنگ است. عنوان اثباتها و ابطالها به‌عنوان منطق کشف این پیام را دارد که برنامه درسی ریاضی نباید تنها شامل حقایق و مطالب درست باشد! بلکه مطالب نادرست نیز به شیوه مناسبی لازم است ارائه گردد تا منطق کشف ریاضی محقق شود. جهت‌گیری مسائل نباید یک سویه باشد بلکه هر دوی اثبات کردن و رد کردن را لازم بداند.

آخرین منزلگاه در فلسفه انسان‌گرایی در ریاضیات نظریات دیویس و هرش است. متأثر از افکار پوپر، پولیا و لاکاتوش «تجربهٔ ریاضی» محور این دیدگاه است. براساس این دیدگاه باید ریاضیات را به‌عنوان فعالیتی انسانی، پدیده‌ای اجتماعی ــ فرهنگی ــ تاریخی درک کرد. ریاضیات دارای موضوعی واقعی و معنادار است (در مقابل صورت‌گرایی) و معنی آن را باید در خرد جمعی آحاد بشر جست وجو کرد. نباید در قلمرو واقعیت غیربشری و خارجی دنبال ریاضیات گشت. ریاضیات فعالیتی هوشیارانه، خردمندانه است که تنها درچهارچوب فرهنگ انسانی، می‌توان به آن اندیشید. از یک منظر از مقوله هنر و ادبیات است، ولی ویژگی تمیز آن، کیفیت علم گونه آن است و مثل مفاهیم نقد ادبی دائماً در معرض عدم توافق قرار ندارند. نتایج ریاضیات الزام‌آور است. ابداع استثنایی بشر است که پس از ابداع نیز می‌توان واقعیاتی درباره آن کشف کرد. در معرض خطاست. اصلاح‌پذیر، تعمیم‌پذیر و بامعنی است.

ملاحظه می‌کنیم که این دیدگاه ریاضیات را با همه ابعاد فرهنگ و تمدن بشر مرتبط می‌داند و لذا آموزش‌پذیری ریاضی در این دیدگاه از درجه بالایی برخوردار است. بنابراین می‌تواند به‌عنوان محور

و زیربنای آموزش ریاضی قرار گیرد. ویژگیهای برنامه درسی ریاضی و تدریس ریاضی مبتنی بر این فلسفه شامل همه ویژگیهای فلسفه نیمه تجربی ریاضیات است. به‌علاوه به‌ریاضیات و ایده‌های ریاضی به عنوان میراث ارزشمند و گرانبهای تمدن بشری می‌نگرد، لذا در این برنامه درسی، ریاضیات در متن آموزشهای فرهنگی ـ اجتماعی ـ تاریخی قرار دارد. به این لحاظ آموزش ریاضی با حوزه‌های دیگر دانش، علوم اجتماعی، علوم رفتاری و علوم تجربی، علوم انسانی مرتبط و درگیر است. از یک نظر با دیدگاه افلاطونی مشابهت دارد که ریاضی را محملی برای تعالی انسان می‌داند و اثر تربیتی، فرهنگی، اجتماعی آن را مورد تأکید قرار می‌دهد. با این بینش معلم ریاضی، به ریاضیات به‌عنوان گرانبهاترین و اصیل‌ترین ابداع بشر می‌نگرد که دانش‌آموزان را در معرض یادگیری آن قرار می‌دهد.

نگاهی به نقش اثبات در کلاس درس

نقش اثبات در کلاس درس همانند نقش آن در پژوهش ریاضی نیست. در تحقیقات ریاضی اثبات برای متقاعد کردن و رسمیت بخشیدن یک ایده است. درصورتی که در کلاس درس اثبات برای توضیح دادن، روشن کردن یک مفهوم یا یک حکم، مورد نیاز است. توضیح برای این‌که چرا قضیه‌ای درست است، در کلاس اثبات به مفهوم منطق صوری نیست. در کلاس اثباتهای غیررسمی، غیرصوری یا نیمه صوری با زبان طبیعی (معمولی) ارائه می‌شود و می‌توانند در درون خود، زیراثباتهای صوری یا محاسبات را به‌کار گیرند.

بعضی از معلمین خیال می‌کنند که : «اگر کلاس ریاضی است، باید ثابت کرد. اگر چیزی ثابت نمی‌شود، آن ریاضی نیست!» این تصور و باور یک پیامد مستقیم در تدریس دارد. زیرا اگر اثبات، ریاضی است و ریاضی، اثبات است. آن‌گاه مأموریت معلم در کلاس، اثبات کردن است. بیش‌تر وقت کلاس به اثبات می‌گذرد. اثباتهای راستین و دقیق تا احساس کنند کلاس واقعاً وجود دارد! در این دیدگاه ارائه اثبات به دانش‌آموز انگیزشی است تا خردمندانه و آگاهانه! اگر معلم دلیلی بهتر از این‌که «ریاضی یعنی این» ارائه ندهد، دانش‌آموز می‌داند که تنها یک اثبات دیده است، اما نه چرایی آن. هِرش (۱۹۹۸) این دیدگاه را «مطلق‌گرا» می‌نامد و ادامه می‌دهد :

اگر ریاضیات یک دستگاه از حقایق مطلق است و مستقل از دانش یا ساختن انسان است، آن‌گاه اثباتهای ریاضی بیرونی، ازلی و جاودانه، متحیرکننده و اعجاب‌انگیز خواهند بود. معلم مطلق‌گرا

تنها هدفش ثابت کردن است و دانش‌آموزان را برای این هدف آماده می‌کند. او تلاش می‌کند تا کوتاه‌ترین راهها و کلی‌ترین روشها را در اثبات به‌کار گیرد. در این رویکرد هدف از اثبات توضیح دادن نیست، بلکه پذیرش آن به‌عنوان یکی از حقایق مطلق است.

هِرش می‌گوید : دیدگاه من حامی انسان‌گرایی است. برای یک انسان‌گرا ریاضیات بخشی از معرفت اوست که می‌تواند آن را به‌کار بگیرد. ابزاری برای شناخت اوست و برای رفع مشکلات زندگی‌اش. آن‌چه او درک می‌کند و می‌فهمد مال اوست. در این دیدگاه درک و فهم ریاضی نقش اصلی دارد. بنابراین اثبات به‌تنهایی نمی‌تواند هدف باشد، بلکه درصورتی که به‌وسیله آن بتوان حکمی را توضیح داد و یا به‌طور کامل آشکار کرد مورد توجه خواهد بود. وقتی توضیح کامل مورد نیاز است، اثبات ترجیح دارد. معلم انسان‌گرا به روشنگرانه بودن اثبات توجه می‌کند و درصورتی که کوتاه‌ترین روشها و کلی‌ترین آنها کمکی به‌وضوح و روشنگری نکنند مورد توجه نخواهند بود. حتی ممکن است یک روش طولانی انتخاب شود. بعضی از اثباتها توضیح بیش‌تر نمی‌دهند، بلکه یک کلک و حُقّه مانند «خرگوش از زیر کلاه درآوردن» هستند. این‌گونه روشها مورد اعتنا نیستند. بنابراین «فهمیدن» خط‌مشی اصلی دیدگاه انسان‌گرایی در مورد ریاضیات است که در آن، دقیق کردن، مختصر کردن اهمیت ندارد. اکنون سؤالهایی مطرح است. آیا معنی «فهمیدن» را درک کرده‌ایم؟ آیا برای پروراندن «درک و فهم» تدریس می‌کنیم؟ در پاسخ گوییم که ما فهمیدن را شناسایی کرده‌ایم ولی نمی‌توانیم به‌طور صریح بگوییم که چیست.

یوری لِرون (۱۹۸۹) ایدهٔ «اثبات ساخت‌یافته» را از کامپیوتر اقتباس کرد. یک اثبات ساخت‌یافته شبیه یک برنامه ساخت‌یافته است. به‌جای شروع با تعدادی لِم که در پایان اهمیت و ارزش آنها ظاهر می‌شود، اثبات، ابتدا به قطعات بزرگ شکسته می‌شود. سپس هر بخش به قطعات کوچکتر تجزیه می‌شود و لمها در پایان ظاهر می‌شوند و در انتها آورده می‌شوند با این روش چرایی لمها آشکار می‌شود.

در کلاس درس عمومی، شعار این است که : اثبات ابزاری در خدمت معلم و کلاس است، نه یک قید و بند برای مهار کردن آنها. در تدریس ریاضیدانانِ آینده «اثبات ابزاری در خدمت تحقیق است و نه قید و بندی برای تصور و تخیل ریاضیدانان».

بنابراین اثبات می‌تواند توضیح‌دهنده و روشن‌کننده و متقاعدکننده باشد. در تحقیق، قانع کردن در اولویت است، درصورتی که در دبیرستان و دوره‌های کارشناسی تشریح کردن و توضیح دادن مقدم است.

نقش شهود در ریاضیات و تدریس آن

شهود متضمن این امر است که معنا یا اهمیت یا ساختار مسئله‌ای بدون توسل آشکار به ابزارهای نظام تحلیلی خاصی درک شود. به کمک شهود است که به سرعت فرضیه‌هایی صورت‌بندی می‌شوند یا مقایسه‌های جالبی بین ایده‌هایی که هنوز ارزششان دانسته نشده است انجام می‌گیرد. شهود، قبل از اثبات، کار خود را انجام می‌دهد؛ در حقیقت کار روشهای تحلیل و اثبات چیزی نیست جز آن‌که نتایج شهود را امتحان و بررسی کند.

جی. اس. برونر

(J.S. Bruner)

بدون شک نظریهٔ ریاضی که پایه و اساس نظام علمی قدرت‌مند و موفقی ـ به‌انضمام مشاهدات تجربی مهم و متعدد ـ را تشکیل می‌دهد صرفاً به‌دلیل «شهودی» بودنش پذیرفته نشده است.

«هیلری پاتم»

اگر به انجام دادن ریاضی بنگریم همه‌جا سر و کله شهود هویداست. شهود را در ادبیات ریاضی و کشف ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک مثال مشهود و تاریخی نامهٔ رامانوجان به هاردی است که شامل فرمولهایی متحیرکننده برای سریها، حاصل‌ضربها، کسرها و ریشه‌ها بود. این نامه به باکِر و هابسون نیز ارسال شده بود و آنها آن را رد کرده بودند. ولی هاردی آن را رد نکرد. فرمولهای رامانوجان همراه با اثبات نبود! درصورتی که در آن زمان تفکر افراطی اثبات صوری ریاضی بر جامعه ریاضی سلطه داشت و جالب‌تر این‌که هاردی دیدگاهی افراطی و محض نسبت به ریاضی داشت، ولی بدون اثبات یک داوری درست انجام داد و سپس اظهار کرد که رامانوجان یک نابغه است. سؤال این است که هاردی چگونه چنین قضاوتی کرد؟ او فرمولها را با اثبات کامل نیازمود، بلکه به‌وسیله استعداد فکری وابسته به ریاضیات قضاوت کرد. آیا داوری هاردی یک داوری ریاضی بود؟ جواب این است که یقیناً چنین بود. این یک حادثه استثنایی بود که با کار داوری هر روز مقاله‌های ریاضی، تفاوت اساسی دارد. این استعداد فکری و توانایی ذهنی در این‌گونه داوریها «شهود ریاضی» نامیده می‌شود. شهود ریاضی، باورها و نتایج ریاضی را بدون فرمول‌بندی صوری مورد قضاوت قرار می‌دهد و می‌پذیرد یا رد می‌کند.

شهود بخش اساسی ریاضیات است و مساوی فلسفه ریاضی که می‌تواند شهود ریاضی را نادیده بگیرد، نیست. واژه شهود همان‌گونه که ریاضی‌دانها آن را به‌کار می‌برند بار گرانی از اسرار و

ابهام را حمل می‌کند. گاهی اوقات به‌صورت نامشروع جایگزین اثبات دقیق می‌شود که بسیار خطرناک است و گاهی چنان بصیرت و روشنایی می‌تاباند که گویی ره صد ساله را یک شبه میسر می‌کند. به جهت این‌که شهود ریاضی در اولین گامهای کشف ریاضی، مفهومی دشوار و لغزان است، فهرستی از معانی و کاربرد این واژه را ارائه می‌کنیم تا درک بهتری در مورد آن داشته باشیم:

۱ـ شهود در نقطه مقابل «دقت ریاضی» قرار دارد: این بیان کاملاً آشکار نیست، زیرا معانی دقت ریاضی به‌صورت صریح داده نشده است. در این بیان می‌توان گفت که شهود یعنی فقدان دقت. هنوز هم معنی «دقت ریاضی» به‌طور شهودی! تعریف شده است و تعریف دقیقی از آن ارائه نشده است.

۲ـ شهودی یعنی بصری (دیداری): هندسه یا توپولوژی شهودی با هندسه یا توپولوژی دقیق از دو راه تفاوت دارد. از یک طرف نسخه شهودی دارای یک معنی و یک مرجع (در غیاب نسخه انتزاعی همراه با دقت صوری) در حوزهٔ خمها و رویه‌های دیداری شده می‌باشد. در این حالت شهود جالب‌انگیز است، یک کیفیت باارزش در فقدان نسخه دقیق است. از طرف دیگر بصری کردن ممکن است از یک فکر روشن یا گزاره‌های خود گواه که مشکوک یا نادرست هستند، ما را منحرف کند. مقاله‌ای از هاهن (Hahn) تحت عنوان «بحران در شهود» یک گردایه زیبا از این‌گونه گزاره‌هاست.

۳ـ شهودی یعنی محتمل، یا قانع کردن در غیاب اثبات: یک معنی مرتبط عبارت است از «آن‌چه که می‌توان انتظار داشت که در این‌گونه موقعیتها، براساس تجربه با موقعیتهای مشابه، درست باشد.» شهوداً محتمل یعنی به‌عنوان یک حدسیه علمی معقول یا کاندیدی برای اثبات.

۴ـ شهودی یعنی ناکامل: اگر بدون استفاده از قضیه تسلطی لبگ از تابع تحت انتگرال حد بگیرید یا اگر یک تابع را بدون آزمودن شرایط تحلیلی بودن، به یک سری توانی بسط دهید آن‌گاه می‌دانید که شکافی منطقی به‌وسیله این روش شهودی خواهید داشت.

۵ـ شهودی یعنی مبتنی بر یک الگوی فیزیکی و یا براساس مثالهای خاص: این روش نزدیک به «راهیاب» (Hirustic) است.

۶ـ شهودی یعنی کُل‌نگری یا تلفیقی: به همان صورتی که در برابر جزءنگری یا تحلیلی قرار دارد. هنگامی که در یک سطح کلان به یک قضیه فکر می‌کنیم، موقعی که از بعضی چیزها خاطرجمع هستیم به‌دلیل این‌که با چیزهای دیگری که می‌دانیم تطبیق می‌کند. در این مواقع در حال تفکر شهودی هستیم. «دقت» مستلزم یک زنجیر استدلالی است که در اولین قدم دانسته شده و در گام بعدی حدسیه است. اگر زنجیر خیلی طولانی باشد اثبات دقیق و خشک می‌تواند بی‌تردید ترک شود و ارائه نشود. واقعاً ممکن است از یک روش شهودی قانع نشویم.

در همهٔ این موارد و کاربردها، شهود مبهم و سربسته است. از یک مورد به مورد دیگر تغییر می‌کند. دارای مناظر خوشایند و ناخوشایند است. به هر حال اگر کارتان ریاضیات نیست ولی آنهایی را که به‌کار ریاضی مشغول هستند، تماشا کنید و یا تلاش کنید تا بفهمید که ریاضیدانها مشغول انجام دادن چه چیزی هستند، به‌طور اجتناب‌ناپذیری با شهود سر و کار دارید. هِرش ادعا می‌کند که:

۱ـ همه دیدگاههای فلسفی استاندارد روی بعضی از مفاهیم شهود تکیه می‌کنند.

۲ـ یک تحلیل واقع‌گرایانه از شهود ریاضی بایستی یک هدف محوری فلسفه ریاضی باشد.

۳ـ هیچ‌کدام از آنها طبیعت شهودی را که ادعا می‌کنند، توضیح نمی‌دهند.

۴ـ درنظر گرفتن شهود ـ همان‌گونه که واقعاً تجربه شده است ـ با یک مفهوم مشکل و پیچیده که لاینحل نیست، سروکار دارد.

جنبه‌های گوناگون درک و فهم ریاضی نیز وابسته به شهود ریاضی است. درک و فهم ریاضی از مواردی است که به‌صورت دقیق تعریف نشده است و شاید نتوان آن را با «دقت ریاضی» تعریف کرد. فرویدنتال (۱۹۷۷) نه‌تنها پیچیدگی دانش و فهم ریاضی، بلکه تفاوت حساس بین درک و فهمی که یک معلم باید جویای آن باشد و آنکه می‌خواهیم دانش‌آموزان فراگیرند را به‌صورت زیر جمع‌بندی می‌کند.

«فهمیدن در ریاضیات گونه‌های بسیار دارد. شما ممکن است هر لحظه فکر کنید به فهم نهایی فلان مطلب رسیده‌اید، چنان‌که دیگر چیزی نمی‌توان از آن دریافت. اما در ریاضیات فهم نهایی وجود ندارد. هر مسئله‌ای را می‌توان در بافتی هر دم گسترده‌تر و از نقطه‌نظری بالاتر فهمید و در آخر ـ آن‌چه پایین‌ترین می‌نماید، اما شاید بالاترین باشد ـ این که می‌توان آن را از چشم‌انداز یادگیرنده فهمید.»

با این حال باید با جوانب مختلف درک و فهم ریاضی آشنا بود. دسته‌بندی زیر می‌تواند تسهیل‌کننده باشد.

۱ـ درک معنا شناختی یعنی شناخت اطلاعات مندرج در مفاهیم و قضایا.

۲ـ درک منطقی یعنی شناخت پیوندها و رابطهای منطقی قضایایی که به‌صورت حقایق پذیرفته شده شخصی درآمده‌اند.

۳ـ درک شهودی یعنی قانع شدن واقعی به‌درستی یک قضیه و توانایی به‌کارگیری صحیح مفاهیم، بدون توسل به تعاریف رسمی و وارسی مکانیکی.

۴ـ درک ریاضی یعنی آگاهی از مقاصد درونی ابزارهای ریاضی، مثلاً ساده کردن یک عبارت گویا برای تسهیل محاسبه مقدار عددی آن به‌ازای مقادیر مختلف متغیرها، یا توسل به فرضهای غیربدیهی به‌عنوان اصل پذیرفته شده، برای ساده کردن یک موقعیت.

۵ـ درک ریاضی یعنی آگاهی از کاربردپذیری بیرونی بالقوه ریاضیات.

ژان پیاژه (۱۹۸۲–۱۸۹۶) و لوویگوتسکی (۱۹۳۴–۱۸۹۶)

پیاژه یک روان‌شناس بود ولی فیلسوف نبود. او مرارتها و زحمات زیادی در تبیین رشد تفکر انتزاعی در کودکان متحمل شد طوری که در دهه‌های بعد از جنگ جهانی دوم تحولی در روان‌شناسی به‌وجود آورد. کتابهای او تفکر کودکان را دربارهٔ فیزیک، منطق، هندسه، فضا، زمان و شانس و چیزهای دیگر گزارش می‌دهند.

مهم‌ترین ایدهٔ کلی او «مرحله‌ها» بودند : ذهن نمی‌تواند مفاهیم معینی را جذب کند مگر این‌که به مرحله درستی از بلوغ رسیده باشد. این ایده برای آموزش زیان‌آور است. کودکان در یک کلاس درس بایستی در مرحله بلوغ یکسان باشند! تلاش برای آموزش چیزهایی که کودک به مرحله واقعی بلوغ مربوط به آن مفاهیم نرسیده است، بی‌فایده خواهد بود. این دیدگاه به‌وسیله تحقیقات بعدی تأیید نشد.

پیاژه با کمک و همیاری یک منطق‌دان هلندی به‌نام «بِت» کتابی براساس روان‌شناسی منطقی مبانی ریاضیات نوشت. بِت در مورد ماهیت ریاضی این فرض را مسلم گرفته بود که اساس و بنیان ریاضیات منطق و نظریه مجموعه‌هاست، به‌طوری که اکنون تاریخ مصرف آن کتاب گذشته است!

پیاژه و دیودونهٔ بورباکی‌گرا، رویارویی و گفت‌وگوهای خردمندانه‌ای با یکدیگر داشته‌اند. بورباکی‌گراها معتقد بودند که ریاضیات به‌وسیله سه ساختار اساسی بنا شده است.

۱ــ ترتیب (به مفهوم قرار دادن اشیاء یکی پس از دیگری) ؛

۲ــ جبر (مجموعه‌ها با عملیات روی آنها، جمع، ضرب، بازتاب و غیره) ؛

۳ــ توپولوژی (همسایگی‌ها، بسته بودن).

پیاژه ایده‌های ریاضی کودکان را براساس همین سه ساختار مورد بررسی قرار داد. این فلسفه بورباکی ــ پیاژه‌ای «ساختارگرایی» نامیده شد. یعنی ریاضیات مجموعه‌ای از ساختارها بود که به‌وسیله این سه ساختار اساسی و زیربنایی به‌وجود می‌آمدند.

اکنون با تغییر سبکها و روشها، بورباکی‌گرایی و ساختارگرایی از مُد افتاده‌اند و محل اعتنا نیستند. بعدها پیاژه نظریه کتگوری را درنظر گرفت. یکی از کتابهای او تحت نام «مُرفیزمها و کتگوریها» دارای یک مقدمه انتقادی است که به‌وسیله یکی از شاگردانش به‌نام سیمور پپرت نوشته شده است (سیمور پپرت متخصص کامپیوتر و مخترع لوگو بود). درحال

حاضر ساختارگرایی تغییرات اساسی کرده است و پیشرفت زیادی داشته است به‌طوری که همان چیزهای قبلی نیست. استیوارت شاپیرو و میخائیل رزنیک ساختارگرایی را پیشرفت دادند و ریاضیات را به‌عنوان «علم الگوها» تعریف کردند. این تعریف با سؤالات زیادی روبه‌رو شد و تعریف ریاضیات به‌صورت «مطالعه الگوهای ریاضی» درآمد. ولی این تعریف نیز با مشکلات زیادی روبه‌رو شد.

طبق نظر هرش، آن چیزی که در پیاژه جالب بود نظریه مرحله‌ها یا مواجه با دیودونه نبود، بلکه معرفت‌شناسی او جالب است. در معرفت‌شناسی ژنتیک پیاژه مشاهده می‌کنیم که یادگیری کودکان مبتنی بر فعالیت فیزیکی است. از روی سطحی برمی‌دارند، روی سطحی می‌گذارند، حرکت می‌کنند، به‌کار می‌گیرند. فرض بر این است که حرکتهای فیزیکی مربوط به دو تا اثری در ذهن برجای می‌گذارد. این اثر بایستی درک کودک از دو باشد. پیاژه این ایده را تعمیم می‌دهد و فرض می‌کند که مفهوم شمارش و عدد طبیعی از راه فعالیت فیزیکی واقعی به‌دست می‌آید و نه از راه صحبت کردن یا مشاهده دقیق. کودک برمی‌دارد، می‌گذارد، دست‌ورزی می‌کند، به دکمه‌ها، سکه‌ها و سنگریزه‌ها دست می‌زند و به‌وسیله این فعالیتها خواص بنیادین اشیاء گسسته را شناسایی می‌کند. اشیاء ثابت به یک نمایش ذهنی تبدیل می‌شوند. ممکن است به‌نظر برسد که شبیه توضیح ارسطو از عدد و شکل به‌عنوان مصورات است. اما صور (تجرید) ارسطو از راه مشاهده غیرفعال به‌دست می‌آید.

ما سه سیب، سه سنگریزه، سه سکه را می‌بینیم و سپس عدد سه را انتزاع می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که دو دانه با دو دانه دیگر، چهار دانه را به‌وجود می‌آورد، اما نمی‌توانیم «۴ = ۲ + ۲» را ایجاد کنیم مگر آموخته باشیم که عدد دارای یک خاصیت جالب است. یک گربه می‌بیند که دو موش با دو موش دیگر جمع می‌شوند ولی نمی‌تواند عبارت «۴ = ۲ + ۲» را کشف کند. زیرا فعالیتهای فیزیکی همراه با درک از گربه سر نمی‌زند، بلکه یک کودک می‌تواند آن را انجام دهد.

از شمارش به حرکت می‌رویم، همان‌گونه که مفهوم گسسته بودن از بازی کردن با دانه‌ها و مهره‌ها به‌دست می‌آید، مفهوم حرکت سه‌بعدی و فضا از حرکت اجسام سه‌بعدی در فضای سه‌بعدی می‌آید. بازویتان را بالا می‌برید، پایین می‌آورید، سرتان را می‌چرخانید. با انجام این‌گونه اعمال ساختار پیوسته فضای سه‌بعدی را یاد می‌گیرید. بدون این دانش، شما نمی‌توانید راهی برای صبحانه بیابید! این دیدگاه گریز و رهایی از مفهوم افلاطونی عدد و فضا به‌عنوان اشیاء انتزاعی، مستقل از واقعیت فیزیکی و ذهنی است.

در این‌جا هِرش (۱۹۹۸) این سؤال را طرح می‌کند که : اگر تصورات کلی ما از عدد و فضا تأثیرات ذهنی فعالیت کودکان است. درمورد ریاضیات پیشرفته چه می‌توان گفت؟ آنالیز P-adic، کاردینالهای اندازه‌پذیر، مارتینگلهای مربع ـ انتگرال‌پذیر، قضیه خوش‌ترتیبی، فرضهای پیوستار چگونه قابل توجیه هستند؟ ما می‌توانیم از مفهوم صورت‌گرایان رهایی یابیم که می‌گویند : اینها چیزی بیش‌تر از یک تعریف صوری در محتوای یک نظریه صوری معین نیستند. می‌توانیم این حقیقت سخت و قاطع که مفهوم قبل از تعریف صوری به‌دست می‌آید را درک کنیم. برای مثال مفهوم یک گروه مجرد، تأثیر ذهنی و فکری محاسبات، استدلال کردن و کار کردن با گروه‌های ملموس است. این فعالیت و تقلا روی فکر/مغز ما به‌عنوان یک مفهوم شهودی اثر می‌گذارد که با تلاش و کوشش ریاضی‌دانها در تعامل با همکاران و گاهی رقیبان و تاریخ موضوع می‌تواند صورت‌بندی آن را میسر کند.

معرفت‌شناسی پیاژه وابسته به مارکس است. مارکس گفت : دانش ما از علوم طبیعی به‌وسیله تعامل با طبیعت و تولیدات کارگری حاصل می‌شود. هِرش (۱۹۹۸) می‌گوید این نظریه مارکس همانند مکتب بورباکی تاریخ مصرفش گذشته است. باید توجه کنیم که ریشه‌های مفاهیم ریاضی در فعالیتهای فیزیکی پیاژه برخلاف مارکس مربوط به ایدئولوژی نیست.

امروزه در میان روان‌شناسان شناختی علاقه فزاینده‌ای به‌ویگوتسکی وجود دارد. ویگوتسکی یکی از روان‌شناسان روسی در دهه ۲۰ و ۳۰ میلادی بود. عمر کوتاه او موجب شد که نتواند کارهای تحقیقی‌اش را به سامان برساند. اگرچه او مستقیماً چیزی راجع به ریاضی و یادگیری آن ننوشت ولی نظریه یادگیری او مربوط (وابسته) به ریاضی است. چندین نفر از روانشناسان کارهای او را توسعه داده‌اند. ویگوتسکی اصرار می‌ورزید که **یادگیری و فعالیت آگاهانه، اساساً اجتماعی و گروهی است و نه انفرادی.** محتوای یادگیری و تفکر از ساختارهای اجتماعی می‌آید و به‌وسیله یادگیرنده به‌طور فردی شبیه‌سازی و جذب می‌شوند و لذا آزمایشات روان‌شناسی او در چنین فضایی انجام می‌گرفت و نتایج حاصل از آن با کارهای پیاژه تطبیق نمی‌کرد. درصورتی که پیاژه رشد ذهنی فردی را مورد مطالعه و آزمایش قرار می‌داد عامل اجتماع و تعامل اجتماعی و مسائل فرهنگی را درنظر نمی‌گرفت.

مبانی نظری و دیدگاه‌های مختلف در مورد یادگیری ریاضی

آموزش ریاضی در دههٔ ۶۰ میلادی به‌عنوان یک رشته تحصیلی و حوزهٔ معرفتی مستقل به‌طور رسمی موجودیت پیدا کرد. نکتهٔ جالب توجه این است که همانند خود ریاضیات مسائل و مشکلات زندگی واقعی، ضرورت زمان، تحولات اجتماعی فرهنگی و نیازهای واقعی جامعهٔ بشری انگیزه‌های اصلی پیدایش این حوزهٔ معرفتی و سپس تحول و تکوین و توسعهٔ آن بوده است.

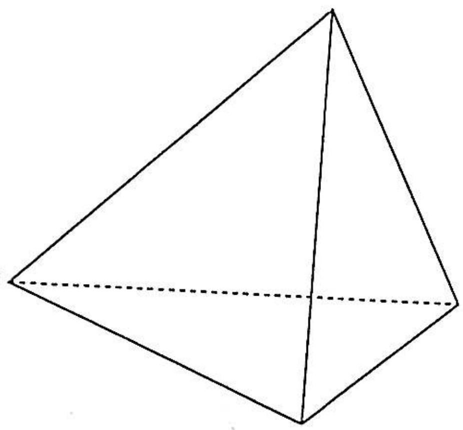
رشد جامعهٔ صنعتی پس از جنگ جهانی دوم و موفقیت شوروی سابق در پرواز قمر مصنوعی «اسپوتنیک» به فضا درسال ۱۹۵۷، نگرانی دنیای غرب را دربی داشت. تحقیقات سریع متخصصان غربی، حاکی از آن بود که یکی از عوامل اصلی موفقیت بلوک شرق در سفر به فضا نظام آموزشی به‌ویژه آموزش ریاضیات بوده است. گروه‌های متعددی شروع به برنامه‌ریزی درس ریاضی کردند و متأثر از نظریات برونر که بر ساختار دانش تأکید داشت، موضوع و محتوای ریاضی با شیوه‌ای همراه با تجرید زود هنگام و افراطی محور این برنامه‌ریزیها واقع شد.

بیانیه هفتاد و پنج ریاضیدان درسال ۱۹۶۲ میلادی در باب برنامه درسی ریاضیات دبیرستان و ابراز نگرانی شدید از عدم‌توجه به مسائل پداگوژیکی و تأکید صرف بر محتوای ریاضی، ضرورت رسمیت یافتن رشتهٔ تحصیلی آموزش ریاضی را آشکار کرد.

به گفتهٔ شونفلد (۱۹۸۷) به‌طور خلاصه آموزش ریاضی یعنی هر آن‌چه که مربوط به آموزش و یاددهی ـ یادگیری ریاضی می‌شود. درواقع، بحثهای اساسی و نیروهای مؤثر در آموزش ریاضی را می‌توان با دو عنوان برنامهٔ درسی ریاضی و چگونگی تدریس و یادگیری ریاضی مطرح نمود که هر دو عنوان، طبیعت ریاضی، محتوا، فرآیند یاددهی ـ یادگیری، تفاوتهای فردی در یادگیری، ماهیت دانش ریاضی و بسیاری مباحث دیگر را دربر می‌گیرد. علاوه بر اینها، تغییر دیدگاه نسبت به خود علم ریاضی و پیدایش فلسفه و روان‌شناسی تربیتی، همگی از نیروهای اساسی در تشکیل نظام و دیسیپلین آموزش ریاضی هستند (۱۹۷۱).

توجه به گسترهٔ عوامل تأثیرگذار در آموزش ریاضی خود حاکی از جامعیت این حوزهٔ معرفتی است و لذا برنامه‌ریزی برنامه درسی ریاضی نیازمند آگاهی از این بخش از دانش بشری و توجه به اصول و رهنمودهای آن است. برای نقد و بررسی و اظهارنظر در مورد هر برنامهٔ درسی ریاضی داشتن تصویری روشن از وجوه مختلف آموزش ریاضی و روابط بین آنها شرط لازم است.

در همین راستا هیگنسون (۱۹۸۰) یک مدل هرم چهاروجهی برای آموزش ریاضی ارائه کرده است. جالب توجه این است که این هرم چهاروجهی و روابط و نحوهٔ اتصال وجوه مختلف آن تمثیل مناسبی برای درک روابط و چگونگی ارتباط مؤلفه‌های چهارگانه این مدل در آموزش ریاضی است. چهار حوزهٔ معرفتی ریاضیات (رأس هرم در بالا)، فلسفه، معرفت‌شناسی، روان‌شناسی و جامعه‌شناسی (سه رأس قاعدهٔ هرم) مؤلفه‌های تشکیل‌دهندهٔ این مدل هستند و تعامل بین هر چهار حوزهٔ معرفتی شرط لازم و کافی برای تعیین ماهیت آموزش ریاضی است.



سؤالهای مهم در رابطهٔ یادگیری ریاضی که عبارتند از : چه ریاضی‌ای؟ چه موقع؟ چه کسی؟ کجا؟ چرا؟ چگونه؟ در این مدل صدق می‌کنند و در حقیقت بُعد ریاضی این مدل به «چه ریاضی‌ای؟» پاسخ می‌دهد و بُعد فلسفی و معرفت‌شناسی به سؤال «چرا؟» و بُعد روان‌شناسی به «چه موقع و چگونه و چه کسی؟» پاسخ می‌دهند و بُعد جامعه‌شناسی به «کجا؟» پاسخ می‌دهد.

مبانی نظری مطرح در مؤلفه‌های اصلی آموزش ریاضی

ریشهٔ تحولات و جهت‌گیریهای برنامهٔ درسی هر موضوع درسی، مبانی نظری حاکم بر آن است. علاوه بر آن، مبانی نظری پاسخگوی سؤالاتِ گوناگونِ تحولات و جهت‌گیریهاست. دگرگونیهای آموزش ریاضی همواره بر پایهٔ تغییرات یا تکامل مبانی نظریِ حاکم بر آموزش ریاضی بوده است.

در بُعد روان‌شناسی آموزش ریاضی نظریهٔ تعامل اجتماعی، نظریهٔ ساخت و سازگرایی و نظریه فراشناخت از مطرح‌ترین و کارآترین و سازگارترین نظریات با محتوای ریاضی هستند که به‌اجمال به معرفی هر یک می‌پردازیم.

نظریهٔ ویگوتسکی در مورد تعامل اجتماعی در دهه ۳۰ میلادی مطرح شده ولی در دهه‌های اخیر مورد توجه و دقت قرار گرفت. ویگوتسکی معتقد بود که تعامل اجتماعی باعث افزایش توانایی یادگیرنده می‌شود و می‌تواند مرحلهٔ رشد ذهنی را جلو بیاندازد. درواقع ویگوتسکی با قبول مراحل رشد ذهنی پیاژه، برخلاف او، این مراحل را وابسته به سن نمی‌دانست. نقش عوامل اجتماعی فرهنگی را در افزایش رشد بسیار مؤثر می‌دید. این دیدگاه توجیه نظری کار در گروههای کوچک در کلاسهای درس ریاضی شد و در این زمینه تحقیقات زیادی انجام گرفت.

ویگوتسکی چهارچوبی خاص و منسجم برای یادگیری در طول زندگی ارائه کرد که هم برای کودکان و هم برای بزرگسالان کارآست. به‌علاوه در این چهارچوب، ریشه‌های دانش و عمل در قرارگاه‌های اجتماعی ــ فرهنگی ــ تاریخی آنها دیده می‌شود. این چهارچوب تلاش می‌کند تا شناخت و عاطفه را با تمرکز بر معنا و مفهوم (به‌عنوان واحد تجزیه و تحلیل خود) با هم تلفیق کند. از دید ویگوتسکی، کلاس درس محل تأثیرات فرهنگی و اجتماعی است و کسب توانایی و دانش در موقعیتهای چندبُعدی از قبیل کلاس، جنسیت، قومیت، ارتباطات معلم، دانش‌آموز و ویژگیهای فرهنگی از طریق شناخت موقعیت مدار (Situated – cognition) حاصل می‌شود.

یکی از نگرشهای مطرح که کارهای اصولی زیادی در زمینهٔ تحقق آن در کلاس درس واقعی ریاضی و برنامهٔ درسی ریاضی انجام گرفته، نظریه ساخت و سازگرایی است. این دیدگاه منبعث از افکار و نظریات پیاژه است که توسط دیگران مراحل تکامل خود را طی می‌کند. پیاژه معتقد است ساختهای شناختی فقط زمانی توسعه می‌یابد که دانش‌آموز تجارب یادگیری خود را بنا نهد. یادگیری باید خود انگیخته باشد. نقش شاگرد در تجربهٔ یادگیری باید نقشی فعال و خودیاب بوده و تجارب نیز خود باید استقرایی باشند. علاوه بر این او اعتقاد داشت که به‌خصوص دانش منطقی و اجتماعی از کودکان دیگر (نسبت به بزرگسالان) بهتر یاد گرفته می‌شوند و دانش‌آموزان خود منبعی از انگیزش و اطلاعات را به شکل زبان‌شناختی که با ساخت‌شناختی یکدیگر وفاق دارد، فراهم می‌سازند. در عین حال گروه هم‌سال می‌توانند منبع موثقی برای نامتعادل‌سازی باشد.

نتایج حاصل از تحقیقات پیاژه که مواردی از آن اشاره رفت وی را رهنمون ساخت تا اندیشه‌های اولیه ساختن دانش با مشارکت دانش‌آموز به‌عنوان محور یادگیری شکل بگیرد طوری که در دو دهه اخیر محمل تحقیقات و پژوهش واقع گشت و نظریه افراطی ساخت‌گرایی رادیکال (Radical Cons) مطرح گردید و این گفته را تقویت کرد که «چیزی را نمی‌توان دانست مگر این‌که بتوان آن را ساخت (به‌وجود آورد)» گِلاسرفلد معتقد است که بیش‌تر از آن‌که یک نظریه باشد یک «مُدل یادگیری» است که می‌تواند مؤثر واقع گردد. در همین راستا کارهای زیادی برای عملیاتی کردن این دیدگاه در تدریس

ریاضی انجام گرفته است و اصول راهنمایی برای تدریس ریاضی ارائه می‌کند. مهم‌ترین این اصول به شرح زیر هستند :

ـ عدم به‌کارگیری گروه‌های ریاضی متجانس و یکدست در کلاس ؛

ـ تمرکز بر فکر کردن به‌جای ترغیب به ارائه پاسخ مورد انتظار ؛

ـ فرصت دادن برای فکر کردن ؛

ـ انتظار از دانش‌آموز برای توضیح دادن افکار و پاسخ‌هایشان و قضاوت کردن درباره آنها.

همان‌گونه که از توصیه‌ها ملاحظه می‌گردد همخوانی فراوانی بین دیدگاه ویگوتسکی، نظریه آموزش از طریق حل مسئله که در ادامه به آن می‌پردازیم، دیدگاه پیاژه وجود دارد.

نظریه فراشناخت که در حیطه روان‌شناسی رشد و در رابطه با عملکرد حافظه به بحث می‌پردازد و به تبیین آن می‌پردازد از جمله نظریه‌های مطرح در آموزش ریاضی است به‌ویژه در نظریه آموزش از طریق حل مسئله کاملاً مرتبط است و توصیه‌های آن هماهنگی کم‌نظیری با آموزش ریاضی داشته است. به همین سبب لازم است نگاهی اجمالی بر آن بیندازیم.

فراشناخت یا «شناخت درباره شناخت» اولین بار درسال ۱۹۷۶ توسط فلاول به‌کار برده شد و او این واژه را برای آگاهی فرد از فعالیتهای شناختی خود به‌کار برد. تحقیقات مختلف به‌خصوص در مورد حل مسئله ریاضی نشان داده است که عوامل مهم دیگری به‌جز ذخایر دانشی، ذخایر استراتژیهای حل مسئله در فرایند حل مسئله مؤثر است. کسانی که در فعالیت حل مسئله توانایی، کنترل فرایند فکری خویش، مدیریت و تنظیم فعالیتهای فکری خویش را دارند، موفق‌ترند و مسئله حل‌کنهای ماهر اکثر مواقع چنین تواناییهایی را بروز می‌دهند. درصورتی که مسئله حل‌کنهای ضعیف چنین تواناییها را بروز نمی‌دهند. بر همین اساس فلاول فراشناخت را دانش فرد در مورد فرایندهای شناختی خود و تولیدات و هر چیز مربوط به آن توصیف می‌کند.

فعالیتهایی چون سازماندهی، خودتنظیمی، کنترل مستمر، مدیریت فرایند فکری خویش هنگام حل مسئله همگی از جمله دانش فراشناختی است که نقش بسیار مهمی در یادگیری ریاضی و حل مسئله دارد. اگرچه نظریه فراشناخت، خاص فعالیتهای شناختی انسان در رابطه با ریاضی نیست ولی کاملاً با ماهیت یادگیری ریاضی هماهنگی دارد، به‌ویژه با نظریه آموزش از طریق حل مسئله.

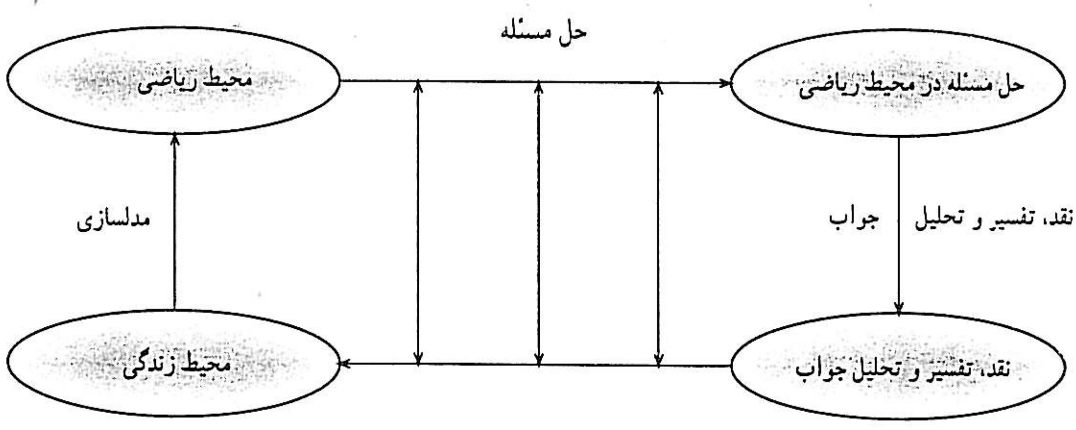
همهٔ دیدگاه‌های کلی در مورد آموزش ریاضی تاکنون مورد بحث قرار گرفت. از محیط علمی علوم‌تربیتی و توسط متخصصین آموزش، نظریه‌های یادگیری و روان‌شناسی مطرح گردیدند ولی در محیط ریاضی و ریاضیدانان نیز تلاشها و فعالیتهای مختلفی انجام گرفته است که به هیچ‌وجه کم‌اهمیت‌تر از دیدگاه‌های مطرح شده نمی‌باشد. به‌علاوه نقش کاملاً محوری‌تر دارند. اگرچه دکارت، لایبنیتز و

دیگر ریاضیدانان به موضوع آموزش ریاضی توجه کرده‌اند ولی کارهای پولیا در بین ریاضیدانان منحصر به‌فرد بوده است و گویی در قلب جریان یاددهی ــ یادگیری ریاضی قرار دارد.

پولیا تجربیات آموزشی خود در تدریس ریاضی را محور دیدگاه آموزشی خود معرفی می‌کند و مهم‌ترین پیامش این است که «هنر حل مسئله آموزش دادنی و یادگرفتنی است» اگرچه دیگر ریاضیدانان چنین اعتقادی نداشتند. وی با ارائه چهارچوبی برای حل مسئله روی چهار گام فهمیدن مسئله، طرح نقشه، اجرای طرح، بازگشت به عقب یا بازبینی تأکید می‌کند و عوامل مؤثر در موفقیت به‌کارگیری این چهارچوب و نهایتاً حل مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهد و به‌دنبال آن، استراتژیها و راه‌یابیهای مختلف در شرایط گوناگون برای حل مسئله دسته‌بندی و ارائه می‌کند.

تحقیقات بعدی توسط شونفلد و دیگران به تعمیمی از مدل پولیا منجر شد و گام دیگری به‌نام کنترل به مدل پولیا افزوده شد. به‌علاوه پژوهشها نشان داد در شرایط یکسان ذخائر دانشی، ذخائر استراتژیها و راه‌یابها و عملکرد مسئله حل‌کنها یکسان نیست و فعالیتهای فراشناختی و از جمله توانایی صدا زدن به موقع استراتژیها، باورها و انگیزه‌ها و علائق همگی در حل مسئله مؤثرند.

در دهه هشتاد میلادی «حل مسئله» به‌عنوان قلب آموزش ریاضی لقب گرفت و مدل منسجمی برای آموزش ریاضی ارائه گردید که امروز «آموزش از طریق حل مسئله» نامیده می‌شود. نمودار زیر شمایی کلی از این مدل ارائه می‌دهد.



این نظریه و مُدل عملیاتی آن ضمن اینکه مُدل پولیا را دربر دارد بر مراحل مُدلسازی و تجزیه و تحلیل پاسخ، حرکت از محیط زندگی واقعی و پیرامونی و نهایتاً پایان در محیط زندگی تأکید دارد. اگرچه این نظریه هنوز عملیاتی نشده است ولی راهکارهایی ارائه گردیده است.

از ویژگیهای دیگر این نظریه استفاده و به‌کارگیری دیدگاه‌های مطرح شده از حوزه علوم تربیتی است که در ابتدا معرفی شد.

هدفهای آموزش ریاضی

قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران بر پرورش حس «ابتکار» و «تتبع» و «احیای معارف و سنتهای ملی» تکیه دارد و برای رسیدن به خودکفایی و خوداتکایی در همهٔ زمینه‌ها، استفاده از علوم و فنون جدید را ضروری دانسته است. بی‌شک آموزش ریاضی مناسب به نوبهٔ خود کمک شایانی به تحقق این آرمانها می‌نماید.

هر کس در زندگی روزمره به گونه‌های مختلف با محاسبه، اندازه‌گیری، حدس و تخمین کمیتها، پیش‌بینی و برنامه‌ریزی و درنتیجه با ریاضیات سروکار دارد و از سویی دیگر برای تشخیص حق از باطل به نظم فکری و درست اندیشیدن، درست قضاوت کردن و استدلال کردن که خود جنبهٔ دیگری از ریاضیات است، نیاز دارد. عصر انفجار اطلاعات و نیاز به نقادی و تحلیل داده‌ها و اطلاعات عظیم و توانایی تصمیم‌سازی موجب می‌شود که از ریاضیات به‌عنوان شالودهٔ اصلی استفاده کنیم و سعی در ایجاد این تواناییها کنیم. در روشهای سنتی اسلامی نیز آموزش ریاضیات نه‌تنها برای برآوردن نیازهای عبادی و مادی روزمره (تعیین اوقات شرعی، تعیین ارث، خمس، زکات، معاملات و...) بلکه برای نظم دادن به فکر و پرورش قوهٔ استدلال و ابتکار و نقادی موردنظر بوده است. لذا در دوره‌های مختلف آموزشی به این سنتها باید توجه شود وانگهی نقش بنیادی ریاضیات در پیشرفت علوم و فنون مورد پذیرش همگان است و امروزه فراگیری هر علم و فنی بدون فراگیری ریاضیات ویژهٔ آن علم و فن امکان‌پذیر نیست.

اهداف آموزش ریاضی در دو سطح آموزش دورهٔ عمومی که شامل دوره‌های ابتدایی و راهنمایی است و آموزش متوسطه که شامل دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی است، می‌باشد. هدفهای آموزش ریاضی در دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی به شرح ذیل می‌باشد:

ریاضیات یکی از دستاوردهای ارزشمند تمدن بشر است که بنا بر ویژگی «کاربردپذیری» آن ابزار اساسی شناخت واقعیت عینی است. علاوه بر آن ریاضیات یکی از ابزارهای تربیت فکر است. نقش ریاضیات در صورت‌بندی نظم عالم و شناخت طبیعت و تربیت فکر از زمینه‌های اساسی تدوین اهداف آموزش ریاضی است.

از سویی دیگر، جنبه‌های فرهنگی آموزش ریاضیات و نقش آن در آینده‌سازی فرد و جامعه را نیز بایستی درنظر داشت. سنین نوجوانی یکی از مراحل حساس و مهم از مراحل رشد ذهنی است. در این دوران نوجوان می‌تواند تفکر قیاسی را به‌کار گیرد و دربارهٔ آینده و مطالب مجرد و ذهنی فکر

کند. نوجوان می‌تواند راههای مختلف حل مسئله را تصور کند و می‌تواند به یک مسئله از نقطه‌نظرهای مختلف نگاه کند. او می‌تواند دربارهٔ مفاهیم مجردی مانند زمان فضا بیاندیشد. بر این اساس، محتوای آموزش ریاضی باید با هدف رشد هرچه بیش‌تر قدرت استنتاج و یادگیری ساختارهای ریاضی و مبتنی بر تقویت قوای فراگیری شهودی دانش‌آموز تدوین شود. در همین راستا اهداف آموزش ریاضی را در آموزش و پرورش می‌توان به چهار مقوله تقسیم‌بندی کرد:

۱ــ نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و صورت‌بندی نظم عالم

۲ــ نقش ریاضیات در تأمین آیندهٔ فرد و جامعه

۳ــ نقش ریاضیات در تربیت فکر

۴ــ نقش ریاضیات در تربیت فرهنگی

در همین راستا می‌توان تقسیم‌بندی جزئی‌تر بر مبنای سه حیطه دانش، مهارت و نگرش را برای اهداف ریاضی در دوره متوسطه به‌صورت زیر ارائه کرد:

الف ــ حیطهٔ دانش

ــ آشنایی با ساختارهایی از جهان عینی که در تجربیات دانش‌آموز ظاهر می‌شود؛

ــ یادگیری ریاضیات مورد نیاز برای مطالعهٔ سایر علوم؛

ــ یادگیری تکنیکهای لازم و فرآیندهای استدلال و استنتاج برای مدل‌سازی مسائل دنیای واقعی و روزمره و حل این‌گونه مسائل به همراه تجزیه و تحلیل مدلها و پدیده‌های طبیعی؛

ــ آشنایی با نقش ریاضیات در صنعت و تکنولوژی، کشاورزی، علوم‌انسانی و علوم دیگر؛

ــ آمادگی دانش‌آموز برای تحصیلات بعدی (از بُعد دانش موردنیاز)؛

ــ آمادگی دانش‌آموز برای ورود به بازار کار (از بُعد دانش موردنیاز)؛

ــ آشنایی مقدماتی با تاریخ ریاضی و شناخت‌شناسی به‌ویژه تاریخ ریاضی ایران؛

ــ آشنایی مقدماتی با زیباشناختی ریاضیات؛

ــ آشنایی مقدماتی با زبان و نماد ریاضی.

ب ــ حیطهٔ مهارت

ــ آمادگی دانش‌آموز برای تحصیلات بعدی (از بُعد مهارتهای یادگیری مستدل، پژوهش و به‌کارگیری ریاضی)؛

ــ آمادگی دانش‌آموز برای ورود به بازار کار (از بُعد به‌کارگیری ریاضی در محیط کار، زندگی

روزمره و استفادهٔ روان از ریاضی برای انجام محاسبات ریاضی) ؛

ـ توانایی و مهارت حل مسئله، مدل‌سازی پدیده‌ها و مسائل واقعی ؛

ـ توانایی و مهارت به‌کارگیری روند استقرایی، جمع‌آوری داده‌ها، تنظیم داده‌ها و یافتن نظم و الگویی در آنها و سپس حدسیه‌سازی علمی ؛

ـ توانایی استدلال برای رد یا پذیرش حدسیه‌ها ؛

ـ توانایی و مهارت تعمیم و تجرید از یک وضعیت محسوس و ملموس ؛

ـ مهارت ریاضی‌گونه فکر کردن ؛

ـ پرورش قوهٔ ارائه یک فکر ؛

ـ پرورش مهارتهای زبانی (خواندن، نوشتن، گوش دادن و بیان کردن) ؛

ـ پرورش مهارتهای اطلاع‌رسانی (تبادل اطلاعات به کمک جدول، تصویر، نمودار و به‌کارگیری فن‌آوریهای جدید) ؛

ـ پرورش دقت و عادت به نظم فکری و نقد و نقادی‌گری، انتخاب‌گری براساس اصول منطقی.

پ ـ حیطه نگرش

ـ پرورش اعتماد به نفس در به‌کار بردن دانسته‌های ریاضی برای حل مسئله ؛

ـ پرورش روحیهٔ علمی و قدرشناسی از علم و علم‌اندوزی ؛

ـ علاقه به تاریخ ریاضیات، خود ریاضیات و مطالعه و تحقیق در آنها ؛

ـ پرورش ذوق، ابتکار و حس زیبایی‌شناسی ؛

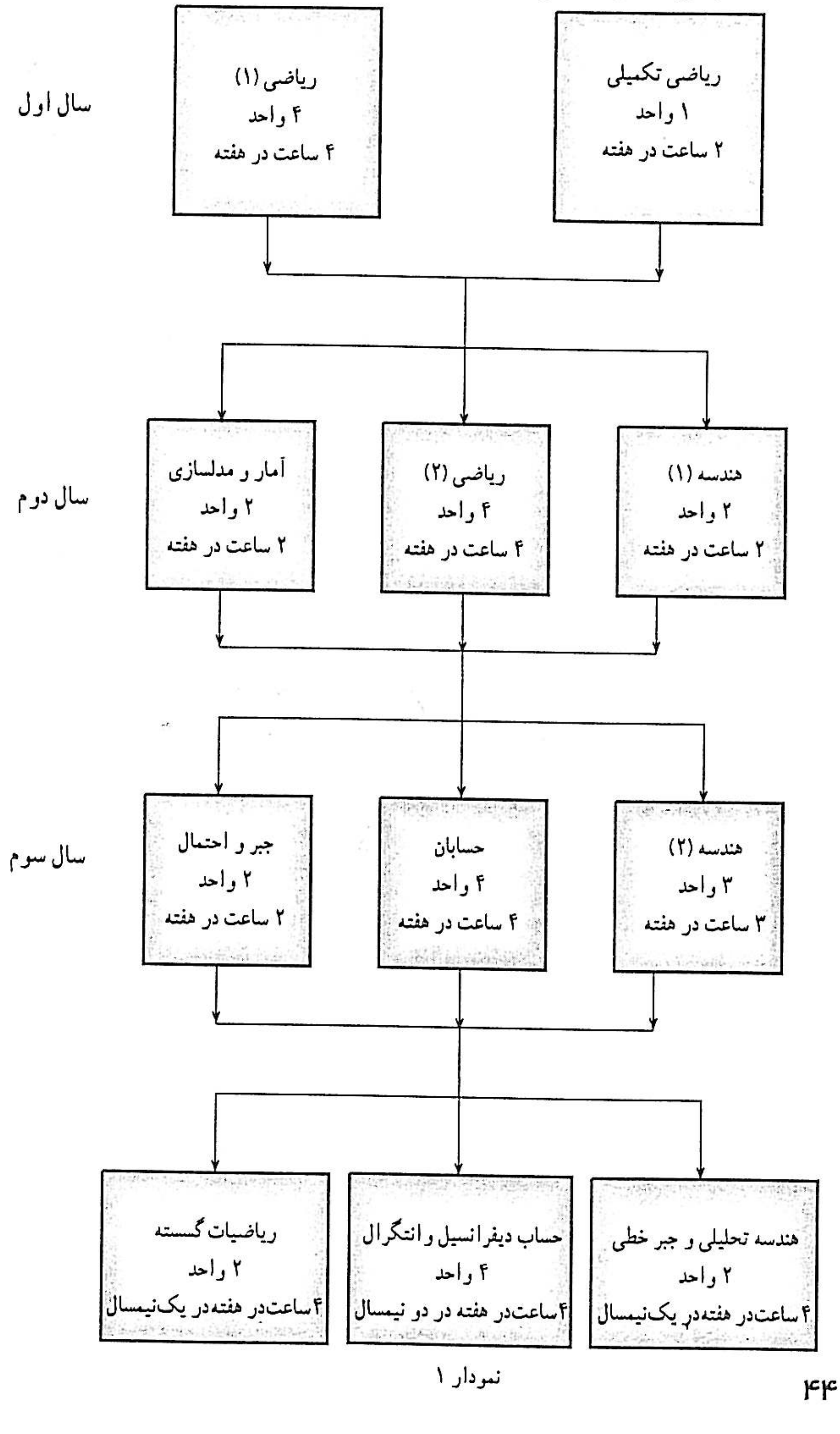
ـ پرورش روحیهٔ حفظ و نگهداری و استفادهٔ منطقی و بهینه از محیط‌زیست، منابع و امکانات ؛

ـ پرورش روحیه و علاقه به تعاون ؛

ـ پرورش احترام به نظم و قانون و مسئولیت‌پذیری فردی و اجتماعی ؛

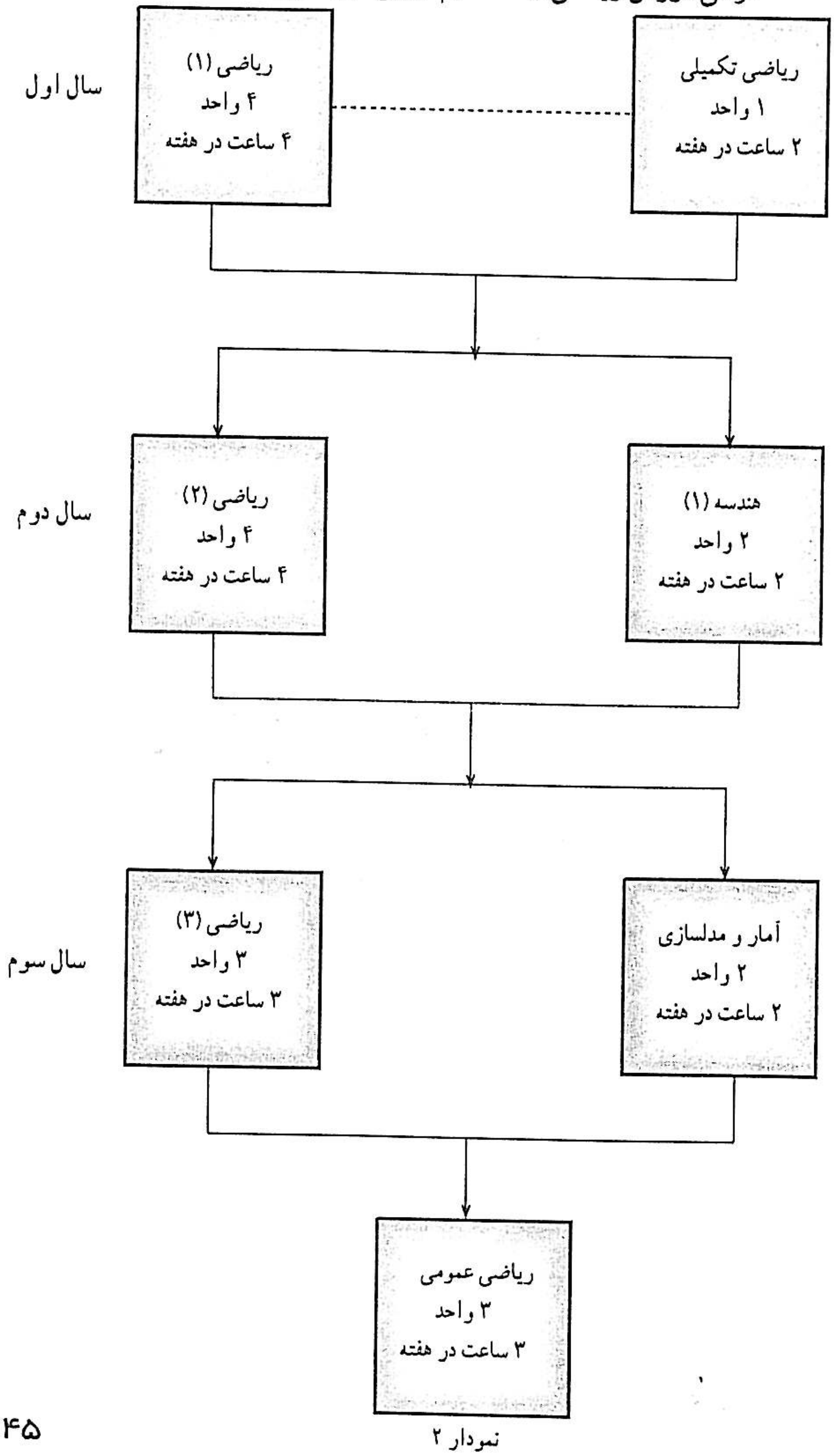
ـ ایجاد و پرورش روحیهٔ مشارکت و جمعی فکر کردن و برقراری ارتباط با دیگران.

توالی دروس ریاضی رشته ریاضی ـ فیزیک دوره دبیرستان



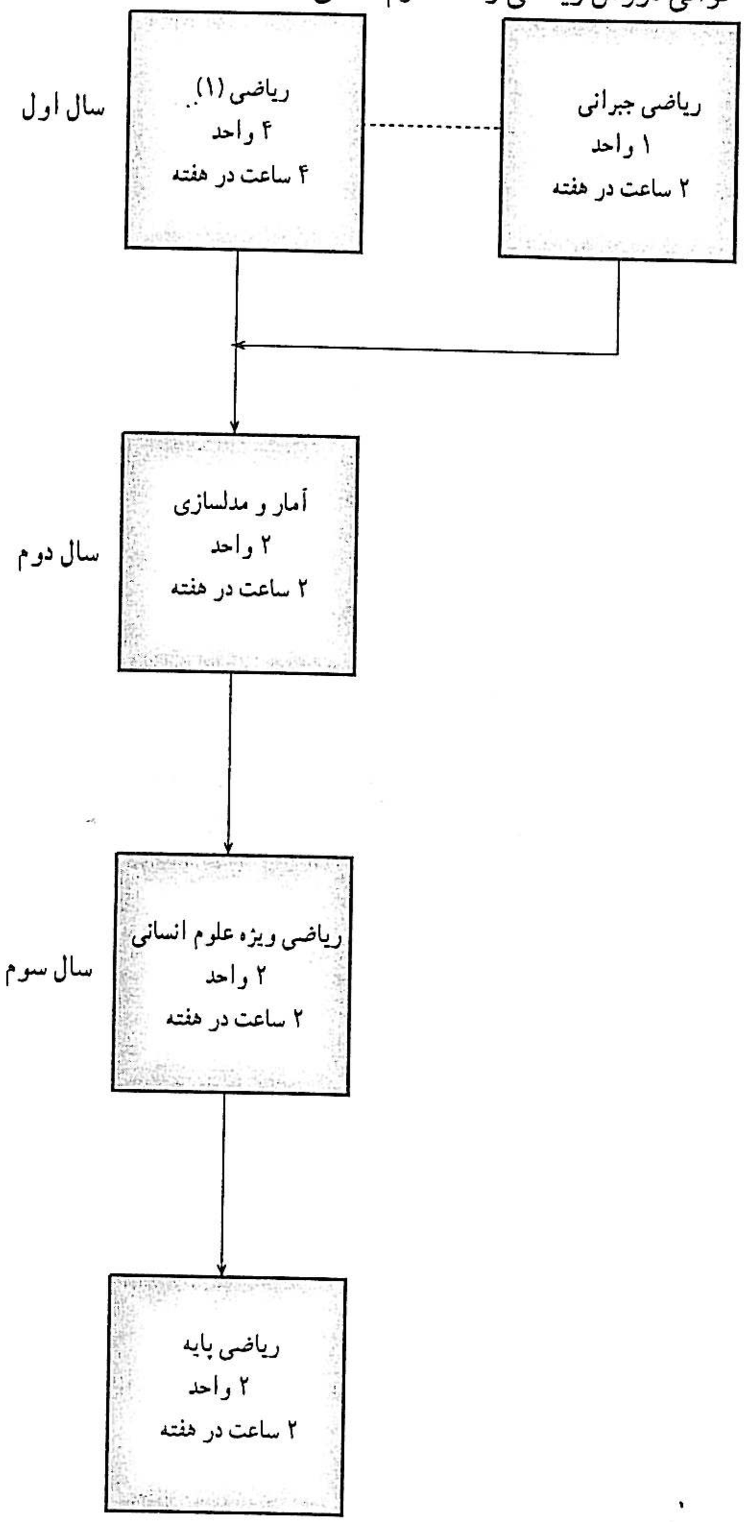
نمودار ۱

توالی دروس ریاضی رشته علوم‌تجربی دوره دبیرستان



نمودار ۲

توالی دروس ریاضی رشته علوم انسانی دوره دبیرستان



نمودار ۳

اهداف کلی آموزش جبر

مفاهیم عدد، عمل و محاسبه دارای جایگاه ویژه‌ای در برنامهٔ درسی هستند. دانش‌آموزان از اولین سال ورودشان به‌مدرسه با این مفاهیم آشنا می‌شوند و در طول تحصیل شهود خوبی نسبت به آنها و ارتباطاتشان پیدا کرده و از طریق تجربیات هدف‌دار در جهت توسعهٔ درک این مفاهیم هدایت می‌شوند.

دانش‌آموزان با کسب مهارتهای موجود در درک مفاهیم عدد و عملیات با آنها به استفاده‌کننده‌های شایستهٔ ریاضی ارتقاء می‌یابند.

اگرچه در مقطع متوسطه، مباحث دیگر به‌نظر برجسته‌تر از اعداد جلوه‌گر می‌شوند ولی با این وجود در این مقطع است که دانش‌آموزان به تعمیق درک‌شان از ویژگیهای اعدادی که با آنها آشنا شده‌اند، خواهند پرداخت و دستگاه اعداد را از منظری کلی‌تر خواهند دید. در این مرحله، آشنایی با نماد علمی و عملیات تابعی مانند به توان رساندن، قدرمطلق و یافتن ریشهٔ nام و نمایش ماتریسی امکان‌پذیر شده و دستگاه اعداد مختلط به ذخایر دانشی دانش‌آموزان افزوده می‌شود و با بررسی دستگاه‌های جدید مشاهده می‌کنند که همهٔ ویژگیهای اعداد حقیقی الزاماً در توسیع آن ثابت نمی‌مانند.

برنامه‌های درسی، دربر گیرندهٔ سیر تکاملی از حساب به‌جبر است. اخیراً تحقیقات متعددی در خصوص بررسی تفاوتهای بین تفکر حسابی و تفکر جبری انجام شده است. تغییراتی که در یادگیرنده باید ایجاد شود برای دست یافتن به زبان جبری می‌تواند به‌عنوان نقطهٔ گذری باشد که این دو نوع تفکر را از هم جدا می‌کند. مشکلاتی که در انتقال از حساب به جبر ظاهر می‌شود، به چگونگی پی گرفتن برنامهٔ درسی جبر بستگی پیدا می‌کند که آیا جبر به‌عنوان توسعه طبیعی حساب از سالهای آموزش ابتدایی درنظر گرفته می‌شود یا به‌عنوان یک درس مجزا که برای دانش‌آموزان بزرگ‌تر ارائه می‌شود؟! مطالعهٔ الگوها، تابعها و جبر باید به‌صورتی غیررسمی از مقاطع ابتدایی شروع و در طول تحصیل توسعه یابد. تجربیات اولیهٔ الگوها، تابع و جبری می‌تواند پایهٔ اصلی درک را برای تمرکز بیش‌تر دانش‌آموزان روی این حوزه‌ها در دوره‌های راهنمایی و متوسطه مهیا کند.

الگوها، تابعها و جبر شامل استفادهٔ نظام‌وار از نمادها، مشخصه‌های جبری دستگاههای ریاضی، مدلسازی پدیده‌ها و بررسی ریاضی‌وار تغییرات است که ارتباط نزدیک به اعداد، عملیات و هندسه دارند.

جبر را می‌توان به‌عنوان زبان اصلی بیان ریاضیات دانست. ریشهٔ جبر در مطالعهٔ حل معادلات بوده است که در چندین جهت شامل مطالعهٔ توابع، استدلال در مورد اشیاء مجرد، تعمیمها و مرکزیت

نمادهای سمبلیک توسعه یافته است. برای آموزش مؤثر، همهٔ این توسعه‌ها باید در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای بازتاب داشته باشد. از این‌رو، اهداف کلی آموزش حساب و جبر را در مقطع متوسطه به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

اهداف کلی (حساب و جبر)

۱ــ تعمیق درک ویژگیهای اعداد، ارتباط میان اعداد و دستگاههای اعداد از دیدگاه کلی‌تر.

۲ــ تعمیق درک معنای اعمال و چگونگی ارتباط آنها و پی‌ریزی ارتباطهای بین اعمال و مقولات دیگر.

۳ــ شناسایی و درک الگوها و ارتباطهای تابعی در ریاضی و دنیای واقعی و توانایی تعمیم آنها.

۴ــتوسعهٔ توانایی تفکر تجریدی (تفکر انتزاعی) و به‌کارگیری نمادها و نمودارها برای نمایش و تحلیل موقعیتهای واقعی و ساختمانهای ریاضی.

۵ــ ایجاد توانایی استفاده از مدلهای ریاضی و تحلیل تغییرات در زمینه‌های واقعی و مجرد.

اهداف کلی	اهداف جزئی
۱ــ تعمیق درک ویژگیهای اعداد، ارتباط میان اعداد و دستگاههای اعداد از دیدگاه کلی‌تر.	ــ تعمیق درک اعداد حقیقی و ویژگیهای آنها ــ مقایسه و مقابلهٔ ویژگیهای اعداد و دستگاه‌های اعداد ــ درک اعداد مختلط به‌عنوان ابر مجموعهٔ اعداد حقیقی و دستگاهی که شامل حل معادلاتی است که روی اعداد حقیقی حل‌پذیر نیستند. ــ درک نمایش اعداد و کمیتها، شامل نمایشهای ماتریسی برای منظم کردن کمیتها ــ آشنایی با دنباله‌ها و سریهای متناهی، شامل مثالهای حسابی و هندسی و توسعهٔ یک درک غیررسمی از برخی دنباله‌های نامتناهی و سریها خصوصاً سری هندسی
۲ــ تعمیق درک معنای اعمال و چگونگی ارتباط آنها و پی‌ریزی ارتباطهای بین اعمال و مقولات دیگر.	ــ درک رابطهٔ عکس بین اعمال مانند ضرب و تقسیم ــ توسعهٔ درک معنا و نمایش اعمال روی بردارها و ماتریسها و به‌کارگیری این اعمال در حل دستگاه معادلات خطی ــ کسب مهارت در انجام روان اعمال روی اعداد حقیقی، اعداد مختلط، بردارها و ماتریسها ــ درک جایگشتها و ترکیبات به‌عنوان تکنیکهای شمارش ــ توسعهٔ توانایی تمیز قائل شدن بین تخمین و تقریب و استفادهٔ مناسب از هر یک از آنها
۳ــ شناسایی و درک الگوها و ارتباطهای تابعی در ریاضی و دنیای واقعی و توانایی تعمیم آنها.	ــ تشخیص صورتهای معادل یک عبارت، معادله، تابع یا رابطه ــ آشنا بودن با کلاس تابعها شامل تابعهای خطی، درجه ۲، توان، چندجمله‌ای، گویا، قدرمطلق، نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی، پله‌ای، درک توابع چند ضابطه‌ای و ویژگیهای آنها، تجزیه و تحلیل تأثیرات تغییر پارامتر و توصیف رفتارهای موضعی و کلی. ــ انتخاب نمایش مناسب (عددی، گرافیکی، شفاهی و نمادین) برای تابعها و رابطه‌های موقعیتهای کمی ــ استدلال (از روی نمودارها، جدولها و فرمولها) در مورد رفتار تابعها
۴ــ توسعهٔ فکر تجریدی و به‌کارگیری نمادها برای نمایش و تحلیل موقعیتهای واقعی و ساختمانهای ریاضی.	ــ درک جبر به‌عنوان حساب مجرد شده ــ نمایش موقعیتهایی که شامل کمیتهای متغیر هستند. با عبارتها، معادلات، نامعادلات و دستگاه معادلات ــ کسب مهارت در توضیح، مقایسه و مقابلهٔ ویژگیهای اشیاء و اعمال تعریف شده در دستگاه‌های مختلف (برای مثال اعداد گویا، چندجمله‌ایها، ماتریسها و توابع)
۵ــ ایجاد توانایی استفاده از مدلهای ریاضی و تحلیل تغییرات در زمینه‌های واقعی و مجرد.	ــ مدلسازی پدیده‌ها با توابع مختلف مانند : توابع خطی، درجه ۲، توانی، گویا، مثلثاتی و از طریق رابطه‌های بازگشتی ــ درک این که نوع خاصی تابع می‌تواند مدلساز بسیاری از موقعیتهای (پدیده‌های) متفاوت باشد. ــ تعریف و تعبیر نرخ تغییرات هم به‌صورت عددی و هم براساس نمودار برای توابعی که نشان‌دهندهٔ موقعیتهای متفاوت هستند و به‌صورت نمادین. ــ درک و توانایی تعیین و تفسیر مقادیر اکسترمم موضعی و رفتار نمادین تابعها در زمینه‌های مختلف

اهداف جزئی آموزش ریاضی در سال اول دوره متوسطه

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
اعـــــــــداد	ـ تعمیق درک اعداد طبیعی ـ آشنایی با الگوهای عددی مختلف (و چند زیرمجموعه خاص اعداد طبیعی) ـ آشنایی با اعداد صحیح (در بستر تاریخ) ـ درک اعداد منفی (از طریق مثالهای فیزیکی) ـ تثبیت درک ترتیب اعمال جبری ـ آشنایی با کاربرد ماشین‌حساب در انجام محاسبات ـ آشنایی با قضیه اساسی حساب ـ درک مفهوم قدرمطلق یک عدد (به‌عنوان فاصله از مبدأ) ـ درک اعداد گویا به‌صورت $\frac{m}{n}$ که m و n دو عدد صحیح با $n \neq 0$ باشند. ـ آشنایی با ویژگیهای اعداد کسری ـ تثبیت درک ساده کردن کسرها ـ آشنایی با بسط اعشاری اعداد گویا ـ آشنایی با دیدگاه تاریخی فیثاغورسیان در مورد این‌که همهٔ اعداد گویا نیستند. ـ درک وجود اعداد گنگ (قطر مربع واحد) ـ آشنایی با تاریخچهٔ ریشهٔ اعداد در فرهنگ اسلامی ـ آشنایی با اعداد اصم ـ آشنایی با توسیع اعداد گویا به اعداد حقیقی ـ آشنایی با ویژگیهای اعمال جبری در اعداد حقیقی ـ آشنایی با قانون حذف در اعداد حقیقی ـ آشنایی با رابطهٔ ترتیب در اعداد حقیقی	ـ کسب مهارت در نمایش اعداد طبیعی به‌صورت حاصلضرب عوامل اول آن ـ تثبیت مهارت در انجام عملیات جبری با اعداد صحیح ـ کسب مهارت در نمایش اعداد گویا به‌صورت بسط اعشاری و بالعکس ـ تثبیت مهارت در انجام عملیات جبری عبارتهای عددی گویا ـ کسب مهارت در جایگذاری مقادیر در فرمولها و محاسبهٔ نتیجه ـ کسب مهارت در انجام محاسبات به‌وسیلهٔ ماشین‌حساب	ـ علاقه‌مندی یادگیرنده به مباحث تاریخ ریاضیات ـ مهم شمردن اعداد و عملیات جبری اعداد به‌عنوان زبانی برای درک و تحلیل مسائل دنیای واقعی (توجه به آموزش و جایگاه) ـ توجه به ارزش و جایگاه تکنولوژی به‌عنوان تسهیل‌کنندهٔ یادگیری و به‌کارگیری ریاضی

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
توانهای گویا و رادیکالها	ــ آشنایی با توانهای طبیعی ــ آشنایی با توان منفی ــ آشنایی با توان صفر ــ آشنایی با قوانین توانها در ضرب و تقسیم و جمع و تفریق ــ آشنایی با نماد علمی ــ آشنایی با توانهای کسری ــ آشنایی با ریشه‌های مختلف اعداد ــ آشنایی با رادیکال به‌عنوان ریشهٔ دوم مثبت ــ آشنایی با رادیکالهای ساده و مرکب ــ درک عملیات جبری با اعداد رادیکالی ــ درک مفهوم قدرمطلق به‌عنوان ریشهٔ مثبت x^2 ــ آشنایی با شیوهٔ گرد کردن اعداد ــ درک چگونگی انجام جمع و ضرب اعداد گرد شده ــ آشنایی با کاربرد ماشین‌حساب در انجام محاسبات با اعداد توان‌دار و رادیکالی	ــ کسب مهارت در انجام عملیات جبری با اعداد توان‌دار ــ کسب مهارت در نمایش اعداد در قالب نماد علیم ــ کسب مهارت در انجام عملیات جبری با اعداد رادیکالی ــ کسب مهارت در گویا کردن مخرج عبارتهای رادیکالی (با استفاده از این نکته که $(\sqrt[n]{a})^n = a$) ــ کسب مهارت در گرد کردن اعداد ــ کسب مهارت در انجام عملیات جبری با اعداد گرد شده ــ توانایی به‌کارگیری ماشین‌حساب در انجام محاسبات با اعداد توان‌دار و رادیکالی.	ــ دقت و توجه به اهمیت نماد علمی به‌عنوان تسهیل‌کنندهٔ محاسبات در علوم مختلف (خصوصاً فیزیک و شیمی)

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
چند جمله‌ایها	ـ درک مفهوم ثابت و متغیر ـ آشنایی با یک جمله‌ایها ـ آشنایی با مفهوم جمع و تفریق یک جمله‌ایها ـ آشنایی با کاربرد و محل ظهور جمع و تفریق یک جمله‌ایها در مسائل واقعی ـ آشنایی با مفهوم ضرب و تقسیم یک جمله‌ایها ـ آشنایی با کاربرد و محل ظهور ضرب و تقسیم یک جمله‌ایها در مسائل واقعی ـ آشنایی با چند جمله‌ایها ـ آشنایی با ضرایب عددی ـ آشنایی با جملات متشابه ـ درک مفاهیم جمع و تفریق چند جمله‌ایها ـ آشنایی با ضرب یک‌جمله‌ای در چندجمله‌ای ـ آشنایی با ضرب چند جمله‌ایها ـ آشنایی با اتحادهای : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ـ درک وجود فاکتور مشترک در یک عبارت جبری ـ آشنایی با تجزیهٔ سه جمله‌ایهای x^2+bx+c (درحالتی که b و c عددهای صحیح باشند و با استفاده از مجموع و حاصلضرب دو عدد) ـ آشنایی با تجزیهٔ سه‌جمله‌ایهای ax^2+bx+c با استفاده از تغییر متغیر $y=ax$ ـ آشنایی با مفهوم حل معادلات درجه ۲ از طریق تجزیهٔ آنها ـ آشنایی با تجزیهٔ a^2-b^2 ـ درک تفاوت بین معادله و اتحاد ـ آشنایی با کاربرد مرتب کردن یا حل یک عبارت جبری برحسب یک متغیر در مسائل واقعی	ـ کسب مهارت در انجام عمیات جبری با یک‌جمله‌ایها ـ کسب مهارت در جایگذاری مقادیر عددی در چندجمله‌ایها ـ کسب مهارت در مدلسازی مسائل واقعی و کلامی در قالب چندجمله‌ایها ـ کسب مهارت در انجام جمع و تفریق چندجمله‌ایها ـ کسب مهارت در انجام ضرب چندجمله‌ایها ـ کسب مهارت در انجام فاکتورگیری از عوامل مشترک ـ کسب مهارت در تجزیهٔ سه‌جمله‌ایها ـ کسب مهارت در حل معادلات درجه ۲ از طریق تجزیهٔ آنها ـ کسب مهارت در تجزیهٔ تفاضل a^2-b^2 ـ کسب مهارت در مرتب کردن دوبارهٔ یک فرمول برحسب یک متغیر خاص	ـ ارزش قائل شدن برای استفاده از حروف و مدلسازی مسائل کلامی ـ توجه به اهمیت و ارزش پارامترهای ثابت و متغیر در ارائه فرمولهای مربوط به علوم مختلف ـ توجه به اهمیت فاکتورگیری در تجزیهٔ عبارات جبری و حل معادلات درجه ۲

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
عبارتهای گویا	ــ آشنایی با عبارتهای گویا (کسری) ــ آشنایی با مفهوم ساده کردن عبارتهای گویا ــ آشنایی با کاربرد ساده کردن عبارتهای گویا در حل مسائل واقعی ــ آشنایی با ضرب و تقسیم عبارتهای گویا ــ آشنایی با جمع و تفریق عبارتهای گویا با مخرج یک‌جمله‌ای ــ آشنایی با حل معادلات یک‌مجهولی شامل عبارتهای گویا	ــ کسب مهارت در ساده کردن عبارتهای گویا ــ کسب مهارت در انجام ضرب و تقسیم عبارتهای گویا ــ کسب مهارت در انجام جمع و تفریق عبارتهای گویا با مخرج یک‌جمله‌ای ــ کسب مهارت در حل معادلات یک مجهولی شامل عبارتهای گویا	

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
دستگاههای مختصات	ـ آشنایی با صفحهٔ مختصات ـ آشنایی با مختصات یک نقطه در صفحه ـ درک نمودار معادلات دو متغیرهٔ درجه اول به‌عنوان خط از طریق نقطه‌یابی ـ آشنایی با معادلهٔ خط ـ درک مفهوم شیب خط ـ آشنایی با روش یافتن شیب خط گذرنده از دو نقطه ـ آشنایی با شرط توازی و تعامد دو خط ـ درک معادلهٔ $Ax + By + C = 0$ به‌عنوان معادلهٔ یک خط	ـ کسب مهارت در یافتن مختصات یک نقطه در صفحهٔ مختصات ـ کسب مهارت در مشخص نمودن یک نقطه در صفحهٔ مختصات از روی مختصات آن ـ کسب مهارت در تعیین فاصلهٔ دو نقطه ـ کسب مهارت در تعیین مختصات وسط دو نقطه ـ کسب مهارت در یافتن نقاطی که در معادلات دو متغیرهٔ درجه اول صدق می‌کند. ـ کسب مهارت در یافتن شیب خط گذرنده از دو نقطه ـ کسب مهارت در تعیین وضعیت دو خط نسبت به هم از نظر توازی و تعامد ـ کسب مهارت در تعیین معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه ـ کسب مهارت در تعیین خط گذرنده از یک نقطه با شیب معین ـ کسب مهارت در یافتن شیب خط، از روی معادلهٔ داده شدهٔ خط ـ کسب مهارت در یافتن محل تقاطع خط با محورهای مختصات ـ کسب مهارت در مدلسازی مسائل واقعی با استفاده از معادلهٔ خط ـ کسب مهارت در یافتن فاصلهٔ یک نقطه از یک خط	

عنوان فصل	هدفهای شناختی	هدفهای مهارتی (ذهنی و عملی)	هدفهای نگرشی
دستگاههای معادلات	ـ درک چگونگی حل دستگاه معادلات خطی به‌عنوان یافتن مختصات محل تقاطع دو خط و بحث در مورد حالتهای ممکن برای وجود جواب و تعداد جوابها ـ شناخت روشهای حل دستگاه معادلات خطی	ـ کسب مهارت در ترجمهٔ مسائل واقعی (به‌صورت کلامی) به زبان نمادها و تبدیل آن به دستگاه دو معادله و دو مجهول ـ کسب مهارت در حل دستگاه معادلات خطی از طریق رسم خطوط ـ کسب مهارت در حل دستگاه معادلات خطی (از طریق روشهای حذفی و جایگزینی)	

ارزش‌یابی ریاضیات

ارزیابی برنامه درسی و ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان یکی از عوامل مؤثر در برنامه‌ریزی درسی است و حتی فراتر از آن از ضرورتهای نظام آموزشی است تا به‌وسیله فرایند انجام آن پویایی و سلامت و حیات نظام آموزشی حفظ گردد. این حکم در مورد هر ماده درسی نیز صادق است. به همین دلیل تبیین اصول و استانداردها، چگونگی انجام آن در مورد هر ماده درسی، بخشی از برنامه درسی هر ماده است. برای صراحت و دقت در ادامه مطلب دو واژه کلیدی «ارزیابی» (evaluation) و «ارزش‌یابی» (assessment) که به تواتر به‌کار گرفته می‌شوند، تعریف می‌کنیم.

ارزش‌یابی ریاضیات عبارت از فرایند گردآوری شواهد و مدارک درباره دانشِ دانش‌آموز از توانایی به‌کارگیری و حالتهای [و وضعیتهای] آیندهٔ ریاضیات و ساختن استنتاجهایی از شواهد و مدارک برای دگرگونیهای اهداف و مقاصد آینده است. «ارزش‌یابی اصطلاحی است که اغلب به‌طور قابل تعویض با اصطلاحات آزمون کردن، اندازه‌گیری و یا برای تمایز بین ارزش‌یابی دانش‌آموز و ارزیابی برنامه به‌کار گرفته می‌شود.» با این حال ما این واژه را با تعریف بالا و با تأکید بر درک و توصیف شواهد کمّی و کیفی در تصمیم‌سازی و داوری کردن به‌کار می‌بریم.

«ارزیابی فرایند تعیین بها و شایستگی یا تخصیص ارزش یا مقدار برای چیزی است که مبتنی بر قضاوت و امتحان دقیق باشد.» عبارت ارزیابی معطوف به استفاده از اطلاعات ارزش‌یابی است. تمرکز بر گردآوری شواهد و مدارک و استنتاج حاکی بر این است که ارزش‌یابی فرایندی است که طی آن، دانش ریاضی دانش‌آموز و آن‌چه که او می‌تواند انجام دهد، توصیف می‌شود.

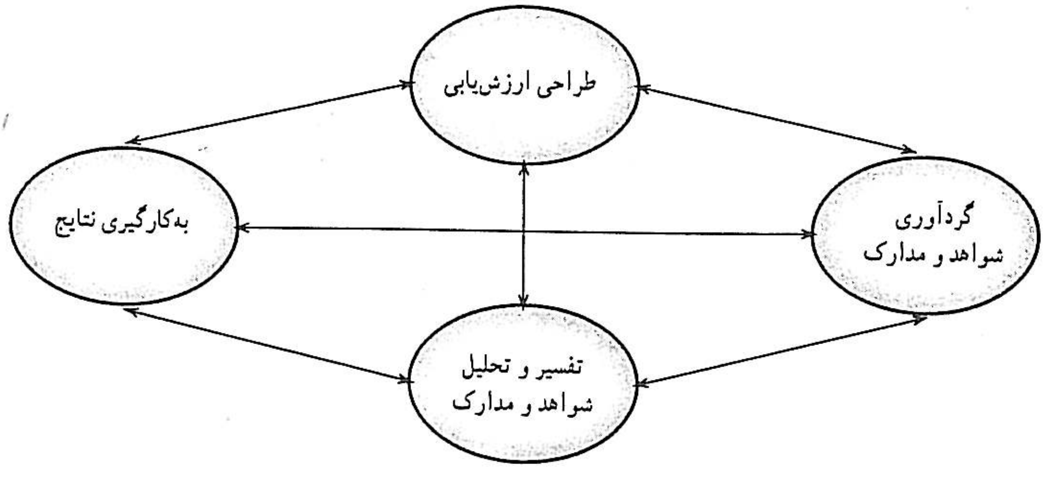
همانند اهداف و مقاصد متعدد ارزش‌یابیها، مصرف‌کنندگان و مخاطبین بسیاری برای ارزش‌یابیها متصور است. برای مثال هر دانش‌آموزی از انجام ارزش‌یابی آگاهی دارد، حتی بعضی از دانش‌آموزان در طول تدریس می‌پرسند که «آیا این مطلب در امتحان می‌آید؟» دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که برای چه چیزی ارزش‌یابی می‌شوند و چگونه نتایج کار آنها منعکس می‌شود. این دلیل معقولی است که یک دانش‌آموز لازم است بداند که چگونه مورد ارزش‌یابی قرار خواهد گرفت؟ چه ریاضیاتی را باید انجام دهند؟ میزان یا مقیاس داوری در مورد عملکرد آنها چیست؟ همچنین لازم است از بازخورد به موقع نتیجه کار خود و پیامدهای ارزش‌یابی آن آگاهی داشته باشند.

مسئولیتهای معلم بخش اعظم کار است که با داوری و قضاوت در مورد عملکرد شاگردان در کلاس، پیشرفت و ارتقاء شاگردان از راه آموزش یک واحد درسی، دانش و شایستگی دانش‌آموزان

در تغییر نمراتشان در طی سال تحصیلی درگیراست. به‌علاوه لازم است همگان بدانند که دانش‌آموزان با چه کیفیتی ریاضیات را انجام می‌دهند. اطلاعات مربوط به عملکرد ریاضی دانش‌آموزان برای مقایسه دانش‌آموزان، مدارس، مناطق و نواحی و حتی استانها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در مجموع داده‌های گردآوری شده از عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی برای ارزیابی و ارزش‌گذاری: پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان، برنامه‌ها و مدیریت تصمیم‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. قضاوتهای پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان، تصمیمات آموزشی و ارزیابیهای برنامه‌های آموزشی بایستی براساس تفاسیر و تعابیر مستدل و معقول از شواهد و مدارک و با کیفیت بالا باشد.

فرایند ارزش‌یابی را می‌توان به‌عنوان چهار مرحله یا بخش از درون مرتبط تبیین کرد که به اصول روشن، معیارها و مقیاسهایی برای تصمیم‌گیری در شرایط بحرانی نیاز دارد. نمودار زیر این چهار مرحله را نشان می‌دهد. طراحی ارزش‌یابی، گردآوری شواهد و مدارک، تفسیر و تحلیل شواهد و مدارک و به‌کارگیری نتایج این چهار مرحله را تشکیل می‌دهند که در عمل و اجرا، مرحله‌ها با هم تعامل دارند ولی الزاماً توالی ندارند.



هر مرحله از فرایند ارزش‌یابی به‌وسیله تصمیمات و عملهایی که در درون آن رُخ می‌دهد، دسته‌بندی و مشخص می‌شود، همان‌گونه که در زیر ارائه می‌شود:

طراحی ارزش‌یابی

ـ چه اهداف و مقاصدی باید مورد ارزش‌یابی قرار گیرد؟

ـ چه چهارچوبی برای ایجاد تمرکز و تعادل در فعالیتها به‌کار گرفته می‌شود؟

ــ از چه روشهایی برای گردآوری شواهد و مدارک و تفسیر آن استفاده می‌شود؟

ــ برای قضاوت و داوری در مورد انجام فعالیتها به‌وسیله دانش‌آموزان چه معیار و مقیاسی مناسب است؟

ــ قالبهایی که برای جمع‌بندی قضاوتها و گزارش نتایج به‌کار می‌روند، چیست؟

گردآوری شواهد و مدارک

ــ فعالیتها و تکالیف چگونه انتخاب یا ایجاد می‌شوند؟

ــ فرایندهای انتخاب شده چگونه دانش‌آموزان را درگیر فعالیتها می‌کنند؟

ــ چه روشهایی برای تولید و حفاظتِ شواهد و مدارک و عملکرد دانش‌آموزان [که مورد قضاوت و داوری قرار گرفته‌اند] به‌کار می‌روند؟

تفسیر شواهد و مدارک

ــ کیفیت شواهد و مدارک تعیین شده چگونه است؟

ــ از روی شواهد و مدارک چگونه می‌توان به عملکرد دانش‌آموزان پی برد؟

ــ چه معیار و میزان خاصی برای داوری عملکرد دانش‌آموزان به‌کار گرفته می‌شود؟

ــ آیا میزان و معیار به‌طور مناسب و مقتضی به‌کار گرفته شده‌اند؟

ــ داوریها و قضاوتها چگونه به‌صورت نتایج جمع‌بندی شده تبدیل خواهند شد؟

به‌کارگیری نتایج

ــ نتایج ارزش‌یابی چگونه گزارش خواهد شد؟

ــ استنتاجها چگونه از نتایج به‌وجود می‌آیند؟

ــ چه عملی به‌عنوان پایهٔ استنتاجها درنظر گرفته می‌شود؟

ــ چگونه می‌توان اطمینان یافت که این نتایج موجب پیوستگی و وحدت آموزشها و ارزش‌یابیهای بعدی خواهد شد؟

ارزش‌یابی می‌تواند توسط آموزشگران، معلمان و یا حتی خود دانش‌آموز انجام شود تا پیشرفت و موفقیت در یادگیری یک موضوع را ارزش‌یابی کند. «به این‌ترتیب، ارزش‌یابی برای توسعه و رشد قدرت ریاضی همه دانش‌آموزان یک امر ضروری است و تأیید و پشتیبانی از ادامه یادگیری و آموزش ریاضی برعهده آن است. این هدفِ محوریِ ارزش‌یابی در ریاضیات مدرسه است.» از نظر ما،

ارزش‌یابی در محل اشتراک و تلاقی محتوای مهم ریاضیات، روشهای تدریس و یادگیری دانش‌آموز اتفاق می‌افتد.

استانداردهای ارزش‌یابی ریاضیات

استانداردها میزان و معیاری برای قضاوت و داوری کیفیت ارزش‌یابیهای ریاضی هستند که در شش بخش ریاضیات، یادگیری، برابری، باز بودن، استنتاجها و پیوستگی و ارتباط منطقی دسته‌بندی می‌شوند. همه ارزش‌یابیهای ریاضی این استانداردها را به‌کار می‌گیرند. این استانداردها می‌توانند برای فعالیتهای ارزش‌یابی خاص یا یک نظام ارزش‌یابی عام و تام به‌کار گرفته شوند. آخرین استاندارد یعنی پیوستگی و ارتباط منطقی با استانداردهای دیگر تفاوت دارد و موجب اتصال درونی استانداردها می‌شود تا نظام ارزش‌یابی و اهداف ارزش‌یابی تحقق‌پذیر باشد.

استانداردهای ارزش‌یابی تحرک و پویایی را ارتقاء می‌دهد و فرایند اصلاح برنامه ریاضی، تدریس ریاضی و ارزش‌یابی را بهبود می‌بخشد. همه افرادی که با آموزش ریاضیات مربوط هستند، به‌وسیلهٔ این فرایند درگیر می‌شوند.

استانداردها

۱ــ استاندارد ریاضیات: «ارزش‌یابی بایستی انعکاس‌دهنده ریاضیاتی باشد که همه دانش‌آموزان برای دانستن و انجام دادن به آن نیاز دارند».

ریاضیات و به‌کارگیری آن در جامعه با رشد و تغییر مرتبط است. بنابراین ریاضیات آموخته شده در مدرسه، همراه و مرتبط با درگیر شدن است. معلمین ریاضی تلاش می‌کنند هر آن‌چه مربوط به برنامه درسی ریاضیات مدرسه است براساس درک جاری از ریاضی و یادگیری ریاضیات فرمول‌بندی کنند. در دوران کنونی تفکر و اندیشیدن تنها به مباحث و محتوای ریاضی مورد نیاز دانش‌آموزان مربوط نمی‌شود بلکه به راههای مهمی که ریاضیات آموخته می‌شود و به‌کار گرفته می‌شود نیز مربوط است. به کلام دیگر، چگونگی یادگیری و به‌کارگیری، اهمیت اساسی پیدا کرده است. اکنون به‌طور فزاینده‌ای بر تفکر و حل مسئله تأکید می‌شود. مهارتهای وابسته به عمل و رویه‌ای به‌تنهایی دانش‌آموزان را برای این دنیا آماده نمی‌کند. دانش‌آموزان استحقاق و شایستگی آن برنامه درسی را دارند که قدرت ریاضی‌شان را توسعه دهد و بنابراین یک نظام ارزش‌یابی موردنیاز است تا دانش‌آموزان را قادر کند، توان ریاضی‌شان را بروز دهند.

ارزش‌یابی، دیدگاه جاری ریاضیات مدرسه را با فعالیتهای درگیرکننده تطبیق می‌دهد، فعالیتهایی که مبتنی بر ریاضیات جاری و معنی‌دار هستند. این فعالیتها برای دانش‌آموزان فرصتهایی فراهم

می‌کنند تا مسائل را فرمول‌بندی کنند، استدلال ریاضی‌گونه انجام دهند، بین ایده‌های ریاضی اتصال و ارتباط برقرار کنند و بین محیط ریاضیات و خارج آن ارتباط برقرار کنند.

۲ــ استاندارد یادگیری: «ارزش‌یابی باید یادگیری ریاضیات را افزایش دهد.»

در بخش بزرگی از آموزش ریاضیات، ارزش‌یابی به‌طور معناداری، کمک و موهبتی برای یادگیری همه دانش‌آموزان است. زیرا دانش‌آموزان در فرایند ارزش‌یابی، ریاضیات را می‌آموزند، درواقع ارزش‌یابیها فرصتهای یادگیری هستند و طی آن دانش‌آموزان می‌توانند ارزش‌یابیها را برای مستقل شدن یادگیریهایشان به‌کار بگیرند. اگرچه ارزش‌یابی برای دلایل گوناگون انجام می‌شود ولی هدف اصلی آن پیشرفت و بهبود یادگیری دانش‌آموزان و آگاهی معلمان و برنامه‌ریزان برای تصمیم‌گیریهای آموزشی است.

۳ــ استاندارد برابری: «ارزش‌یابی باید برابری را ارتقاء دهد.»

پرداختن منصفانه موجب می‌شود که به تجربیات و تواناییهای منحصر به‌فرد هر دانش‌آموز احترام گذاشته شود. برابری به این معنی است که به هر دانش‌آموز فرصتهایی داده شود تا به سطوح بالا نایل گردد و حمایت لازم را برای عملکرد آنها فراهم کند. حمایت و طرفداری از استاندارد برابری یعنی این‌که همه دانش‌آموزان، چه آنهایی که نیازهای خاص دارند و یا آنهایی که استعدادهای خدادادی دارند، انتظار دارند که بتوانند به سطوح بالای عملکرد ریاضی دست یابند.

۴ــ استاندارد باز بودن (آزاد بودن): «ارزش‌یابی باید یک فرایند باز [آزاد] باشد.»

باز بودن در فرایند ارزش‌یابی از چند راه می‌تواند بیمه شود. نخست این‌که اطلاعات به‌دست آمده برای آنهایی که تحت‌تأثیر واقع می‌شوند، قابل دسترس باشد. درثانی، یک فرایند ارزش‌یابی باز برای افرادی که به‌طور حرفه‌ای درگیر هستند، نقش قائل می‌شود. باز بودن در ارزش‌یابی شامل آگاهی دادن به‌همگان اعم از اولیا، مدیران، معلمان، برنامه‌ریزان درسی و آموزشی و مراکز تصمیم‌گیری و قانون‌گذاری می‌باشد. اطلاعات مربوط به‌ارزش‌یابی کلاسهایی که معلمان به‌خوبی آنها را به‌کار می‌گیرند و نقش بسیار مهم در تصمیم‌گیریهای آموزش و اصلاح و بهبود روشهای تدریس خواهد داشت، از راههای دیگر تحقق استاندارد باز بودن است. نهایتاً و مهم‌تر از همه برنامه‌ریزان برنامه درسی بایستی به همه داده‌های ارزش‌یابیها دسترسی داشته باشند تا با سهولت بتوانند آنها را به‌کار بگیرند.

۵ــ استاندارد استنتاجها: «ارزش‌یابی باید اعتبار استنتاجهای مربوط به یادگیری ریاضیات را ارتقاء دهد.»

براساس تعریف، ارزش‌یابی فرایندی است شامل گردآوری شواهد و مدارک و استنتاج‌سازی

از شواهد و مدارک برای اهداف گوناگون. پرسش اولیه با تعریفِ فرایندهایی برای ایجاد استنتاجهای معتبر از شواهد و مدارک مربوط به یادگیری دانش‌آموزان درگیر است. یک نتیجه‌گیری دربارهٔ یادگیری یعنی یک نتیجه دربارهٔ فرایندهای شناختی دانش‌آموز که نمی‌توان آن را به‌طور مستقیم مشاهده کرد. یک استنتاج معتبر مستلزم داشتن شواهد و مدارکی کافی و مرتبط است.

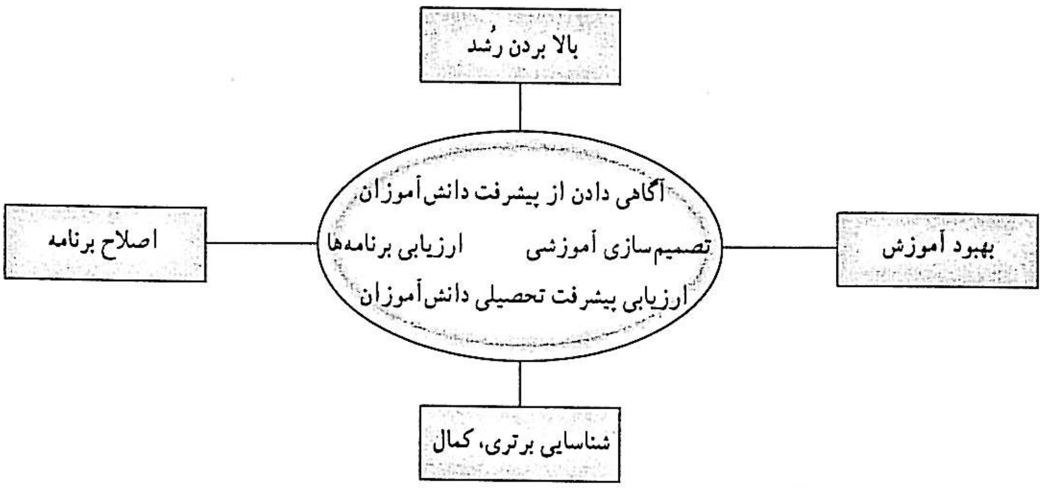
۶ـ استاندارد پیوستگی و ارتباط منطقی: «ارزش‌یابی باید فرایندی پیوسته و به‌صورت منطقی مرتبط باشد.»

پیوستگی و ارتباط منطقی در ارزش‌یابی با سه نوع توافق و مطابقت درگیر است. نخست این‌که ارزش‌یابی از یک کلّ به هم پیوسته تشکیل می‌شود، مرحله‌ها با هم‌دیگر جفت می‌شوند. دوم این‌که ارزش‌یابی، اهداف را به هم متصل می‌کند تا قابل اجرا و محقق شدنی باشند. هنگام طراحی شواهد، گردآوری و تفسیر می‌شوند و مراحل عمل فرایند ارزش‌یابی با هم‌دیگر و با اهداف ارزش‌یابی سازگارند. سوم، ارزش‌یابی با برنامه درسی و با آموزش در یک ردیف قرار می‌گیرد و یادگیری دانش‌آموز با تجربیات ارزش‌یابی از درون پیوند می‌خورد.

به‌کارگیری استانداردهای ارزش‌یابی برای اهداف گوناگون:

اهدافی که ارزش‌یابیهای ریاضی به منظور آنها انجام می‌شود، در چهار طبقه رده‌بندی می‌شوند. اگرچه راههای دیگری برای طبقه‌بندی این‌گونه اهداف وجود دارد، ولی طبقه‌بندی زیر اولین ناحیه‌هایی هستند که اصلاح آنها مستلزم ارزش‌یابی است. نمودار زیر چهار هدف مهم و عاملهایی را که از به‌کارگیری داده‌های ارزش‌یابی در اتصال و ارتباط با هر هدف، نتیجه می‌شود، نشان می‌دهد.

چهار دسته اهداف ارزش‌یابی و نتایج آنها



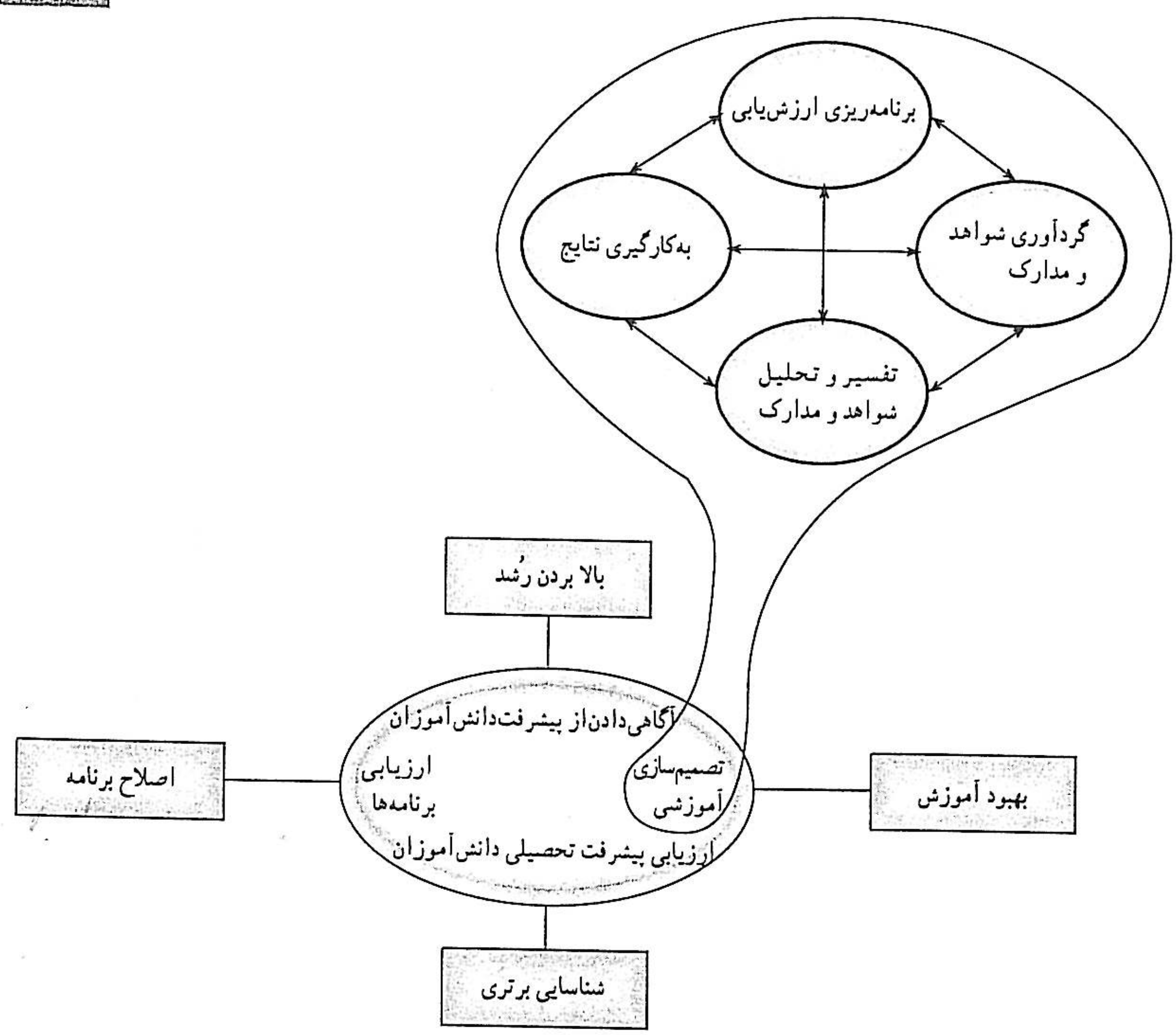
یکی از اهداف مهم ارزش‌یابی، آگاهی دادن در مورد پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان برای اهداف یادگیری آینده است. پس از دسته‌بندی انتظارات بلندمدت، باید شواهد و مدارک گردآوری شوند تا دانش‌آموزان و معلمان را برای به‌کارگیری بازخورد دست‌یابی به اهداف آتی، آماده کند. در یک روند مستمر، بازخورد برای افزایش قدرت ریاضی شاگردان تأثیرگذار خواهد بود. آگاهی دادن باید به‌عنوان یک فرایند پیوسته موردنظر باشد. گردآوری شواهد گاهی غیررسمی و گاهی رسمی است. بنابراین نتایج به‌دست آمده وقتی معتبر هستند که از بازخوردهای تشخیصی غنی و مهم برای هر دانش‌آموز به‌دست آیند. پرسش اساسی که باید در مورد هر دانش‌آموز پاسخ داد، این است که «چگونه هر دانش‌آموز، در رابطه با اهدافی که روی آنها توافق داریم، پیشرفت می‌کند؟»

دومین هدف وابسته به ارزش‌یابی ریاضیات، تصمیم‌سازی آموزشی است. آموزشگران شواهد و مدارک درک و فهم ریاضی دانش‌آموزان را در ارتباط با شواهد دیگری که از فرایند آموزشی نشأت گرفته‌اند، برای اصلاح و تحولات آموزشی به‌کار می‌گیرند تا بتوانند یادگیری را تسهیل کنند. معلم اولین ارزش‌یاب ریاضیاتی است که دانش‌آموز می‌داند و می‌تواند انجام دهد. در این باره نیز پرسش اساسی این است که «چگونه می‌توان شواهد و مدارک مربوط به پیشرفت دانش‌آموزان را برای تصمیم‌سازی آموزشی به‌کار گرفت؟»

سومین هدف از ارزش‌یابی ریاضی این است که دست‌یابی به اهداف و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان را در یک زمان خاص ارزیابی کند. در فواصل منظم، شواهد و مدارک اخذ شده از چند منبع، رسماً برای هر دانش‌آموز جمع‌بندی می‌شود و به مراکز موردنظر گزارش می‌شود. در این راستا، پرسش اصلی این است که چگونه می‌توان درک و فهم دانش‌آموز را با اهداف مورد انتظار مقایسه کرد؟

ارزیابی برنامه‌ها، چهارمین محور ارزش‌یابی ریاضی است. شواهد و مدارک عملکرد دانش‌آموزان به اندازهٔ داده‌های دیگر برای تصمیم‌سازی برنامه‌های آموزشی مورد استفاده واقع می‌شود، طوری که دانش‌آموزان برای رویارویی با انتظارات بلند در ریاضیات تهییج شوند. در این زمینه پرسش اساسی این است که «برنامه‌های آموزشی تا چه اندازه در ارتباط با اهداف و انتظارات برای دانش‌آموزان خوب عمل می‌کنند؟»

همهٔ ارزش‌یابیهای ریاضی با چهار مرحلهٔ :برنامه‌ریزی ارزش‌یابی، گردآوری شواهد و مدارک، تفسیر و تحلیل شواهد و مدارک و به‌کارگیری نتایج درگیر هستند. اگرچه جنبه‌ها و وجوه هر فرایند پیچیده و دشوار می‌تواند با اهداف تغییر کند. نمودار ذیل نشان می‌دهد که چگونه مرحله‌های فرایند ارزش‌یابی با اهداف ارزش‌یابی ارتباط دارد.



۲ــ چهارچوبی برای ارزش‌یابی ریاضیات

عوامل اصلی در تدوین چهارچوب ارزش‌یابی ریاضی در هفت عنوان دسته‌بندی می‌شوند : تارها و رشته‌های محتوای ریاضی، ابعاد ریاضی، مجموعه‌های پرسشها[1]، درصد پرسشها، تراز پرسش، حسابگرها (ماشین حساب) و دست‌ورزیها پیکرهٔ این دسته‌بندی را تشکیل می‌دهند. دو محور اول نقش اساسی در پیکرهٔ ریاضی دارد و بر عوامل دیگر تأثیر گذارند. در ادامه به بررسی این دو محور می‌پردازیم.

رشته‌های محتوای ریاضی:

رشته‌های محتوای ریاضی در پنج رده، دسته‌بندی می‌شوند. اگر چه براساس دیدگاههای دیگر

این طبقه‌بندی می‌تواند متفاوت باشد ولی در حال حاضر این طبقه‌بندی مرسوم است.

۱ـ مفهوم عدد، ویژگیها و عملیات

۲ـ اندازه‌گیری

۳ـ هندسه و مفاهیم فضایی

۴ـ تجزیه و تحلیل داده‌ها، آمار و احتمال

۵ ـ جبر و توابع

هدف این گونه تقسیمات این نیست که ریاضیات را به عناصر گسسته تفکیک کند، بلکه مقصود فراهم کردن طرح‌واره‌ای است تاطیفهای محتوای ریاضی را به‌طور کامل توصیف کند. در عین حال توصیفات محتوای ریاضی نمی‌توانند به تنهایی و به‌طور کامل، انواع تفکر ریاضی را بیان کنند. منظور از انواع تفکر ریاضی همانهایی است که در استانداردهای هر نظام آموزشی توصیه شده و به‌وسیله جریان اصلاحات آموزشی پیشنهاد می‌شوند. حتی اندیشه و تفکری که به‌وسیله استانداردها و اصول برای توسعهٔ فرایندهای حل مسئله، برقراری ارتباط بیرونی، استدلال کردن، اتصال و ارتباط درونی بین ایده‌های ریاضی، در هر یک از رشته‌های محتوای ریاضی شمول قرار گرفته‌اند به بُعد اضافی دیگری از ارزش‌یابی نیاز دارد.

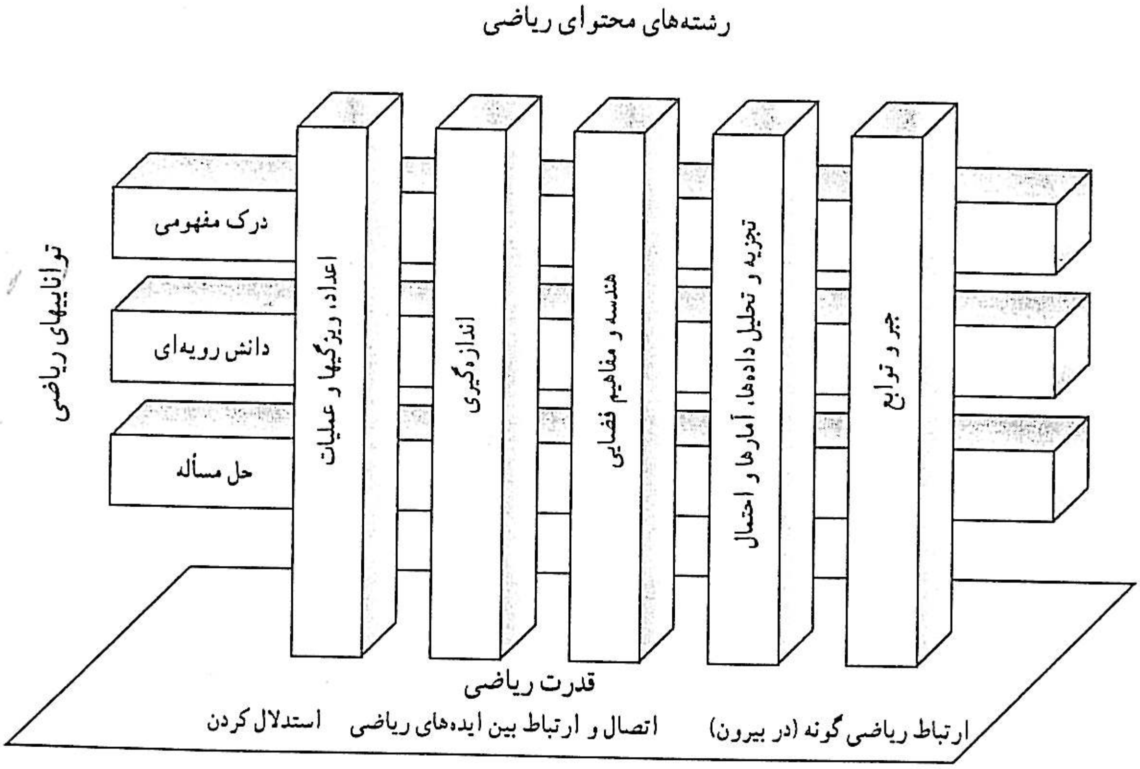
ابعاد ریاضی:

یکی از روشهای تعیین کردن پرسشها در ارزش‌یابیهای ریاضیات، به کارگیری جدول دو بعدی «رشته محتوا ـ توانایی ریاضی» است که در ذیل نشان داده می‌شود.

توانایی ریاضی	ناحیه‌های محتوا				
	اعداد، خواص و عملیات	اندازه‌گیری	هندسه و مفاهیم اندازه‌گیری	تجزیه و تحلیل داده‌ها، آمار و احتمال	جبر و توابع
درک مفهومی					
دانش رویه‌ای (روند همراه با عمل)					
حل مسئله					

به کارگیری این گونه چهارچوبها بستگی به این دارد که یک راهنمای قوی برای ساختن آزمونهایی در سطح وسیع داشته باشیم. با این حال، این گونه ساختارها برای کنترل کار در برابر اهداف برنامه‌ای دانش ریاضی و یکپارچگی سراسری مباحث لازم است.

یکی از مشکلات این روش در طرح آزمونها، مسئله تخصیص پرسشها به هر یک از خانه‌های این جدول است که به طبقه‌بندی تواناییهای ریاضی بستگی دارد. طبقه‌بندی تواناییهای ریاضی با عمق گرفتن مفاهیم و تغییر آن در مقاطع تحصیلی تغییر می‌کند. در زندگی واقعی چندین موقعیت ریاضی آشکارا در یک رشته محتوا قرار می‌گیرند و این چند موقعیت به‌طور طبیعی تنها یکی از گونه‌های تفکر ریاضی است. هنوز هم برای تضمین اهداف وسیع و موضوعات گسترده، در ساختن آزمونها بایستی پرسشها از چندین راه طبقه‌بندی شوند. یکی از راههای جدید که مبتنی بر چهارچوبی سه بعدی است و تعمیمی از جدول دو بعدی [رشتهٔ محتوا ـ توانایی ریاضی] می‌باشد، طوری‌که علاوه بر رشتهٔ محتوا و تواناییهای ریاضی، بُعد سوم یعنی قدرت ریاضی را نیز درگیر می‌کند. نمودار این چهارچوب در زیر ارائه شده است.



این نمودار نشان می‌دهد که محتوای برنامه درسی ریاضیات از پنج ناحیه وسیع ریاضی نشأت می‌گیرد و پرسشهای ارزش‌یابی ریاضیات برحسب اهمیت ناحیه‌ها طبقه‌بندی می‌شوند. پرسشهایی که براساس این چهارچوب ایجاد می‌شوند شامل دو بُعد تواناییهای ریاضی و قدرت ریاضی هستند.

همان‌گونه که سازگاری تواناییهای ریاضی (درک مفهومی، دانش رویه‌ای، حل مسئله) درون یک محتوای وسیع، از راه استدلال همراه با ارتباطات ایده‌های ریاضی در سراسر دامنه وسیع تفکر ریاضی و محتوای ریاضی برقرار می‌شود و قدرت ریاضی نیز درگیر می‌گردد. ارتباط [ریاضی] هم به‌عنوان وحدت‌بخشی بین رشته‌های ریاضیات دیده می‌شود و هم به‌عنوان راهی که دانش‌آموز بتواند پاسخهای بامعنی برای تکالیفش پیداکند.

مفهوم قدرت ریاضی به‌عنوان استدلال کردن، ارتباط درونی ایده‌های ریاضی و ارتباط ریاضی‌گونه (بیرونی) نقش مهم و فزاینده‌ای در اندازه‌گیری پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان بازی می‌کند. ارزش‌یابیهای ریاضی معمولاً شامل پرسشهای چندگزینه‌ای، کوتاه پاسخ و پاسخ ـ باز بوده است که پرسشهای پاسخ ـ باز راهی برای نشان دادن ارتباط ریاضی گونه بوده است. اخیراً پرسشهای پاسخ ـ باز توسعه یافته نیز افزوده شده است که مستلزم این است که دانش‌آموزان نه تنها در مورد ایده‌هایشان ارتباط ریاضی گونه برقرار کنند بلکه هنگام حل مسئله، قدرت استدلال کردن خود را بروز دهند. اکنون در ارزش‌یابیها تمرکز بیش‌تری بر پرسشهای پاسخ ـ باز توسعه یافته است تا قدرت ریاضی دانش‌آموزان و توسعه آن را به‌عنوان محور آموزش ریاضیات مورد ارزیابی قرار دهد. این کار باسنجش دقت استدلال کردن و برقراری ارتباط درونی و بیرونی انجام می‌گیرد که به‌وسیلهٔ مسائل زندگی واقعی و پرسشهایی که فرصتهایی برای همهٔ دانش‌آموزان فراهم کند تا همه رشته‌های محتوای ریاضیات را به‌عنوان یک کل واحد در یادگیری‌شان پیوند دهند. بنابراین ویژگی این‌گونه پرسشها، به‌کارگیری بیش از یک رشته محتوا در درون آن است و پاسخ‌گویی به آنها مستلزم به‌کارگیری چند رشته از محتوای ریاضی است.

تواناییهای شناختی:

تأثیر حتمی آگاهی دادن درباره پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان که هدف اصلی ارزش‌یابی است، بهبودی آشکار در یادگیری ریاضی است. استانداردهای ارزیابی و برنامه درسی برای ریاضیات مدرسه در راستای تحقق تغییر حقیقی در برنامه درسی ریاضیات و بهبود و اصلاح جریان یاددهی ـ یادگیری ریاضی است. جریان ارزش‌یابی ریاضی در درون خود نیز با تحوّل و دگرگونی توأم است تا خود بتواند ابزار به هنگامی در خدمت آموزش ریاضی باشد. در کلاسهای درس، فعالیتهای ارزش‌یابی از منظر دانش‌آموز نیز به‌عنوان منبع آگاهی برای قضاوت در مورد معلمان به‌کار می‌رود. از این راه دانش‌آموز تمیز می‌دهد که کدام معلم با ارزش است و کدام‌یک از معلمین واقعاً به درک و فهم دانش‌آموز توجه می‌کنند. دانش‌آموزان سعی می‌کنند خود را و یادگیری خود را در راستای انتظارات معلمین که به وضوح در ارزش‌یابیها آشکار می‌شود، هماهنگ کنند. بنابراین ارزش‌یابیها می‌توانند

جهت‌دهنده جریان یاددهی ـ یادگیری باشند که اگر در راستای آموزش واقعی باشند بسیار مثبت و کارساز است و چنانچه بر مراحل درک و فهم و تواناییهای ریاضی و قدرت ریاضی تأکید نداشته باشد آن‌گاه جریان آموزش را به بیراهه و هدر دادن نیروها و امکانات سوق می‌دهد.

تواناییهای شناختی ریاضی در دو ردهٔ «قدرت ریاضی» و «تواناییهای ریاضی» تبیین می‌شود که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

قدرت ریاضی:

قدرت ریاضی محور اصول و استانداردهای آموزش ریاضی است که به توصیف وجوه و جنبه‌هایی از عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی می‌پردازد. قدرت ریاضی به‌عنوان توانایی فراگیر دانش‌آموز برای گردآوری و به کارگیری دانش ریاضی از راه کاوشگری، حدسیه‌سازی و استدلال منطقی، از طریق حل مسائل غیرسرراست، از طریق برقراری ارتباط ریاضی گونه و از راه اتصال و پیوند درونی ایده‌های ریاضی در یک موضوع ریاضی با ایده‌های ریاضی در موضوعی دیگر و یا با ایده‌هایی از نظامهای دیگر در همان موضوع ریاضی یا موضوع وابسته به آن مشخص می‌شود. بنابراین ارزش‌یابی قدرت ریاضی دانش‌آموزان ضروری است.

ارزش‌یابی قدرت ریاضی دانش‌آموز نیازمند بسیاری از نشانگرهای گوناگون در طول زمان است.

همان‌گونه که قدرت ریاضی فراتر از تواناییهای عمومی ریاضی یعنی توانایی درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله، توسعه پیدا می‌کند، برای اطمینان یافتن از اندازه‌های اخذ شده از توانایی دانش‌آموز برای استدلال در موقعیتهای ریاضی، برای برقراری ارتباط ادراکات و نتایج بیرون آمده از محتوای ریاضی و برای ایجاد پیوند درونی طبیعت ریاضی یک موقعیت با دانش ریاضی مرتبط و اطلاعات سودمند نظامهای دیگر (ریاضی) مهم است. تعامل و تبادل کلی همه این تواناییهاست که قدرت ریاضی فراگیر دانش‌آموز را [در یک دوره زمانی] تعریف می‌کند. مهارتهای ذهنی استدلال کردن، برقراری ارتباط درون ریاضی و به‌وسیله ریاضی در بیرون که در قلب هر یک از رشته‌های محتوا و تواناییهای ریاضی قرار دارند، باید در ارزشیابی ترکیب شوند.

قدرت ریاضی می‌تواند از مناظر گوناگون در نظر گرفته شود. دانش‌آموزان باید با مسائل جدید در یک موضوع قدیمی و یا با یک مسئلهٔ قدیمی در یک موضوع جدید روبه‌رو شوند. هنگامی که اولین تلاشهای دانش‌آموز برای حل مسئله شکست می‌خورد باید اطلاعاتش را وارسی کند و دوباره با آن روی مسئله کار کند، سپس اطلاعاتش را منسجم کرده و با روشی مولّد و کارآمد برای موقعیت مسئله به کار بگیرد. فرایند بازبینیِ یک رویکرد برای یک مسئله مبتنی است بر استدلال کردن،

گردآوری اطلاعات جدید و ایجاد ارتباط درونی با ایده‌های دیگر ریاضی، که به‌طور پویا رُشد می‌کند و موجب تغییرتوانایی می‌شود. این سیما از قدرت ریاضی می‌تواند (باید) از راه عملکرد دانش‌آموزان دردرون یک رشته محتوای جزئی و در سطوح درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله درنظر گرفته شود. معادل یک مفهوم خاص، یک رویه یا محتوای یک مسئله باید در رشته‌های محتوا در نظر گرفته شود. در مرحله بعدی مجموعه‌های پرسشها (مربوط به سطوح یادگیری) در ارزش‌یابی بسیار مؤثر خواهند بود. استفاده از حسابگرهای دستی موجب می‌شود که دانش‌آموزان وقت صرف محاسبات نکنند و بتوانند سریعاً مسیرهای بدیل را پیگیری کنند و آنها را بیازمایند.

دانش‌آموزان قدرت ریاضی‌شان را از راه فرمول‌بندی و تاخت و تاز روی مسائل و موقعیتهایی که با احتمالها و امکانهای بسیار درگیر است واز راه استدلال کردن ــ که در چنین موقعیتهایی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است ــ انجام می‌دهند. در پرسشهای پاسخ ــ باز توسعه یافته دانش‌آموزان با تجربه‌هایی روبه‌رو می‌شوند که نیازمند ساختن پاسخ مهم و باارزش هستند. در میان گزارش یک دانش‌آموز از فرایند تفکرش، سؤالهای مربوط به رویکرد او، طبیعت استدلال کردنش و توانایی او در حل مسئله‌ها، اکثراً نتیجه‌ای است که از شواهد و مدارک بیرون کشیده می‌شود و کم‌تر به‌صورت یک حدس استنتاجی می‌باشد. به علاوه هنگام نمره‌گذاری بایستی به تلاشهای دانش‌آموزان اعتبار و امتیاز داد.

نهایتاً، قدرت ریاضی تابعی از دانش قبلی، تجربه و توانایی برقراری ارتباط درونی به‌وسیله دانش‌آموز است که در راههای مولّد برای موضوعات جدید مشاهده می‌شود. این منظر از قدرت ریاضی می‌تواند با پرسشهایی چندگزینه‌ای و از راه تجزیه و تحلیل روشهایی که دانش‌آموزان پاسخهایشان را توسعه می‌دهند، اندازه‌گیری شود. اطلاعات مرتبط به این وجوه رُشد دانش‌آموزان به سختی قابل استخراج و تفکیک است. با این حال سه وجه قدرت ریاضی (استدلال کردن، برقراری ارتباط بیرونی، برقراری ارتباط درونی ریاضی) برای تعیین کردن رشته‌های مفاهیم ریاضی به جهت ساختن پرسشها و طراحی آزمونهای سراسری به‌کار می‌روند.

توانایی‌های ریاضی: ابعاد تواناییهای ذهنی عمومی وابسته به ریاضی شامل درک مفهومی، دانش رویه‌ای (فرایندی همراه باعمل) و حل مسئله است. این سه ناحیه به‌طور اخص به‌وسیله اصول و استانداردهای آموزش ریاضی تعریف شده‌اند. درک مفهومی می‌تواند به‌طور ساده به عنوان یک اندازه برای دانایی دانش‌آموز از «برای آنکه» یا «دربارهٔ» در نظر گرفته شود. در صورتی که دانش رویه‌ای می‌تواند به‌عنوان دانایی دانش‌آموز از «چگونه» در نظر گرفته شود. ترکیب این دو توانایی پایه و اساسی برای قابلیت شناسایی و درک و فهم یک موقعیت فراهم می‌کند. شناسایی و درک یک

موقعیت برای فرمول‌بندی آن است تا به‌وسیله آن با موقعیت مواجه شده و راه‌حلی برای آن به‌دست آید و سپس بر روی راه‌حل، بازتاب صورت گیرد. این فعالیتها در مرحله بعدی به‌عنوان مناظر حل مسئله در نظر گرفته شود.

در حال حاضر طراحی ارزش‌یابی ریاضی برروی درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله تمرکز دارد که موجب تعادل و پایداری ارزش‌یابی گردد. به خصوص توصیه می‌شود که در طراحی پرسشها و تکالیف ارزش‌یابی برای هر پایه تحصیلی دست‌کم یک‌سوم پرسشها مربوط به اندازه‌گیری تواناییهای درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله باشند. تواناییهای ریاضی نیز همانند رشته‌های محتوای ریاضی، عاملهای تفکیک شده و مجزا نیستند. این گونه تواناییها ترجیحاً راههایی را توصیف می‌کنند که به‌وسیلهٔ آن اطلاعاتی برای آموزش، به‌جود می‌آید یا راههایی که دانش‌آموز به دستورزی و استدلال یا برقراری ارتباط در مورد ایده‌های ریاضی‌اش اقدام می‌کند. به‌عنوان یک نتیجه بین آموزشگران اتفاق‌نظر جمعی در مورد سازگار بودن یک پرسش رویه‌ای، مفهومی یا حل مسئله وجود ندارد. آنچه را که می‌توان طبقه‌بندی کرد کارها و اعمالی است که یک دانش‌آموز برای پردازش اطلاعات و فراهم کردن پاسخهای رضایت‌بخش انجام می‌دهد.

بنابراین در داخل رشته‌های محتوای ریاضی، تکالیف ارزش‌یابی برحسب مقوله‌های تواناییهای ریاضی دسته‌بندی می‌شوند. جنبه‌های قدرت ریاضی (استدلال کردن، برقراری ارتباط درونی ایده‌های ریاضی و برقراری ارتباط ریاضی‌گونه (بیرونی) از راه خصوصیات یک سطح اضافی دیگر برای غنی‌سازی تکالیف ارزش‌یابی تعجب برانگیز خواهد بود. در ادامهٔ بحث به بررسی درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله می‌پردازیم تا جنبه‌های اولیه ارزش‌یابی ریاضی را نشان دهیم. برای قدرتمند کردن دانش‌آموزان در موقعیتهای ریاضی باید ابعاد گوناگون فعالیتهای شناختی با هم ترکیب شوند.

درک مفهومی: دانش‌آموزان درک مفهومی را هنگامی بروز می‌دهند که شواهد و مدارک را برای شناسایی، نشانه‌گذاری، تولید مثالها و ضدمثالها برای مفاهیم فراهم می‌کنند. به‌علاوه هنگام به‌کارگیری مدلها و برقرار کردن ارتباط درونی آنها، نمودارها، دستورزیها و نمایشهای گوناگون یک مفهوم نیز توانایی درک مفهومی خود را بروز می‌دهند. وحدت‌بخشی و به‌کارگیری اصول (گزارههای معتبری که روابط بین مفاهیم را در شکل و قالب شرطی آن تعمیم می‌دهند)، دانستن و به‌کارگیری حقایق و تعاریف، مقایسه کردن، در تقابل قرار دادن و با هم سنجیدن، یکپارچه کردن مفاهیم مرتبط و اصول برای توسعه ماهیت مفاهیم و اصول، شناسایی، تفسیر و به‌کارگیری علائم، نمادها و جملاتی که برای نمایش مفاهیم به‌کار می‌روند و یا تفسیر فرضها و رابطه‌های درگیر با مفاهیم در مجموعه‌های ریاضی، همگی از فعالیتهایی است که هنگام انجام آنها درک مفهومی دانش‌آموز نمایان می‌شود.

درک مفهومی، توانایی دانش‌آموز را برای استدلال کردن در مجموعه‌های درگیر یا کاربردهای دقیق تعاریف یک مفهوم، رابطه‌ها و نمایشهای دیگر انعکاس می‌دهد. چنین توانایی به‌وسیله عملکرد دانش‌آموزانی که مثالها، نمایشهای عمومی و ویژه را تولید می‌کنند، نمایان می‌شود. توانایی دستورزی ایده‌های اصلی دربارهٔ درک یک مفهوم در راههای گوناگون از موارد دیگر بروز درک مفهومی دانش‌آموز است.

دانش رویّه‌ای (دانش متکی بر روند همراه با عمل): دانش‌آموزان دانش رویّه‌ای در ریاضی را هنگامی بروز می‌دهند که رویه‌های مناسب را به درستی انتخاب می‌کنند و به‌کار می‌برند. دانش رویّه‌ای برای تحقیق و تصدیق درستی یک رویه در الگوهای ملموس یا روشهای نمادین به‌کار می‌رود و یا برای توسعه و اصلاح رویه‌هایی که با عوامل ذاتی در مجموعه‌های مسائل سروکاردارد.

دانش رویّه‌ای همچنین برای خواندن و تولید نمودارها، جدولها، عملکرد ساختهای هندسی و عملکرد مهارتهای محاسباتی مانند گرد کردن و مرتب کردن را شامل می‌شود. این فعالیتها می‌توانند از درک مفهومی محتوای تکالیف و یا از دانش قبلی دانش‌آموز مشتق‌شوند، ـ یعنی فرض این که دانش‌آموز از یک نمایش درک مفهومی دارد و می‌تواند آن را به‌عنوان ابزاری برای تولید یا دست‌یابی به یک نتیجه عددی به‌کار ببرد. در این مجموعه‌ها، سؤال ارزش‌یابی این است که دانش‌آموز باچه کیفیتی یک رویه را انجام می‌دهد و یا چگونه یک رویه مناسب را برای انجام یک تکلیف انتخاب می‌کند؟

دانش رویّه‌ای غالباً در توانایی دانش‌آموز و برای ایجاد ارتباط درونی یک فرایند الگوریتمی با یک موقعیت مسئله داده شده، انعکاس می‌یابد و یا برای به کار بردن درست یک الگوریتم و یا برای برقراری ارتباط بین نتایج یک الگوریتم در متن یک مجموعهٔ مسئله نیز بازتاب خواهد داشت. علاوه بر این، دانش رویه‌ای در برگیرندهٔ توانایی دانش‌آموز برای استدلال در یک موقعیت و توصیف چرایی مناسب بودن یک رویه خاص برای یک مسئله خواهد بود.

حل مسئله: در حل مسئله، دانش‌آموزان نیازمند به کارگیری انبوهی از دانش ریاضی در یک موقعیت جدید هستند. حل مسئله مستلزم این است که دانش‌آموزان مسئله‌ها را شناسایی و فرمول‌بندی کنند، استراتژیها رابه کار بگیرند و سازگاری و کفایت داده‌ها را تعیین کنند، داده‌ها، مدلها و ریاضیات مرتبط به آنها را به‌کار بگیرند (استدلالهای فضایی، استقرایی و استنتاجی، آماری و نسبیتی، قیاسی و تمثیلی) و درستی و معقول بودن راه‌حلها را داوری کنند. موقعیتهای حل مسئله مستلزم این است که دانش‌آموزان مفاهیم ریاضی را پیوند دهند و رویه‌ها، استدلال کردن و مهارتهای ارتباطی ـ نمایشی را در مواجهه با موقعیتهای جدید به‌کار بگیرند. طوری که این‌گونه موقعیتها شاید بهترین راه دست‌یابی به اندازه‌های دقیق از مهارت دانش‌آموزان در ریاضیات هستند.

انواع پرسشها

پرسشهای چندگزینه‌ای

محور توسعه ارزشیابی در ریاضی دقت در انتخاب پرسشها و تکالیف است که درحال حاضر شامل پرسشهای چندگزینه‌ای، کوتاه پاسخ و پاسخ ـ باز است. در پرسشهای چندگزینه‌ای دانش‌آموزان باید پرسش را بخوانند، عکس‌العمل (بازتاب) داشته باشند و یا مقایسه کنند. سپس بهترین گزینه‌ای که فکر می‌کنند جواب درست است، انتخاب کنند. مثال زیر از ارزش‌یابی NAEP در ۱۹۹۰ انتخاب شده است.

مثال: دربارهٔ ۸۷ درصد عدد ۱۰، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف ـ بزرگ‌تر از ۱۰ است

ب ـ کم‌تر از ۱۰ است

پ ـ برابر ۱۰ است

ت ـ نمی‌توان چیزی گفت

ث ـ نمی‌دانم

دنبالهٔ واقعی مهارتهای درک مفهومی، دانش رویه‌ای و حل مسئله را که یک دانش‌آموز باید برای پاسخ گویی به این پرسش به‌کار بگیرد، نمی‌توان به صورت دقیق و قطعی تعیین کرد. با وجود این، بهترین قضاوت کارشناسان این است که دانش‌آموز پایه هشتم احتمالاً بایستی این پرسش را در یک سطح رویه‌ای پاسخ دهد. یعنی روی مفهوم درصد بازتاب داشته باشد، عدد ۱۰ را در ۰/۸۷ ضرب کند و سپس جواب به‌دست آمده از محاسبه (۸/۷) را با گزینه‌ها مقایسه کند تا گزینه (ب) را به‌عنوان پاسخ درست انتخاب کند. در صورتی که برای یک دانش‌آموز پایه دوازدهم باید در دانش مفهومی خودش از درصد تأکید کند و از مفهوم درصد نتیجه بگیرد که پاسخ عددی کوچکتر از ۱۰ است و لذا گزینهٔ (ب) را انتخاب نماید. در نتیجه رویارویی با این پرسش در سطح پایه هشتم، رویه‌ای خواهد بود و در سطح پایه دوازدهم، درک مفهومی خواهد بود. بنابراین باید احتیاط کنیم که پاسخ‌گویی به یک پرسش در سطوح مختلف از به‌کارگیری یک توانایی خاص منتج نمی‌شود بلکه در هر سطحی از تواناییهای متفاوت استفاده می‌شود.

پرسشهای پاسخ ـ باز

پرسشهای پاسخ ـ باز به منظور روایی بیش‌تر و فراهم کردن فرصتهای معتبر برای دانش‌آموزان طراحی شده‌اند تا به کمک آنها بتوان رویکردهای دانش‌آموزان به مسائل را پیش‌بینی و قیاس کرد.

این‌گونه پرسشهای کوتاه پاسخ موجب می‌شوند که دانش‌آموزان برای ارائه یک نتیجه عددی، نام درست و یا دسته‌بندی گروهی از اشیاء ریاضی، ارائه یک مثال از یک مفهوم داده شده و یا شاید نوشتن توضیحی برای یک نتیجه داده شده اقدام کنند و مورد ارزش‌یابی قرار بگیرند. مثال زیر از ارزش‌یابی NAEP در ۱۹۹۲ انتخاب و واسازی شده است.

مثال: مریم برای خرید نهار تنها سکه‌های ۲۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۵ تومانی دارد. او همه پول نهار را پرداخت کرد بدون این که باقی‌مانده‌ای دریافت کند. آیا او می‌توانسته ۱۹۸ تومان پرداخت کند؟

آری ☐ خیر ☐

یک دلیل برای جوابتان ذکر کنید.

دانش‌آموزان برای پاسخ‌گویی به این پرسش باید بر روی موقعیت عکس‌العمل داشته باشند، محاسبات انجام دهند و جواب به‌دست آورند و سپس راه‌حل خود را وارسی کرده و برای راه‌حل خود استدلال ارائه دهند. در نمره‌گذاری، پرسشهای پاسخ ـ باز این فرصت را فراهم می‌کنند که بیش از یک پاسخ را درست بدانیم و رُشد و تحول دانش شاگردان را باور کنیم. آنها با داده‌ها و اطلاعاتی که تولید می‌کنند موجب غنای تجزیه و تحلیل ارزشیابی می‌شوند. داده‌هایی که در توصیفات و تشریح تواناییهای دانش‌آموز و بدفهمیهای او به‌طور جزئی نیز کمک می‌کنند. با وجود این که پرسشهای پاسخ ـ باز نسبت به چند گزینه‌ای قدرتمندی بیش‌تری در اندازه‌گیری مهارتها و تواناییهای ریاضی دارد، لیکن نمی‌توانند اطلاعات کافی و دقیق از سطح تغییر مهارتهای حل مسئله، استدلال و برقراری ارتباط ارائه کنند. برای این منظور نوع دیگری از تکالیف در ارزش‌یابیهای اخیر ریاضی طراحی شده‌اند. این‌گونه تکالیف را **پاسخ ـ باز گسترش یافته** می‌نامند.

پرسشهای پاسخ ـ باز گسترش‌یافته

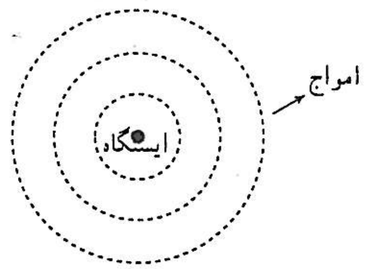
پرسشهای پاسخ ـ باز گسترش یافته موجب می‌شود که دانش‌آموزان موقعیتی را در نظر بگیرند که بیش از یک پاسخ عددی و یک ارتباط کلامی کوتاه را می‌طلبد. این‌گونه پرسشها مستلزم این است که دانش‌آموز با موقعیتی مواجه شود که وابسته به سراسر رشته‌های محتوای ریاضی است. او باید همه رشته‌های محتوای ریاضی را در نظر بگیرد تا بفهمد که چه چیزهایی برای حل مسئله، مربوط به موقعیت است و سپس طرح و نقشه‌ای برای حمله به مسئله انتخاب کند. به اجرای طرح اقدام کند و

پاسخ به‌دست آمده را برای درک آن در محیط واقعی مسئله تفسیر کند. سبک و طریقه پاسخ‌گویی به این گونه پرسشها نیازمند این است که دانش‌آموز فرایند حل خود را به‌طور کامل ارائه دهد و بین گامهای تصمیم‌سازی (به‌دست آوردن پاسخ) در موضوع مسئله ارتباط منطقی برقرار کند. مثال زیر نمونه‌ای از این‌گونه پرسشهاست.

مثال: این پرسش مستلزم این است که کارتان را نشان داده واستدلال خود را توضیح دهید. می‌توانید از ترسیمها، واژه‌ها و اعداد در توضیح خود استفاده کنید. جواب شما باید به اندازه کافی روشن باشد به‌طوری که هر شخص دیگری بتواند آن را بخواند و تفکر شما را درک کند. این مهم است که همه کارتان را نشان دهید.

* ایستگاه رادیویی KMAT در شهر ریاضیات و در فاصله ۲۰۰ کیلومتری ایستگاه KGEO از شهر هندسه واقع است. بزرگراه ۷ یک جاده مستقیم بین این دو شهر است. KMAT می‌تواند تا ۱۵۰ کیلومتری (از هر طرف) پیامهایش را انتشار دهد و KGEO می‌تواند تا ۱۲۵ کیلومتری پیامهایش را انتشار دهد. امواج رادیویی از هر ایستگاه مطابق شکل زیر در هوا ارسال می‌شود.

روی یک صفحه دیگر، نموداری رسم کنید و موارد زیر را نشان دهید :



ـ بزرگراه ۷

ـ مکان دو ایستگاه رادیویی

ـ بخشی از بزرگراه که از هر دو ایستگاه می‌تواند پیام رادیویی بگیرد.

مطمئن شوید که برچسب‌گذاریهای فاصله‌ها در مسیر بزرگراه و مسافتها برحسب کیلومتر در بزرگراه در مورد قسمتهایی که هر دو ایستگاه پیامشان دریافت می‌شود، به‌درستی انجام گرفته باشد.

در این مثال دانش‌آموزان باید از منطق و نمودار برای ایجاد ارتباط مستدل استفاده کنند قبل از این که جواب خود را ارائه کنند. بنابراین چند عنصر کلیدیِ قدرت ریاضی در این پرسش اندازه‌گیری می‌شود.

نمره‌گذاری پرسشهای پاسخ ــ باز گسترش یافته

پرسشهای پاسخ ــ باز گسترش یافته در ریاضیات باید براساس یک مقیاس رتبه‌بندی توسعه‌یافته که از یک نمونه از پاسخهای واقعی دانش‌آموزان به‌وجود می‌آید، ارزش‌گذاری شود. شیوه نمره‌گذاری مثال قبلی که نمونه‌ای از پرسشهای گسترش‌یافته است، در زیر ارائه می‌گردد تا سرمشقی برای نمره‌گذاری این گونه پرسشها باشد.

رتبه‌بندی مقوله‌ها	مقوله عملکرد دانش‌آموزان
۰	بدون پاسخ
۱	نادرست ــ کار کاملاً نادرست یا نامربوط است و یا پاسخ داده است «نمی‌دانم»
۲	کم‌ترین ــ نمودار تنها با شهرها، بزرگراه ۷ و ۲۰۰ کیلومتر نشان داده شده است، یا یک نمودار که تنها بعضی و نه همه فاصله‌ای داده شده را نشان می‌دهد : ۱۲۵، ۱۵۰ و ۲۰۰ کیلومتر. پاسخهای کمینه، ناحیه مشترک (ناحیه‌ای که پیام هر دو ایستگاه شنیده می‌شود) را مشخص نمی‌کنند.
۳	ناقص ــ نمودار شامل شهرها، بزرگراه ۷ و ۲۰۰ کیلومتر است که نشانه‌گذاری شده‌اند و ناحیه مشترک به‌عنوان طول مشخص شده است ولی روی بزرگراه مشخص نشده است. دو یا بیش‌تر از دو فاصله مربوط به امواج رادیویی : ۲۵۰ و ۱۲۵ و ۷۵ ارائه شده، که برچسب‌گذاری آنها ناکافی است.
۴	به اندازه کافی خوب ــ نمودار شامل شهرها، بزرگراه ۷ و ۲۰۰ کیلومتر و همه فاصله‌های مؤثر نشانه‌گذاری شده است و ناحیه مشترک روی بزرگراه ۷ به‌عنوان یک طول مشخص شده است. در همین حال، طولی از بزرگراه که هر دو ایستگاه امواجشان به آنجا می‌رسد به‌طور نادرست محاسبه شده است و یا اصلاً محاسبه نشده است.
۵	تعمیم یافته ــ نمودار به‌طور دقیق و بسیار خوب برچسب‌گذاری شده است (همان‌گونه که در بند قبلی توصیف شد). ناحیه مشترک (تحت پوشش هر دو ایستگاه) به صورتی واضح مشخص شده است که به طول ۷۵ کیلومتر می‌باشد.

وقتی یک مقیاس نمره‌گذاری به هنگام شده برای یک مسئله خاص، به‌وسیله تصحیح‌کنندگان با تجربه به‌کار گرفته می‌شود، اطلاعات با ارزش و غنی دربارهٔ درک مفهوم و دانش رویه‌ای از موقعیت یک مسئله فراهم می‌کند و توانایی دانش‌آموزان برای حل کردن مسئله، برقراری ارتباط مفهومی از فرایند را در موضوع مسئله موجب می‌شود.

ارزش‌یابی حل مسئله

ارزش‌یابی توانایی حل مسئله دانش‌آموزان مساوی با کنترل جواب دانش‌آموز نیست و با مؤلفه‌های دیگری از انجام دادن ریاضی درگیر است. **چگونگی پردازش اطلاعات** و کار دانش‌آموز در جریان حل کردن مسئله‌ها، متن و محور ارزش‌یابی حل مسئله است. رهیافت و چهارچوب موردنظر ما در حل مسئله ریاضی، چهارچوب چهار مرحله‌ای «پولیا» است که مراحل آن تحت عنوانهای فهمیدن مسئله، طراحی نقشه برای حل، اجرای نقشه یا حل کردن مسئله و بازنگری و بررسی جواب شناخته می‌شوند. این چهارچوب راهنما و هادی فرایند تفکر دانش‌آموز در جریان حل مسئله است که ساختاری فراهم می‌کند تا دانش‌آموز بتواند در درون آن در مسیر حل مسئله کار کند. ارزیابی پیشروی دانش‌آموز در میان مراحل این چهارچوب کمک می‌کند تا ناحیه‌هایی که دانش‌آموز در جریان حل کردن مسئله‌ها قوی یا ضعیف است، ارزش‌یابی شود. ابزارهای زیر می‌تواند برای ارزش‌یابی تواناییهای حل مسئله مورد استفاده قرار گیرد. ارزش‌یابی توانایی حل مسئله را می‌توان به صورت شفاهی و کتبی برگزار کرد. روشن است که تصحیح و نمره‌گذاری آنها با روشهای جاری تفاوت دارد. برای تسهیل در انجام ارزش‌یابی شفاهی و کتبی فرمهایی تنظیم کرده و به‌کار می‌گیریم.

۱ــ فرم مربوط به پاسخ‌گویی شفاهی ــ کتبی

این فرم می‌تواند به عنوان ابزاری برای خود ــ پرسش‌گری به دانش‌آموزان داده شود و یا به‌عنوان راهنمایی برای کار روی یک مسئله که به صورت گروه یادگیری مشارکتی انجام می‌شود، در نظر گرفت. این فرم می‌تواند برای ارزیابی پاسخهای کتبی یا شفاهی یک دانش‌آموز (منفرد) و یا برای ارزیابی ارائه کتبی یا شفاهی گروه یادگیری مشارکتی به‌کار رود. دانش‌آموزان به فرصتی نیاز دارند تا فرایند تفکرشان رادر جریان کار روی یک مسئله به صورت کلامی درآورند. این فرم به دانش‌آموزان کمک می‌کند حل کردن یک مسئله را به صورت کتبی یا شفاهی سازمان‌دهی کنند.

مسیر تفکر در حل مسئله

از آنجا که حل کردن مسئله‌ها یک فرایند اندیشیدن است، هنگامی که دانش‌آموز در طی کار روی مسئله در مراحل فرایند حل مسئله درگیر حل کردن می‌شود باید سؤالهایی از خودش بپرسید تا تفکر و اندیشیدن خود را هدایت کند. این‌گونه سؤالها به او کمک می‌کند مسئله را بفهمد. نقشه‌ای برای حل طرح کند، نقشه خود را به عمل درآورد و سپس فرایند عملکرد خود را بازنگری کند و حل خود را کنترل نماید. به‌علاوه این گونه سؤالها به او کمک می‌کند تا دربارهٔ روشهای دیگر حل مسئله بیاندیشد.

گام فهمیدن

۱ـ مسئله درباره چیست؟

۲ـ سؤال (مجهول) چیست؟

۳ـ اطلاعات داده شده در مسئله کدام است؟

۴ـ شرط مسئله چیست؟

۵ ـ آیا شرط مسئله تحقق‌پذیر است؟

۶ ـ آیا مسئله دارای اطلاعات اضافی یا کمبود اطلاعات است؟

گام طرح نقشه‌ای برای حل

۷ـ کدام‌یک از استراتژیهای حل مسئله می‌تواند مرا در حل این مسئله کمک کند؟

۸ ـ آیا این مسئله یا شبیه آن را قبلاً دیده‌ام؟ آیا می‌توانم آن را بیان کنم؟

۹ـ آیا از قضیه یا مسئله‌ای وابسته به این مسئله که بتواند سودمند باشد، آگاهی دارم؟ آیا می‌توانم آن‌را بیان کنم؟

۱۰ـ آیا می‌توان یک قسمت از مسئله را حل کرد؟

۱۱ـ آیا آنچه درباره آن می‌اندیشم جواب مسئله است؟

۱۲ـ آیا همه مفاهیم اصلی مسئله (داده‌ها و شرطها) را به کار گرفته‌ام؟

۱۳ـ آیا مجهول تازه یا داده‌های تازه‌ای به‌دست آمده است؟

گام اجرای نقشه (حل کردن)

۱۴ـ چگونه می‌توانم مسئله را حل کنم؟

۱۵ـ آیا هر گام که برمی‌دارم مسئله پیچیده‌تر می‌شود یا واضح‌تر؟

۱۶ـ آیا استراتژی انتخاب شده را درست پیاده کرده‌ام؟

۱۷ـ آیا باید سراغ استراتژی دیگری بروم؟

۱۸ـ آیا به درستی دادها و شرطهای مسئله را به‌کار می‌گیرم؟

۱۹ـ آیا ارتباط منطقی بین انجام هر گام که برمی‌دارم وجود دارد؟

گام بازنگری (نگاه به عقب)

۲۰ـ چگونه می‌توانم نتیجه را وارسی کنم؟

۲۱ـ چگونه می‌توانم دریابم که جوابم معقول است؟

۲۲ـ آیا می‌توانم نتیجه را از راه دیگری به‌دست آورم؟

۲۳ـ آیا این نتیجه یا روش را می‌توانم در مسئله دیگر به‌کار ببرم؟

گام طراحی نقشه‌ای برای حل

۷ــ بیان یک یا بیش از یک استراتژی که می‌تواند در حل مسئله کمک کند.

۰ امتیاز ــ هیچ استراتژی ارائه نمی‌کند.

۱ امتیاز ــ یک یا بیش‌تر از یک مورد استراتژی ارائه می‌کند ولی انتخابها ضعیف هستند.

۲ امتیاز ــ یک یا بیش از یک استراتژی مؤثر بیان می‌کند.

۸ ــ مسئله یا مشابه آن را قبلاً دیده است.

۰ امتیاز ــ چیزی نمی‌تواند بگوید.

۱ امتیاز ــ ناقص یا نادرست نظر می‌دهد و یا نمی‌تواند آن را ارائه کند.

۲ امتیاز ــ درست و کامل نظر می‌دهد و می‌تواند دلیل بیاورد.

۹ــ آگاهی از قضیه یا مسئله‌ای وابسته که سودمند است.

۰ امتیاز ــ چیزی نمی‌تواند بگوید.

۱ امتیاز ــ ناقص یا نادرست نظر می‌دهد.

۲ امتیاز ــ دربست و کامل نظر می‌دهد.

۱۰ــ حل قسمتی از مسئله

۰ امتیاز ــ نمی‌تواند کاری انجام می‌دهد.

۱ امتیاز ــ ناقص یا نادرست انجام می‌دهد.

۲ امتیاز ــ به‌درستی قسمتی از مسئله را حل می‌کند.

۱۱ــ تخمین یا حدس جواب مسئله به گونه‌ای معقول

۰ امتیاز ــ تخمین یا حدسی برای جواب ندارد.

۱ امتیاز ــ تخمین یا حدس معقول نمی‌دهد.

۲ امتیاز ــ تخمین یا حدسی معقول ارائه می‌کند.

۱۲ــ به کارگیری همه مفاهیم اصلی (داده‌ها، شرطها و رابطه‌ها)

۰ امتیاز ــ مفاهیم اصلی را نمی‌تواند به کار بگیرد.

۱ امتیاز ــ بعضی از مفاهیم اصلی را به‌کار می‌گیرد و یا نادرست از آنها استفاده می‌کند.

۲ امتیاز ــ همه مفاهیم اصلی را به‌کار می‌گیرد.

۱۳ــ مجهول تازه یا داده‌های تازه

۰ امتیاز ــ چیزی نمی‌تواند بگوید.

۱ امتیاز ــ به صورت ناقص یا نادرست نظر می دهد.

۲ امتیاز ــ درست و کامل نظر می‌دهد.

گام اجرا و پیاده کردن نقشه‌ها برای حل

۱۴ـ توصیف روشی برای حل که به درستی اطلاعات مسئله را به‌کار می‌گیرد.

۰ امتیاز ـ روشی برای حل نمی‌دهد.

۱امتیاز ـ روش داده شده برای حل نادرست است.

۲ امتیاز ـ روش درستی برای حل مسئله ارائه می‌کند.

۱۵ـ هر گام که اجرا می‌شود حل مسئله واضح‌تر می‌شود و یا پیچیده‌تر می‌شود.

۰ امتیاز ـ نمی‌تواند چیزی بگوید.

۱ امتیاز ـ ناقص یا نادرست نظر می‌دهد.

۲ امتیاز ـ به صورت درست و کامل تشریح می‌کند.

۱۶ـ پیاده کردن استراتژی انتخاب شده :

۰ امتیاز ـ نمی‌تواند استراتژی را به‌کار ببرد.

۱ امتیاز ـ استراتژی را ناقص یا نادرست اجرا می‌کند.

۲ امتیاز ـ به درستی استراتژی را اجرا می‌کند.

۱۷ـ تصمیم در مورد جست‌وجوی استراتژیهای دیگر :

۰ امتیاز ـ نمی‌تواند تصمیم‌گیری کند.

۱ امتیاز ـ ناقص یا نادرست تصمیم می‌گیرد.

۲ امتیاز ـ تصمیم درستی می‌گیرد.

۱۸ـ چگونگی به کارگیری داده‌ها و شرطهای مسئله در مرحله اجرای نقشه :

۰ امتیاز ـ نمی‌تواند داده‌های مسئله و شرطها را در حین اجرا به‌کار بگیرید.

۱ امتیاز ـ داده‌های مسئله و شرطها را ناقص و یا نادرست به کار می‌برد.

۲ امتیاز ـ داده‌ها و شرطهای مسئله را به درستی مورد استفاده قرار می‌دهد.

۱۹ـ برقراری ارتباط منطقی در اجرای هر مرحله از گام اجرای نقشه حل

۰ امتیاز ـ مرحله‌هایی که اجرا می‌کند ارتباط منطقی ندارد.

۱ امتیاز ـ ناقص یا نادرست بین مرحله‌هایی که اجرا می‌کند، ارتباط ایجاد می‌کند.

۲ امتیاز ـ در حین اجرا ارتباط منطقی بین مرحله‌های اجرای نقشه را در نظر دارد.

گام بازنگری (نگاه به عقب)

۲۰ــ چگونگی وارسی نتیجه یا جواب :

۰ امتیاز ــ چیزی نمی‌تواند بگوید.

۱ امتیاز ــ به صورت ناقص یا نادرست روشی برای وارسی بیان می‌کند.

۲ امتیاز ــ به صورت درست و کامل روشی برای وارسی بیان می‌کند.

۲۱ــ معقول بودن جواب :

۰ امتیاز ــ نمی‌تواند در مورد معقول بودن جواب چیز بیان کند.

۱ امتیاز ــ عبارت بیان شده به صورت ناقص یا نادرست معقول بودن جواب را بیان می‌کند.

۲ امتیاز ــ به صورت کامل و درست توضیح می‌دهد.

۲۲ــ روشی دیگر برای به‌دست آوردن جواب :

۰ امتیاز ــ استراتژی دیگری را تشریح نمی‌کند.

۱ امتیاز ــ استراتژی دیگری را بیان می‌کند ولی انتخاب ضعیفی کرده است.

۲ امتیاز ــ استراتژی مفید دیگری را توصیف می‌کند.

۲۳ــ کارآیی نتیجه در مسئله‌ای دیگر :

۰ امتیاز ــ چیزی نمی‌تواند بگوید.

۱ امتیاز ــ ناقص و یا نادرست نظر می‌دهد.

۲ امتیاز ــ نظر درستی می‌گوید و می‌تواند دلیل یا مثالی ارائه کند.

اکنون لازم است نکات مهمی در رابطه با ارزش‌یابی حل مسئله و فرمهای ارزش‌یابی شفاهی یا کتبی و فرمهای نمره‌گذاری مربوط به آنها در نظر گرفته شود.

الف ــ تفاوتی اساسی بین این گونه ارزش‌یابی توانایی حل مسئله و روشهای دیگر ارزش‌یابی وجود دارد. شیوه‌های ارزش‌یابی ریاضی که به‌طور سنتی در نظام ارزش‌یابی ریاضی مدارس ما جریان دارد نیز با این روش تفاوت زیاد دارد. در نظام ارزش‌یابی جاری و امتحانات ریاضی یا توجهی به ارزش‌یابی روش آموزش دروس نمی‌شود و یا بسیار ضعیف و حاشیه‌ای به آن پرداخته می‌شود. در صورتی که در ارزش‌یابی توجه به ارزش‌یابی روش آموزش به هیچ‌وجه کم‌تر از ارزش‌یابی محتوای موضوع نیست. به علاوه این نوع ارزش‌یابی خود یک فرصت یادگیری ریاضی کم‌نظیر فراهم می‌کند. بنابراین یکی از اهداف و استانداردهای ارزش‌یابی که همانا یادگیری است از این روش محقق می‌گردد و نهایتاً می‌توان گفت کیفیت و چگونگی و مسیر تفکر دانش‌آموز نیز مورد

ارزیابی قرار می‌گیرد. نتیجه دست‌یابی به این ابعاد ارزش‌یابی موجب می‌شود تا مراحل برتر تفکر مورد ارزیابی قرار گیرد.

ب ــ این فرمهای ارزش‌یابی و نمره‌گذاری حل مسئله به پایه‌ها و مقاطع یادگیری ریاضی و گاهی رشته‌های محتوا وابسته است. بدین معنی که در پایه‌های پایین‌تر این فرمها می‌توانند خلاصه‌تر باشند. به‌عنوان مثال در دوره ابتدایی و راهنمایی می‌توان تعداد سؤالهای هر گام را تا دو سؤال کاهش داد. به عکس در پایه‌های بالاتر و دبیرستان و یا مسائل مبارزه طلب این فرمها می‌تواند تکمیل‌تر شود و سؤالات بیش‌تری در هر گام در نظر گرفته شود. در مورد موضوعات نیز می‌توان نوعی وابستگی تبیین کرد.

پ ــ این نوع ارزش‌یابی متضمن وقت بیش‌تری است. نتیجه این گونه ارزش‌یابی دارای اعتبار و روایی بالایی است و برای شناسایی استعدادها یکی از بهترین روشها است.

ت ــ این نوع ارزش‌یابی برای تحقیق و پژوهش کیفی در مورد موضوعات گوناگون آموزش بسیار مناسب است. در تحقیق کمی نیز وضع مشابه است.

ویژگیهای معلم

مؤثرترین عامل در کیفیت یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی معلم است. دانش ریاضی دانش‌آموزان، اعتماد به نفس آنها و باورشان نسبت به ریاضی، توانایی آنها در استدلال و حل مسئله، همه توسط تصمیمات پداگوژیکی و دانش ریاضی معلم شکل می‌گیرد. از این رو اصول تدریس برمسئولیت معلم در خلق کلاس درس به عنوان محلی برای فکر کردن و یادگیری تأکید دارد. یک چنین تدریسی فقط توسط معلمینی می‌تواند انجام شود که به حرفهٔ خود تسلط داشته و امکان به روز کردن علم خود را داشته باشند؛ هم‌چنین، معلمینی که فرآیند آموزش را تجزیه و تحلیل کرده و بازتاب آن را روی تدریس و یادگیری داشته باشند، تکالیف را با ارزش شمرده و بر نحوهٔ انجام آنها نظارت داشته باشند و فضای کلاس را به محیطی برای بحث و گفتگوی هدف‌دار تبدیل کنند.

جورج پولیا، در کتاب خلاقیت ریاضی، ده دستورالعمل برای معلمان عنوان کرده است که هنوز هم می‌توان آنها را به‌عنوان توصیه‌های مؤثر در امر تدریس بهتر در نظر گرفت.

ده دستورالعمل برای معلمان

۱ـ به موضوع درس خود علاقه‌مند باشید.

۲ـ به ماده درسی خود، مسلط باشید.

۳ـ بدانید، از چه راهی می‌توانید آن چه را در نظر دارید یاد بدهید؟ بهترین روش یاد دادن را خودتان پیدا کنید.

۴ـ به چهرهٔ شاگردان خود نگاه کنید تا متوجه انتظارهای آنها بشوید. دشواریهای آنها را کشف کنید، توانایی این را داشته باشید که بتوانید خودتان را به جای آنها بگذارید.

۵ ـ به آگاهیهای خشک و عریان قناعت نکنید. بکوشید مهارت را که لازمهٔ عقل و اندیشه است و عادت به کار منظم را، در دانش‌آموزان تقویت کنید و تکامل بخشید.

۶ ـ بکوشید تا حدس زدن و پیش‌بینی کردن را به آنان بیاموزید.

۷ـ سعی کنید اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد بدهید.

۸ ـ در مسئله‌ای که طرح شده است، چیزی را جستجو کنید که برای حل مسئله‌های دیگر مفید است. از موقعیتی که مسئلهٔ مشخصی مفروض دارد، روش کلی را کشف کنید.

۹ـ راز خود را بالافاصله فاش نکنید. اجازه بدهید دانش‌آموزان تا آنجا که می‌توانند تلاش خود را برای حل یا حدس راه‌حل، به‌کار برند. به دانش‌آموزان امکان بدهید هر چه بیش‌تر خودشان را کشف کنند.

۱۰ـ با اشاره‌های خود، دانش‌آموزان را راهنمایی کنید ولی عقیدهٔ خود را به زور به آنها تحمیل نکنید.

بخش دوم

راهنمای تدریس ریاضیات سال اول آموزش متوسطه

چهارچوبی برای پویاسازی دیدگاه دانش‌آموزان به جبر

مقدمه

بسیاری از مردم چنین گمان می‌کنند که «جبر» یعنی کار کردن با نمادها اما در سالهای اخیر گفت‌وگوهای بسیاری بین متخصصین آموزش ریاضی صورت گرفته که تأکید بر درک مفاهیم مهم جبری در سالهای پایین داشته‌اند. برای روشن شدن این ادعا، نشان خواهیم داد که در یک کلاس راهنمایی که دانش‌آموزان اعداد گویا را می‌خوانند با این هدف که بتوانند نسبتها را مقایسه کنند، چگونه می‌توان استدلال دانش‌آموزان را به سمت درک ایده‌های جبری سوق داد.

توصیف مسئله: مدرسه یک میهمانی نهار برای اولیای دانش‌آموزان ترتیب داده است واز کلاس خواسته است تا از چهار دستور تهیهٔ شربت توت‌فرنگی که از مخلوط کردن آب معدنی و عصارهٔ توت‌فرنگی به نسبتهای مختلفی تهیه می‌شود، یکی را انتخاب کنند و سپس تصمیم بگیرند برای تهیهٔ ۱۲۰ لیوان از این شربت در هر یک از این چهار دستور، چند لیوان آب معدنی و چند لیوان عصارهٔ توت‌فرنگی لازم است.

دستور الف : ۲ لیوان عصارهٔ توت‌فرنگی
۳ لیوان آب معدنی

دستور ب : ۴ لیوان عصارهٔ توت فرنگی
۸ لیوان آب معدنی

دستور ج : ۳ لیوان عصارهٔ توت‌فرنگی
۵ لیوان آب معدنی

دستور د : ۱ لیوان عصارهٔ توت‌فرنگی
۴ لیوان آب معدنی

بحث: این فعالیت در یک کلاس درس اجرا شد. چون مسئله گروهی مطرح شده بود، کلاس کاملاً زنده بود و دانش‌آموزان با یک‌دیگر ارتباط برقرار می‌کردند. آنان این سؤال را که در کدام دستور شربت بیش‌ترین مقدار عصاره را دارد به روشهای مختلفی تعبیر کردند. بعضی به تعداد لیوانهای عصاره در هر دستور تهیه نگاه کردند. بعضی به نسبت عصاره به آب معدنی، و کسانی هم بودند که نسبت عصاره به تمام شربت را در چهار دستور تهیه مقایسه نمودند. بعد از مقایسهٔ این روشها و بحث

در مورد انتخاب شربت مناسب کلاس به چهار گروه تقسیم شد تا دستور تهیهٔ ۱۲۰ لیوان شربت را برای هر کدام از این چهار نسبت به‌دست آورند. گروهها این طور استدلال کردند.

گروهی که با دستور تهیهٔ الف کار کرد: ما فکر کردیم که دستور تهیهٔ ما روی هم ۵ لیوان شربت درست می کند : ۲ لیوان عصاره و ۳ لیوان آب. پس برای تهیهٔ ۱۲۰ لیوان شربت باید ۱۲۰ را بر ۵ تقسیم کنیم که حاصل آن ۲۴ است و سپس ۲۴ بار با همان دستور تهیهٔ شربت بسازیم.

برای این که تعداد لیوانهای عصاره را به‌دست آوریم، ۲ را در ۲۴ ضرب می‌کنیم و ۴۸ لیوان عصاره به‌دست می‌آید. برای این که تعداد لیوانهای آب را به دست آوریم، ۳ را در ۲۴ ضرب می‌کنیم، ۷۲ به‌دست می‌آید. پس ۴۸ لیوان عصاره و ۷۲ لیوان آب، ۱۲۰ لیوان شربت می‌دهند و هنوز شربت به‌دست آمده همان مزهٔ شربت اولی را می‌دهد چون نسبت عصاره به آب هنوز ۲ به ۳ است.

گروهی که به دستور تهیهٔ ب کار کرد: دیدیم که مقدار آب دو برابر مقدار عصاره است پس ۱۲۰ لیوان را به سه قسمت مساوی تقسیم کردیم : ۴۰ + ۴۰ + ۴۰ لیوان. از آن‌جا که آب دو برابر عصاره است، دو قسمت باید به آب نسبت داده شود. پس ۸۰ = ۴۰ + ۴۰ لیوان آب لازم داریم و ۴۰ لیوان عصاره، این کار ۱۲۰ لیوان شربت درست می‌کند و نسبت عصاره به آب هنوز همان ۱ به ۲ است.

گروهی که با دستور تهیهٔ ج کار کرد: زمان زیادی صرف حل مسئله شد. اول دستور را دو برابر کردیم اما کافی نبود پس یک‌بار دیگر دستور را اجرا کردیم و هنوز ۱۲۰ لیوان شربت نداشتیم اما بالاخره الگویی پیدا کردیم :

عصاره : آب $\frac{۳}{۵}$ برای ۸ لیوان شربت، $\frac{۶}{۱۰}$ برای ۱۶ لیوان شربت، $\frac{۹}{۱۵}$ برای ۲۴ لیوان شربت، $\frac{۱۲}{۲۰}$ برای ۳۲ لیوان شربت ... این کار را ادامه دادیم تا به ۱۲۰ لیوان شربت رسیدیم و آن با نسبت $\frac{۴۵}{۷۵}$ به‌دست آمد یعنی ۴۵ لیوان عصاره و ۷۵ لیوان آب احتیاج داریم تا ۱۲۰ لیوان شربت به‌دست آوریم. (بعد در بحثهای کلاسی این گروه مشاهده کرد که می‌توانست مستقیماً از $\frac{۳}{۵}$ کسر $\frac{۴۵}{۷۵}$ را با ضرب کردن صورت و مخرج در ۱۵ به‌دست آورد زیرا آنها احتیاج داشتند دستور تهیه را ۱۵ بار تکرار کنند.)

گروهی که با دستور تهیهٔ د کارکرد: ما چندین عدد را امتحان کردیم. اول ۲۰ لیوان عصاره برای این مقدار عصاره چهار برابر آب می‌خواستیم یعنی ۸۰ لیوان آب که روی هم فقط ۱۰۰ لیوان شربت درست می‌کرد. پس ما ۳۰ لیوان عصاره را امتحان کردیم که چهار برابر آب لازم داشت یعنی

۱۲۰ لیوان اما این خیلی زیاد می‌شود. پس ۲۵ لیوان عصاره را امتحان کردیم. چهار برابر آب می‌شود ۱۰۰ لیوان که ۱۲۵ لیوان شربت می‌دهد که تقریباً به آن‌چه می‌خواستیم نزدیک است اما هنوز زیاد است. پس ۲۴ لیوان عصاره را امتحان کردیم که با ۹۶ لیوان آب دقیقاً ۱۲۰ لیوان شربت درست کرد. هنوز نسبت عصاره به آب ۱ به ۴ بود. (یکی از دانش‌آموزان توجه کرد که ۱۲۵ لیوان شربت یک بار زیادی از دستور تهیه استفاده نموده است پس یک لیوان عصاره کم کرد و چهار لیوان آب کم کرد تا ۱۲۰ لیوان شربت به‌دست آید. او هم به همان نسبتی رسید که سایر دانش‌آموزان رسیدند. یعنی ۲۴ لیوان عصاره و ۹۶ لیوان آب.)

در حین این بحثها که توسط معلم هم هدایت می‌شد کلاس به شباهتها و تفاوتهای استراتژی چهار گروه توجه کرد. بعضیها گفتند که تعداد لیوانهای عصاره که باید در دستور تهیه استفاده شود، می‌تواند با کسری به شکل $\frac{\text{تعداد لیوانهای عصاره}}{\text{تعداد کل لیوانهای شربت}}$ که مخرج آن ۱۲۰ است، به‌دست بیاید.

تفکر جبری کجاست؟

اگر چه دانش‌آموزان از نمادها استفاده نکردند، هر گروه نمایشهای خاصی پدید آورد تا فکر خود را مرتب کند و احساس یک متغیر را بسازد. یک آزمایش دقیق‌تر از روند تفکر نشان می‌دهد که دانش‌آموزان سعی می‌کردند از مفاهیم نسبت، آهنگ تغییر و رشد خطی درک بهتری به‌دست آورند.

گروه الف ــ این گروه به نظر چنین الگویی در ذهن داشت :

کل تعداد لیوانهای شربت	لیوانهای آب	لیوانهای عصاره توت‌فرنگی
۵	۳	۲
۱۲۰	؟	؟

با استدلال در مورد کمیتها، آنها به این نتیجه رسیدند که اگر R تعداد مرتبه تکرار دستور تهیه باشد و T تعداد لیوانهای شربت به‌دست آمده باشد، $T = 5R$ که یک معادلهٔ خطی است چون برای افزایش هر بار کاربرد دستور تهیه، ۵ لیوان شربت بیش‌تر داریم که این نمایندهٔ آهنگ تغییر ثابت است. هم‌چنین، آنها از این ایده استدلال کردند که هر کدام از مواد اولیه چه‌قدر باید به‌کار برده شود. تعداد لیوانهای عصاره توت‌فرنگی موردنیاز S از فرمول $S = 2R$ و تعداد لیوانهای آب معدنی W از فرمول $W = 3R$ به‌دست می‌آید.

گروه ب ــ این گروه هم در مورد کمیت استدلال کرد. آنها از کل به‌عنوان سه بخش مساوی

تعبیر کردند. این استدلال به نسبت بین عصاره توت‌فرنگی و آب معدنی تکیه داشت.

S
W
W

پس ۱۲۰ لیوان = دو قسمت آب W + یک قسمت شربت S

گروه ج ــ این گروه با کمک زوج مقادیر عصاره و آب یک الگو ساخت:

(۳,۵) , (۶,۱۰) , (۹,۱۵),...

آنها همهٔ زوجها را بررسی کردند تا ببینند آیا $S + W = ۱۲۰$ می‌شود یا خیر؟ آنها معادله را با استدلال در مورد این که $\frac{S}{W} = \frac{۳}{۵}$ حل کردند.

گروه د ــ این گروه از آزمون و خطا برای استدلال استفاده نموده سعی می‌کرد تا محدودیتهای $S + W = ۱۲۰$ و $W = ۴S$ را رعایت کند.

کل تعداد لیوانهای شربت	T تعداد لیوانهای آب معدنی	S تعداد لیوانهای عصاره توت‌فرنگی
(خیلی کم) ۱۰۰	۸۰	۲۰
(خیلی زیاد) ۱۵۰	۱۲۰	۳۰
(کمی زیاد) ۱۲۵	۱۰۰	۲۵
(مقدار لازم) ۱۲۰	۹۶	۲۴

دانش‌آموزان این کلاس درگیر مسئله‌ای شدند که به زبانی که برایشان معنی داشت، طرح شده بود. به آنها اجازه داد که مسئله را آن‌طور که خودشان می‌خواهند بررسی کنند. پس چندین روش برای استدلال به‌دست آوردند و ایده‌های پنهان آهنگ تغییر، رابطهٔ خطی، استدلال نسبتی را خودشان به‌دست آوردند. در چنین موقعیتهایی بسیار مهم است که معلم مفاهیم جبری درحال شکل‌گیری را بشناسد و به آنها توجه کند؛ نه این که آنها را به صورت مجرد آموزش دهد؛ بلکه به دانش‌آموزان کمک کند تصمیم‌گیریهای مناسب را در فعالیتهای پی‌درپی اتخاذ کنند و بحث کلاسی را جهت بدهند و آنها را متوجه راههای مناسب کند تا فرصتهایی به‌دست آید تا از کلماتی برای شکل‌گیری مفاهیم جبری استفاده نماید. (مثلاً بگوید هر دستور تهیه جدید، ۵ لیوان شربت بیش‌تر) و ذهن دانش‌آموزان را برای توسعهٔ درک خودشان خالی بگذارد.

سؤالهایی که مطرح می‌شود این است که:

■ چگونه می‌توان تجربیاتی همانند این تجربه که تفکر جبری را رشد می‌دهند، در همهٔ سطوح و

پایه‌ها طراحی کرد؟

■ چگونه می‌توان از دبستان تا دبیرستان آموزش جبر را جاری نمود؟

■ چه دانش ریاضی و آموزش ریاضی باید در اختیار معلم قرار گیرد تا بتواند تجربیات پر فایده‌ای برای دانش‌آموزان در مورد تفکر جبری به‌وجود بیاورد؟

رشد تفکر جبری

جبر، ریشه در بسیاری از فعالیتهای انسانی دارد. از تجارت گرفته تا مطالعهٔ اعداد و تا اثرگذاری روی سایر شاخه‌های ریاضیات. مرکزیت و اهمیت جبر در ریاضیات نمایندهٔ قدرت آن برای نمایش فشرده و مؤثر ارتباطات ریاضی مستتر در این فعالیتهای انسانی و بر ملا کردن ساختار درونی والگوهای مهم آنهاست. کاربردی بودن جبر معمولاً از دیدگاه مفاهیم آن و الگوهای استدلالی آن درک می‌شود که در طول زمان برای حل مسائل در فعالیتهای روزمره انسانی تغییر شکل داده است. یک چهارچوب برای تفکر درمورد جبر باید این مفهوم را دربر بگیرد که جبر نه تنها یک سیستم نمادین برای بیان و کاربرد اطلاعات و روابط کمی است بلکه یک زمینهٔ آموزش مناسب برای استدلال دقیق و قانونمند است. این که رشد علم جبر نقش مهمی در تاریخ ریاضیات داشته است و این که ساختار تئوری آن بر پایهٔ مفاهیم و اصولی است که قابل تعمیم هستند تا تقریباً هر شاخه ریاضی دیگری را ساختارمند نمایند.

دربارهٔ چنین چهارچوبی در دو بخش می‌توان فکر کرد:

ـ محتوای آموزش جبر

ـ استراتژیهای برنامه‌ریزی

مسئلهٔ شربت توت‌فرنگی یک محتوا برای تفکر جبری به‌دست می‌دهد ولی مهم است که استراتژیهایی برای روند آشنایی دانش‌آموزان با جبر در همهٔ پایه‌ها داشته باشیم. توسعهٔ دانش جبر و تفکر جبری در همین محتوا نهفته است اما این محتواها با یک‌دیگر توسط نظامهایی ارتباط دارند تا برنامهٔ درسی ریاضی را همگن سازند.

بررسی تفکر جبری در ساختار محتوا

دانشمندان اسلامی در شکل‌گیری و توسعهٔ علم جبر نقش شایانی داشته‌اند. خوارزمی و خیام دو نمونهٔ برجسته از خیل ریاضیدانان سالهای شکوفایی تمدن اسلامی هستند. خیام بین جبر و هندسه ارتباط برقرار نمود.

در قرن نوزدهم میلادی این رشته جای خود را در برنامهٔ درسی دبیرستانها باز کرد و تا همین

اواخر، درس جبر محدود به یک یا دو درسی می‌شد که به آموزش تکنیکهای لازم برای حل معادلات، کاربرد جملات نمادین و حل مسائل کلامی می‌شد و سپس به مهارتهای محاسباتی دانش‌آموزان پرداخته می‌شد. این نظرات که آموزش جبر باید چه محتوایی جز این داشته باشد تا پیش از سال ۱۳۷۰ جابه‌جا در سطح بین‌المللی مطرح بود. ظهور تکنولوژی و سیستمهایی که با نمادها کار می‌کردند، بسیاری را ناچار کرد تا دیدگاه خود نسبت به آموزش جبر را تغییر دهند. از مهم‌ترین اهداف حل مسئله، استدلال، برقراری ارتباط با دیگر دانش‌آموزان و برقراری ارتباط با دیگر شاخه‌های ریاضی بود. از آن‌جا که این روند تفکر و استدلال باید حول موضوعی باشد، درک دانش‌آموزان از مفاهیم جبر باید از طریق فعالیتهایی در موقعیتهای واقعی شکل بگیرد. محتوایی مانند رشد، تغییر، شکل، اندازه، داده‌ها، عدم قطعیت، عدد و الگوها سرچشمه‌های مولدی برای تمرکز تفکر ریاضی هستند به‌خصوص برای دانش‌آموزان این فرصت را فراهم می‌کنند که علم جبر را بیاموزند و در زندگی روزمره و سایر شاخه‌های ریاضی به‌کار ببرند. برای مثال مطالعهٔ رشد جمعیت مصداقی برای درک رشد و تغییر، و حساب کردن تعداد اتوبوسهایی که برای جابه‌جا کردن جمعیت زیادی لازم است، مصداقی برای درک اعداد، و به‌دست آوردن فرمولی برای رتبه‌بندی ورزشکاران، مصداقی برای درک داده‌هاست. در چنین مصداقهایی، محتوا می‌تواند به نمایش جبری معنا بدهد و به دانش‌آموزان اجازه دهد تا نسبت به معنا در جایی که برای درک بهتر لازم باشد، عکس‌العمل نشان دهند.

به علاوه، این ساختار محتوایی به دانش‌آموزان کمک می‌کند که به جهان اطراف ارتباط برقرار کنند. ایده‌هایی مثل رشد و تغییر می‌توانند در مصداقهای بسیار متنوعی مانند رشد کلونی باکتریها، حرکت یک ماشین یا به‌دست آوردن دستور تهیهٔ شربت ظاهر شوند.

آن‌چه بین همهٔ این موقعیتها مشترک است، این است که چگونه تغییر در یک کمیت به تغییر در کمیت دیگری منجر می‌شود. اگر چه بسیار مهم است که به ساختار محتوای مورد مطالعه و ارتباط آن با ریاضیات پنهان در آن توجه شود.

این ساختار محتوا می‌تواند بر پایهٔ کاربردهای ریاضیات یا دیدگاههای تاریخی در باب ریاضیات استوار شود. مثلاً توصیف ارتباط بین صفرهای چند جمله‌ای، فاکتورهای آن و نمودار آن یک اکتشاف درون ریاضی است. اما تولید یک مشابه جبری برای استدلالهای هندسی توسط ریاضیدانانی چون خیام و فیبوناتچی می‌تواند محتوای جذابی برای دانش‌آموزان به‌دست دهد. یا تثلیث زاویه با خط‌کش و پرگار و رسم دایره‌ای با مساحت داده شده مسائلی هستند که در تاریخ ریاضیات محققین را به پیدا کردن صفرهای چند جمله‌ای سوق دادند.

دانش‌آموزان در حین انجام فعالیتها مفهوم‌سازی می‌کنند و الگوهایی برای تفکر پیدا می‌کنند که آنها را با محتوای مورد مطالعه درگیر نماید. چنین محتوایی به دانش‌آموز کمک می‌کند درک ملموسی از جبر داشته باشد.

همگن‌سازی برنامهٔ درسی جبر با کمک جریانهای مفهومی و مهارتی

ساختار محتوا به ما کمک می‌کند که به ایده‌های مهم ریاضی معنی ببخشیم. اگرچه یک مشکل ذاتی وجود دارد و آن این که دانش‌آموزان که یک سری تجربیات عملی داشته‌اند ممکن است احساس کنند این تجربیات انسجام لازم برای یک برنامهٔ درسی را ندارد. اگر یک دانش‌آموز عمیقاً در یک فعالیت عملی غرق شود و سپس به فعالیت دیگری بپردازد، ممکن است ایده‌های مشترک این فعالیتها را نبیند. اگرچه معلمان و برنامه‌ریزان ممکن است الگوهای فکری خاصی یا مفاهیم خاصی را در یک سری مسئله‌ها مشترک ببینند اما باز ممکن است دانش‌آموزان به علت غنای هر یک از فعالیتها آن اشتراکات را تشخیص ندهند.

در تجربه‌ای که در مورد مسئلهٔ ساختن شربت داشتیم، دانش‌آموزان در مورد ارتباط بین کمیتها فکر می‌کردند اما تفکر در مورد آهنگ تغییر، نسبت یا توابع خطی است که می‌تواند این مسئله را به مسائل دیگرارتباط دهد ؛ مسائلی که ممکن است در نظر اول طبیعتی بسیار متفاوت داشته باشند. توانایی تعمیم، توسعه، کاربرد و ارتباط برقرار کردن بین ایده‌ها در موقعیتهای متفاوت و پایه‌های مختلف است که دانش‌آموزان راقادر می‌سازد درک ملموسی از ریاضیات داشته باشند و به آن به‌عنوان یک‌سری ایده‌هایی که بین مسائل اتحاد به‌وجود می‌آورند نگاه کنند نه به‌عنوان یک سری ایده‌ها و مسئله‌های جدا از هم.

یکی از ابعادی که تلاشهای آموزشگران ریاضی در بازنگری به آموزش جبر بر آن تأکید دارد، جریانهای مفهومی و مهارتی است. این جریانها چنان انتخاب می‌شود که هماهنگی محتوا و همگن بودن برنامه را تضمین کنند. همین‌طور که علم آموزش ریاضی پیشرفت می‌کند، جریانهای مورد تأکید تغییر می‌کند. برای مثال پیش از این تنها جریانهای مفهومی در نظر گرفته می‌شد اما در دههٔ اخیر با ظهور ماشین حسابهایی که رسم نمودار و مدلسازی می‌کنند، توجه برنامه‌ریزان آموزش جبر به این سمت منعطف شده است. برای این که در کمک کردن به دانش‌آموزان برای برقراری ارتباط و درک ایده‌های بزرگ موفق باشیم معلمان و برنامه‌ریزان باید چندین جریان مفهومی و مهارتی را مدنظر قرار دهند. در این‌جا برای نمونه چند مثال مهم از این جریانها خواهیم آورد :

جریان مفهومی تابع و ارتباط بین متغیرها

مفاهیم ریاضی ارتباط بین متغیرها مانند معادله، جدول، نمودار بسیار در علم جبر رایجند. نمایش ارتباط بین متغیرها با کمک معادله به ما کمک می‌کند به حجم زیادی از محتوای ریاضی نظم ببخشیم. مطالعهٔ توابع به عنوان مرکز توجه آموزش جبر در دو دههٔ اخیر رایج شده است.

توابع در تمام سیستمهای نمایش نمادین جبر قابل نمایش هستند و می‌توانند در روند اکتشاف بسیاری از مسائل به دانش‌آموز خدمت کنند. مثلاً در مطالعهٔ رشد جمعیت، دانش‌آموزان ممکن است یک تابع را با یک جدول، نمودار یا نمادها نمایش دهند. در موقعیتهایی که تبدیلات هندسی در کارند، دانش‌آموزان می‌توانند تبدیلات را با ماتریس نمایش دهند. توابعی که تعریف بازگشتی دارند به خاطر اهمیتشان در علم کامپیوتر نقش مهمی در مسائل علمی و اقتصادی بازی می‌کنند. تغییر و متغیر از ایده‌های مهم در مفهوم تابع هستند و می‌توانند در محتوای برنامهٔ درسی نقش بازی کنند. مثالهایی نظیر این که چه اتفاقی می‌افتد، اگر یک کیک بین تعداد بیش‌تر و بیش‌تری از میهمانان تقسیم شود، از مسائل مناسب برای دوران دبستان هستند. در دبیرستان مثالها ممکن است به پیچیدگی بررسی مشتق یک تابع و کاربردهای آن باشند. موقعیتهای دیگری هم هستند که ارتباط بین متغیرها موقعیت را به خوبی توصیف می‌کند. برای مثال قضیه فیثاغورث طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را به هم مربوط می‌کند و رابطهٔ اولر تعداد رئوس موجود و یالها را در یک شکل هندسی به هم مرتبط می‌کند. در کلاس ابتدایی ارتباطاتی نظیر «تعداد دماغها و گوشها سه برابر تعداد دانش‌آموزان کلاس است» کاربرد دارند. اما در دبیرستان این ایده‌ها فعالیتهای باارزشی در تمام پایه‌ها را مطرح می‌کنند که به طور هم‌زمان می‌توان با کمک آنها در جریان توسعهٔ مفاهیم تابع و ارتباط بین متغیرها حرکت کرد.

جریان مهارتی مدلسازی

مدلسازی به‌عنوان یک جریان مهارتی حدود دو دهه است که مطرح شده. بسیاری از پدیده‌های پیچیده می‌توانند توسط فرمولهای جبری نسبتاً ساده مدلسازی شوند. برعکس، می‌توان به پدیده به‌عنوان تجسد ارتباطات جبری نگاه کرد به طوری که مشغول شدن به فرایندهای پیچیده مدلسازی پدیده‌ها به درک بهتر ارتباطات جبری کمک کند. در سالهای اولیه دبستان، دانش‌آموزان ارتباط بین تعداد کفشها و تعداد صاحبان آنها را با کمک شمارنده‌هایی که نماینده کفشها هستند، به‌دست می‌آورند. استدلال با این کمیتها به بچه‌ها کمک می‌کند الگوهایی بیابند و دربارهٔ تعداد کفشها و تعداد صاحبان آنها پیشگویی کنند. در دورهٔ راهنمایی، دانش‌آموزان حتی ممکن است بتوانند ارتباط خطی بین متغیرها را با آزمایش و آوردن نتایج روی نمودار کشف نمایند. در دبیرستان، دانش‌آموزان برای این ارتباطها

نمایش نمادین به‌دست می‌دهند و به حالتهای جدی توجه می‌کنند و عملکرد مدل را با پدیدهٔ واقعی مقایسه می‌کنند. آنها قادرند پیشگوییهایی را که توسط مدل پیشنهاد می‌شود با نتایج واقعی تطبیق دهند. درموقعیتهای دیگر مانند مقدار داروی تجویز شده که هنوز در بدن حضور دارد، فرمولهای بازگشتی به ما کمک می‌کنند که مقدار دارو را با توجه به دوز آن، آهنگ متابولیسمهای بدن و دیگر عوامل پیشگویی کنیم. در دیگر موقعیتها ماتریسها یا سیستمهای معادلات می‌توانند شبکه‌های زیست‌محیطی یا تصمیمهای اقتصادی را مدلسازی کنند. قدرت یک مدل ریاضی در دسترس بودن آن مدل و کاربرد آن نهفته است. تابع ساده‌ای مانند $f(x) = x(a - bx)$ ممکن است دو پدیدهٔ کاملاً متفاوت را مدلسازی کند. مثل مساحت مستطیلهای با محیط ثابت: دراین‌جا $2P = 2L + 2W$, $A = L(P - L)$. و یا سود حاصل از یک محصول وقتی که قیمت تمام شده تابعی از تعداد محصول تولید شده باشد. دراین‌جا قیمت تمام شده $= 20n + 10$ و قیمت فروش $= 40$. سود $= P$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید: $P = n(40 - (20n + 10)) = n(30 - 20n)$.

دانش به‌دست آمده در یک محتوا می‌تواند به ما اطلاعاتی در مورد مدل بدهد که در کاربردهای آن مدل در محتوایی کاملاً متفاوت به کار آید. نظر به روابط جبری از دید پدیده‌هایی که مدلسازی شده‌اند، راه مؤثری برای زندگی بخشیدن به محتوا و بالا بردن آموزش جبر به غنای تجربه‌ای است که همهٔ دانش‌آموزان در تمام طول زندگی به همراه خواهند داشت.

جریان مفهومی ساختار

هر چند سیستم نمادگذاری جبر بسیار مؤثر و فشرده است، نمایش ساختارهای ساده و الگوها همیشه کار ساده‌ای نیست. مثلاً این مهم نیست که یک ستون از اعداد با چه ترتیبی جمع شود اما این مهم است که باچه ترتیبی دو عدد از هم کم شود. این خود سرچشمه‌ای از حیرت و سرگردانی دانش‌آموزان در سالهای دبستان است. با آزمایش این پدیده‌ها در چندین سیستم عددی و عملگرهای جبری، خاصیت جابه‌جایی در صورت صحت به‌عنوان راه‌چاره‌ای برای دست‌یابی به طبیعت یک سیستم شناخته می‌شود. یکی از سرگردان کننده‌ترین مثالها ضرب ماتریسی است، زیرا جابه‌جایی نمی‌باشد. با این حال خصوصیات نمادین ضرب ماتریسی در پهنه وسیعی از مسائل کارآمد هستند.

برای بعضی، ساختارها هستهٔ جبر مدرسه هستند. آنها آموزش جبر را بر پایهٔ حساب تعمیم یافته و فرمولبندی و کاربرد احکام عمومی در مورد اعداد بنا می‌کنند. برای موفقیت این روش، باید دانش‌آموزان را از مسائلی که بسیار وابسته به مصداق هستند، دور کرد و قدرت تعمیم دادن و دنبال کردن استراتژیها را در آنها تقویت کرد. اگر بخواهیم از جریان مفهومی ساختار در آموزش جبر پیروی

کنیم، این بدان مفهوم است که در مورد این که سیستمها چه‌طور کار می‌کنند، فکر کنیم. برای مثال این که چه مشخصه‌هایی از سیستم به کسرها اجازه می‌دهند ضرب شود و یا به معادلات اجازه می‌دهند، حل شوند؟ قدرت ریاضیات به خاطر توانایی مجردسازی و تعمیم ابعاد روزمرهٔ سیستمها و سپس کاربرد و توسعهٔ این ایده‌ها به سیستمهای دیگر است. مثلاً جست‌وجو برای اعداد اول با کمک تجزیهٔ اعداد طبیعی، اطلاعاتی در مورد ساختار اعداد حقیقی نیز می‌دهد. درک ساختار اعداد صحیح به ما کمک می‌کند ساختارهایی شبیه به آن را تشخیص دهیم. مانند اعداد حقیقی و چندجمله‌ایها که ساختارهایی شبیه اعداد طبیعی‌اند. مطالعهٔ ساختارها وسیله‌ای است برای تمرکز بر ابعاد رایج بسیاری از موقعیتهای ریاضی. در نظر گرفتن ساختارها به ما اجازه می‌دهد که از حجاب سیستم نمادین جبری عبور کنیم و پشت چهرهٔ مفاهیمی را که به مصداقهای خاص وابسته‌اند، مشاهده کنیم.

جریان مهارتی ترجمه به نمایشهای مختلف

می‌توان به جبر به عنوان یک زبان نگاه کرد که با نمادها، نمودارها جداول و نظایر اینها ارتباط برقرار می‌کند. این ایده که به جبر به‌عنوان «زبان حساب» نگاه کنیم، سالهاست که مورد توجه بوده است. در سال ۱۷۵۷ میلادی، اولر کتاب مقدمه‌ای بر جبر خود را شامل خلاصه‌ای از همهٔ کارهای گذشتگان در مورد حل معادله نوشت اما هیچ نامی از نمودارها به میان نیاورد. تلاشهای فراموش شدهٔ خیام و هم‌عصران او بعد از روی کار آمدن ماشین حسابهای گرافیکی دوباره مطرح شد و توجه آموزشگران به‌نمایشهای هندسی جلب شد. ارتباط بین $y = x^۲ - ۴$ و $y = (x - ۲)(y + ۲)$ و مقایسهٔ نمودارهای آنها به دانش‌آموزان این توانایی را می‌دهد که مفاهیم جبری را به روش پرثمرتری بیاموزند. بحث در مورد اطلاعات به‌دست آمده و اطلاعات از دست رفته هنگام ترجمه از یک نمایش به نمایش دیگر، باعث درک عمیق‌تر مفاهیم می‌شود. تغییر پارامترها و مشاهدهٔ نتیجهٔ آن، ابعاد جدیدی به درک دانش‌آموزان می‌افزاید.

نمایشهای مختلف، این توانایی را به دانش‌آموزان می‌دهد که مقدار کمیتها را درموقعیتهای بسیار متفاوتی استخراج کنند. حضور جدول تعداد دانش‌آموزان در یک کلاس ابتدایی در طول یک ماه تنها یکی از روشها برای توصیف و تحلیل خصوصیات این کلاس است. یا یک نمودار که تعداد دانه‌های برنجی را که هر روز پادشاه در داستان شطرنج به وزیرش می‌دهد، نشان می‌دهد، دانش‌آموزان را در توصیف و تحلیل مشخصه‌های این موقعیت جالب یاری می‌دهد. به‌وجود آوردن روانی و سرعت عمل در تشکیل و کاربرد نمایشهای داده‌ها به صورت جدول و نمودار، مستقل از موقعیت و مسئلهٔ خاصی که بررسی می‌شود، می‌تواند قدرت زیادی به دانش‌آموزان بدهد. همین نکته در مورد سیستم

نمادین متغیرها، چندجمله‌ایها و معادلات صحیح است. نمایش یک موقعیت به زبان ساده و نمادین معمولاً به درک بهتر آن کمک می‌کند. پس جبر یک راه فکر کردن دربارهٔ موقعیتهای حل مسئله و نمایش نمادین آنهاست. در این دانش، زبان جبر همراه با ابزارها و تکنیکها و دستورالعملهایی که این روش تفکر و مدلسازی را قوت می‌بخشند، به‌کار برده می‌شود. تجربهٔ این روش تفکر توسط دانش‌آموزان به آنها کمک می‌کند به‌طور مؤثرتری این دانش را بیاموزند و به‌کار گیرند.

در هرحال ریاضیات در حل مسائل بسیار قدرتمند است و جبر یکی از ابزارهای مهم ریاضیات است. هیچ کدام از این جریانهای مفهومی و مهارتی نمی‌تواند بیانگر همهٔ ابعاد دانش جبر باشد. مثلاً جریان مهارتی ترجمه به نمایشهای مختلف برای بسیاری از معلمین آشناست چون خودشان در دوران دبیرستان با چنین جریانی سروکار داشته‌اند. نکتهٔ اصلی در آن استفاده از نمادها برای ترجمه و نمایش موقعیتهاست. دانش‌آموزان می‌توانند در مصداقهای محدودی در کاربرد نمادها مهارت پیدا کنند بدون این که بدانند این مدلها می‌توانند برای موقعیتهای بسیارمتنوعی به کار روند. مثل بیشینه کردن تعداد کشتیهایی که از کانال سوئز می‌گذرند یا محاسبهٔ مقدار دارو در جریان خون یک بیمار یا پیشگویی رکوردهای المپیک بعدی. به علاوه، این دیدگاه به جبر به عنوان زبان و نمایش با حضور تکنولوژی اندکی تغییرکرده و وسعت یافته است. دراین جا مهم است که نه تنها به زبان نمایشهای جبری فکر کنیم بلکه این زبان را چنان توسعه دهیم که بتواند به‌طورمؤثر با کامپیوتر و ماشین حساب ارتباط برقرارنماید. به‌علاوه، دانش‌آموزانی که مسائلی خاص را مدلسازی کرده‌اند و ابعاد مهم مسئله را به زبان جبری ترجمه نموده‌اند، می‌توانند با در نظر گرفتن استراتژیها و تحقیق دربارهٔ این که چرا این استراتژیها کار می‌کنند و تحت چه شرایطی کار می‌کنند، درک خود را به سطح بالاتری ارتقا دهند. این که بیاموزند تا در مورد محاسباتی که در حل مسائل مختلف یا مستقل از مصداقها ظاهر می‌شوند، سؤال کنند، از ابعاد مهم یادگیری جبر است که آنها را به سوی درک ساختارها سوق می‌دهد. بنابراین، ابعاد زبان، مدلسازی و ساختار به نوعی مکمل یک‌دیگرند.

با بررسی هر یک از جریانهای مفهومی و مهارتی دیگر، می‌توان دید که هیچ یک از آنها به تنهایی نمی‌تواند در آینده پایه‌ای برای آموزش جبر باشد. این جریانها لزوماً موازی یا از هم جدا نیستند اما به عنوان یک مجموعه می‌توانند تا حد خوبی رشد سبکهای آموزشی جبر دبیرستانی را هدایت کنند. چنین مجموعه‌ای به معلمان کمک می‌کند تا دانش‌آموزان را از چندین دروازه با دانش جبر آشنا نمایند. در مسئلهٔ شربت، نقطهٔ ورود نسبت یا آهنگ تغییر بود. می‌توان از همین موقعیت در کلاسهای دبیرستان دانش‌آموزان را به بررسی تابع یا نمایشهای جبری هدایت کرد. استفاده از جریانهای مفهومی و مهارتی متنوع به ما اجازه می‌دهد ارزش‌یابی سالم‌تری نیز از درک دانش‌آموزان داشته باشیم و

راههای جدیدی به ما می‌دهد که به دانش‌آموزان کمک کنیم از دانش جبر بهره ببرند. جریانهای مفهومی و مهارتی به خصوصی که در بالا آمد با این هدف انتخاب شده است که دیدگاه وسیعی در برابر دیدگان شما قرار دهد و در عین حال بتواند در بسیاری از موقعیتهای حل مسئله کاربرد داشته باشد. جریانهای مفهومی و مهارتی دیگری هم وجود دارند اما هیچ یک به تنهایی نباید مبنای آموزش جبر قرار گیرند. این نگرش باید توسط دانش‌آموزان نیز به‌عنوان بخشی از درک آنها از جبر پذیرفته شود.

خلاصه

چهارچوبی که معرفی شد، راهی را پیشنهاد می‌کند که تفکر جبری را با فعالیتهای روزمره‌ای تقویت کنیم که با جریانهای مفهومی و مهارتی به هم وصل شده‌اند. این جریانها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند ایده‌های مهم را تشخیص دهند و بین آنها ارتباط برقرار نمایند. محتوا مانند زمینی است که این ایده‌ها در آن رشد و نمو می‌کنند. محتوا مادهٔ اولیه‌ای را به‌دست می‌دهد که دربارهٔ آن بتوان استدلال کرد. جریانهای مفهومی و مهارتی بالا تنها یک سری مثال هستند و لیست کاملی را به‌دست نمی‌دهند. چنین چهارچوبی برای برنامهٔ درسی ریاضی، فرصتهایی را به‌دست می‌دهد که دانش‌آموز مرزهای آموزشی سنتی را بشکند و تجربهٔ جبری غنی‌تری داشته باشد.

مثالهایی از محتوا

معناسازی برای چهارچوب

چهارچوبی که برای تکفر و بحث در باب آموزش و یادگیری ارائه کردیم تنها وقتی به درستی درک می‌شود که مثالهایی آورده شود تا معنی آن روشن شود. تلاشی که در جهت برقراری ارتباط بین این چهارچوب و مثالهای خاص انجام می‌گیرد، کمک می‌کند که بین محتوا و جریانهای مفهومی و مهارتی، دانش‌آموزان و یادگیری، معلمان و روند آموزشی یکرنگی ثمربخشی ایجاد شود.

هر کدام از این مثالها، چنان انتخاب شده است که توسعهٔ مفاهیم و استدلال را در یادگیری محتوایی خاص به نمایش بگذارند. مسائل دراین مثالها نشان می‌دهند که استدلال جبری با کمک روند اکتشاف ایده‌های ریاضی در جهان اطراف ما یا در ریاضیات رشد می‌کنند. این مثالها به هیچ‌وجه سرفصلهای کاملی از دانش جبر ارائه نمی‌دهند یا همهٔ آنها برای مطرح شدن در هر کلاس درسی مناسب نیستند بلکه نمایندهٔ روش برخورد ما با جهان خارج و تولید بحث و گفت و گوی لازم برای تعمیم

مفاهیم بنیادین ریاضی هستند. در این مثالها، ایده‌هایی از اندازه‌گیری (در چهارچوب محتوای شکل و اندازه)، رشد نمایی (در چهارچوب محتوای رشد و تغییر)، خاصیت توزیع پذیری (در چهارچوب محتوای اعداد) بررسی شده‌اند. در بعضی مثالها، جریان خاصی غلبه دارد و در برخی دیگر جریانهای مفهومی و مهارتی نقش موازی ایفا می‌کنند. بعضی از مسئله‌ها به جبر به‌عنوان زبان مناسب برای بیان ارتباط برقرار کردن بین ایده‌ها تأکید می‌کند و در بعضی، جبر به‌عنوان علم ساختارها کمک می‌کند تا مسئله بهتر درک شود. در بعضی دیگر توابع، مدلسازی و برقراری ارتباط بین متغیرها به یک اندازه اهمیت دارند. این جریانها اشتراکاتی دارند و یک‌دیگر را نیز تقویت می‌کنند.

داشتن دید وسیعی از جبر که در پایه‌های مختلف تقویت شده باشد، برای هدایت توسعهٔ استدلال دانش‌آموزان اهمیت دارد. بنابراین، مثالها نه تنها نشان می‌دهند جریانها و محتوا چگونه به هم مرتبط می‌شوند، بلکه نوع تفکری که ممکن است در یک پایه یا در تمام پایه‌ها بر آن تأکید شود را به نمایش می‌گذارد. اگر چه هر مسئله بالأخره اولین بار در یکی از پایه‌ها مطرح می‌شود، اما باید با پایه‌های قبل و بعد ارتباط برقرار نماید. وقتی از نمادهای مجرد استفاده می‌شود، ممکن است منظور تعمیمهایی باشد که باید در پایه‌های بالاتر مطرح گردد. از معلمان انتظار می‌رود درمورد تصمیم‌گیری این‌که برای هر فعالیت، چه سنی و چه تجربه‌ای لازم است، نقش فعالی ایفا کنند برای این که بحثها در کلاس انگیزه‌بخش باشد، دانش‌آموزان باید:

- مسئله‌ها را زیر و رو کنند و با آنها دست و پنجه نرم کنند.
- در مورد این که چگونه به مسئله حمله کنند، با یک‌دیگر به بحث بپردازند.
- سیستم نمایش نمادین به‌وجود بیاورند حتی اگر در حل مسئله مفید نباشد.
- استدلالهای خود را به بحث و نقد بگذارند تا به تفکر ایشان کمک نماید.

و معلمان باید:

- دانش قبلی و پیشینهٔ دانش‌آموزان را بشناسند و فعالیت را مناسب با آن مطرح کنند.
- محیط کلاس را برای اکتشاف و برقراری ارتباط علمی آماده سازند.
- یک نظم آموزشی متعادل در کلاس ایجاد کنند.
- از تجربیات خود درس بگیرند و مشکلات را از ابعاد مختلف بررسی نمایند و اشتباهات رایج دانش‌آموزان را در نظر بگیرند.

پاراگرافی که با عنوان «**تفکر جبری کجاست؟**» خواهد آمد، در این زمینه بحث می‌کند که چگونه هر مثال از جبر به‌عنوان یک سیستم مفاهیم و روشی برای تفکر استفاده می‌کند. این که چگونه ممکن است تفکر جبری را رشد بدهد و چگونه به ا بعاد دانش جبری که برای خواننده آشناست ربط

پیدا می‌کند. سؤالها کمک خواهند کرد تا خواننده نسبت به مفاهیم، ارتباطات، ادراکات، استدلالها، سبکهای آموزشی و انتخاب محتوا در هر مسئله عکس‌العمل نشان دهد. بعضی از سؤالات دربارهٔ تعادل، همگن بودن، استفاده از جریانهای مفهومی و مهارتی بینش ایجاد می‌کند. از معلمان عزیز می‌خواهیم تا با پاسخ به سؤالات زیر هنگام مطالعهٔ مثالها در این بحث شرکت کنند.

- چه جریانهای مفهومی یا مهارتی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند؟
- چه محتوای دیگری می‌توانست همین ایده‌ها را آموزش دهد؟
- چه مفاهیم جبری دیگری و چه استدلالهایی می‌توانست توسط این مثال توسعه داده شود؟
- آیا ایده‌های شبیه به این می‌توانست در پایه‌ای دیگر که سطح دانش‌آموزان متفاوت است، مطرح شود؟
- هنگام حل مثال توسط دانش‌آموزان، چه سؤالاتی مطرح خواهد شد؟ بحث دربارهٔ چه موضوعاتی پیش کشیده خواهد شد؟

مثال ۱ــ از محتوای رشد و تغییر: پدیدهٔ رشد و تغییر همه‌جا در زندگی روزمرهٔ ما دیده می‌شود. دانش‌آموزان همراه با چنین فعالیتهای روزمره‌ای، توشه‌ای از تجربه، شهود و کنجکاوی می‌اندوزند. در پدیده‌های روزمره مثل رشد فیزیکی خودشان، حرکت اشیا در فضا، دمای هوا و غیره ایدهٔ تغییر مشاهده می‌شود. بررسی ارتباط بین کمیتها و این که چگونه یکی نسبت به دیگری تغییر می‌کند، در اقتصاد، زیست‌شناسی و سیاست اهمیت دارد. برای مثال: جمعیت چه‌قدر سریع رشد می‌کند؟ الگوی رشد بدهیهای ملی نسبت به رشد جمعیت چگونه است؟ نرخ تابش رادیواکتیو مواد خاص چگونه محیط زیست ما را تحت تأثیر قرار می‌دهد؟ اینها محتواهای مهمی برای توسعهٔ ایده‌های ریاضی هستند. به علاوه، اگر ریاضی توسط چنین محتوایی توسعه پیدا کند، به مردم کمک می‌کند که این پدیده‌ها را بهتر بفهمند و در مورد آنها تصمیم‌گیریهای صحیح‌تری بنمایند.

موقعیتهای رشد و تغییر به چندین روش قابل نمایش هستند. مثلاً جداول، فرمولها، نمودارها و چندین روش نمایش تصویری. تکنولوژی باعث پیشرفت تنوع نمایشها شده است و به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد ارتباط بین چندین نمایش را بررسی کنند و درک بهتری از رشد و تغییر در فرمهای مختلف به‌دست آورند. هر نمایش می‌تواند به‌عنوان نوعی سیستم نمادین انگاشته شود و قدرت مخصوص به خود را در بیان ایده‌های ریاضی دارد. در نهایت، برای دانش‌آموزان لازم است که همهٔ این نمایشها را به‌کار ببرند. از نمادهای شخصی وغیررسمی تا مجردترین و مناسب‌ترین نمادها که محاسبات را نیز ساده می‌کنند.

دو مسئله‌ای که در این قسمت خواهد آمد، نشان می‌دهد که چگونه یک ایدهٔ ریاضی (در این‌جا

رشد نمایی) می‌تواند از دبستان تا دبیرستان در برنامهٔ درسی جای گیرد. این مسئله، شرایط بسیار متنوعی را که یک ایدهٔ ریاضی می‌تواند در آن مطرح شود، نشان می‌دهد. به‌علاوه، جریانهای مفهومی تابع و ارتباط بین متغیرها و جریانهای مهارتی، مدلسازی و ترجمه به نمایشهای مختلف به‌طور ضمنی در این مسائل ظاهر شده‌اند.

درک پدیدهٔ رشد با کمک نمایشهای مختلف

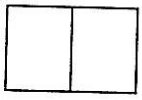
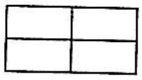
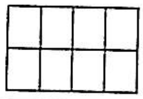
تصمیم‌گیریهای آگاهانه در مورد یک پدیده مثل رشد باکتری، قرض ملی و ... احتیاج به درک عوامل مهم تغییر دارد. قسمت مهمی از این درک وقتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموز الگوهای اصلی تغییر را تشخیص می‌دهد و به نمایش می‌گذارد. مسئلهٔ زیر می‌تواند حتی در سالهای دبستان مطرح شود و یا در سالهای بعدی با تغییر محتوا یا نوع سؤالاتی که پرسیده می‌شود، بیاید. می‌توان این مسئله را وقتی با اعداد زوج و فرد آشنا می‌شوند هم مطرح کرد. کشف این که تعداد نواحی بستگی به تعداد تاکردنها دارد به جریان مفهوم تابع تأکید دارد. وقتی دانش‌آموزان درمورد الگو استدلال می‌کنند، به دنبال نمایش و زبان مناسب برای بیان استدلالهایشان خواهند گشت.

مسئله تاکردن کاغذ: فرض کنید می‌خواهید یک قطعه کاغذ را چندین بار به دو نیمه تا کنید تا تعدادی ناحیه برای نوشتن نام دانش‌آموزان کلاس روی کاغذ به‌وجود آورید. فقط یک نام از هر ناحیه می‌تواند نوشته شود ولی می‌توان بعضی نواحی را خالی گذاشت. برای این کار، چند بار تا کردن لازم است؟

سؤالاتی که می‌توان پرسید : خط تا با کاغذ چه کار می‌کند؟ چند بار کاغذ را تا کردید؟ کاغذ را تا کردید؟ چند ناحیه به‌وجود آمد؟ قبل از این که تا کنید، چند ناحیه داشتید؟ بعد از یک بار تا زدن چه‌طور؟ بعد از دو بار تازدن چه‌طور؟ بعد از سه بار تازدن چه‌طور؟ تصویری از کاغذ بعد از هر بار تا شدن بکشید. وقتی از یک مرحله به مرحلهٔ بعد می‌روید و یک بار دیگر تا می‌زنید، چند ناحیه به تعداد نواحی اضافه می‌شود؟ آیا هر بار به یک اندازه تعداد نواحی زیاد می‌شود؟

نگاهی به کلاس: در مدت بحثی که در کلاس درس انجام شد، یک دانش‌آموز متوجه شد که قبل از تاکردن تنها یک ناحیه وجود دارد بعد دیگری به او کمک کرد که چگونه کاغذ را تا کند ؛ سپس، جدولی از تعداد تا کردنها و تعداد نواحی تشکیل دادند و در هرردیف تصویری از کاغذ تا شده کشیدند. بعد از توجه به داده‌هایی که ثبت شد، الگو را به روشهای متفاوتی توصیف کردند. یک دانش‌آموز متوجه شد که همهٔ این اعداد زوج هستند اما بعضی از اعداد زوج، جا افتاده‌اند. دیگری گفت که تعداد نواحی خیلی سریع رشد می‌کند. بعضیها متوجه شدند که با هر بار تا زدن، تعداد نواحی دو برابر

می‌شوند و برای آن استدلال آوردند.

مدل کاغذ	تعداد نواحی	تعداد تاکردنها
	۱	۰
	۲	۱
	۴	۲
	۸	۳

تفکر جبری کجاست؟

اگر تاکردن کاغذ با نظم و ترتیب صورت بگیرد، دانش‌آموزان خواهند توانست در مورد ادامهٔ الگو استدلال کنند و بالطبع نظرات متفاوتی خواهند داشت. مثلاً بعضی بر حسب جمع کردن فکر می‌کنند و بعضی برحسب دو برابر کردن. این بحث می‌تواند به این که چگونه + و× به هم مربوطند، تأکید کند. این که دانش‌آموزان دیگران را قانع کنند که دو توصیف که با کمک جمع کردن و ضرب کردن به‌دست آمده‌اند یکسانند، تجربهٔ مهمی به شمار می‌رود. الگوی ضرب در یک عدد یک الگوی مهم در جبر است و به مفهوم رشد نمایی ارتباط پیدا می‌کند. ضرب کردن تعداد نواحی در دو و به‌دست آوردن تعداد نواحی جدید یک فرایند بازگشتی است. دانش‌آموز می‌تواند با ماشین حساب این الگو را به‌طور بازگشتی ادامه دهد و ببیند تعداد نواحی چه‌قدر سریع رشد می‌کند. این مسئله مثال خوبی برای تمرین زبان توان و نما به‌طور طبیعی است و مقدمهٔ خوبی برای جریان مهارتی نمایش به چند روش می‌باشد. بیش‌تر دانش‌آموزان توجه می‌کنند که با کاغذ داده شده فقط تعداد کمی تاکردن امکان‌پذیر است. این می‌تواند به بحثی در مورد ارتباط الگو یا موقعیت فیزیکی مسئله منجر شود. ممکن است دانش‌آموزان آن‌قدر شهامت داشته باشند که سعی کنند همین الگو را در پدیده‌های دیگر پیدا کنند.

همین‌طور که بحث کلاسی در مورد مسئله پیش می‌رود، دانش‌آموزان به ایجاد رشد نمایی توجه خواهند کرد که در آن الگوی رشد با ضرب کردن در یک ثابت به‌دست می‌آید. در ابتدا کافی است که این رابطه با کلام، مدل کاغذی، تصویر و یا جملاتی شامل جمع و ضرب بیان شود تا نمایندهٔ رشد نمایی باشد.

چگونه تغییر سؤال از شمردن تعداد نواحی به بررسی این که چگونه تعداد نواحی رشد می‌کنند، به درک بهتر مفاهیم ریاضی می‌انجامد؟

در این موقعیت متغیرها کدامند؟ ارتباطات بین متغیرها که ممکن است دانش‌آموزان دربارهٔ آن استدلال کنند، کدامند؟

پاسخهای دانش‌آموزان در مورد درک اولیهٔ آنها از سیستم اعداد به ماچه می‌گوید؟

توسعهٔ مسئلهٔ تاکردن کاغذ: فرض کنید که یک قطعه کاغذ داریم و می‌خواهیم آن را چندین بار تاکنیم. اگر می‌توانستید آن را ۱۰ بار تا کنید، چند ناحیه تشکیل می‌شد؟ آیا به اندازهٔ کافی ناحیه برای نوشتن نام همهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما وجود داشت؟

سؤالاتی که می‌توان پرسید: فرض کنید می‌توانستید کاغذ را ۲۰ بار تا کنید، چند ناحیه تشکیل می‌شد؟ ۱۰۰ بار چه‌طور؟ برای تشکیل ۶۴ ناحیه چند بار تا کردن لازم است؟ برای تشکیل ۲۰۴۸ ناحیه چه‌طور؟ ۱۰۰ ناحیه چه‌طور؟ ۲۰۰ ناحیه چه‌طور؟

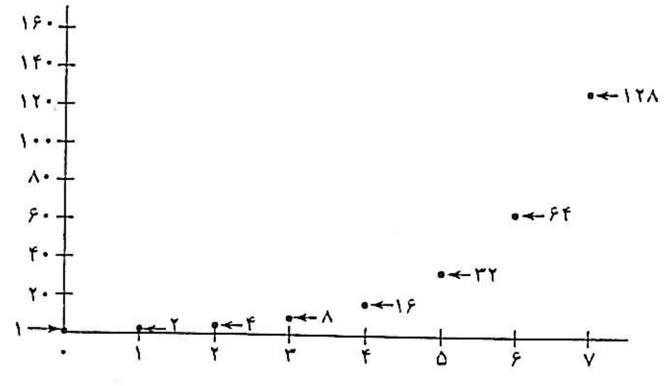
نگاهی به کلاس: از آن‌جا که غیرممکن است تا کردن کاغذ را از تعداد محدودی بیش‌تر ادامه داد. دانش‌آموزان سعی کردند که الگوی رشد را کشف کنند. بعضی جدول را به‌طور بازگشتی پر کردند. بعضی این طور استدلال کردند که ۰ بار تا کردن ۱ ناحیه می‌دهد و ۱ بار تاکردن ۲ ناحیه می‌دهد و ۲ بار تا کردن ۲×۲ ناحیه می‌دهد و ۳ بار تا کردن ۲×۲×۲ ناحیه می‌دهد و ... و ۱۰ بار تاکردن ۲×...×۲×۲ (۱۰ بار) ناحیه می‌دهد. در پاسخ سؤال دوم بعضیها جدول را ادامه دادند و بعضیها به زبان حاصلضرب تعدادی عدد ۲ پاسخ دادند. برای پیدا کردن تعداد تاکردنهای لازم برای ۶۴ ناحیه، بعضی به تاکردن کاغذ ادامه دادند و بعضیها جدول را ادامه دادند و بعضیها سعی کردند الگوی تاکردن رامعکوس کنند یعنی گفتند: ۶۴ ناحیه با ضرب کردن تعدادی ۲ به‌دست آمد و تعداد ۲ها همان تعداد تاکردنهاست پس باید بر ۲ تقسیم کنیم تا به ۱ برسیم. این کار ۶ تاکردن لازم دارد و برای ۲۰۴۸ باید ۱۱ بار تا کنیم. برای این که ۱۰۰ ناحیه داشته باشیم، بعضی از دانش‌آموزان جدول را ادامه دادند و گفتند که هیچ‌وقت ۱۰۰ جواب نیست. چیزی بین ۶ تا و ۷ تا خواهد بود. بعضیها استدلال کردند که ۶۴ = ۲^{۶} و ۱۲۸ = ۲^{۷} و غیرممکن است تعداد نواحی دقیقاً برابر ۱۰۰ باشد.

چگونه توسعهٔ فعالیت در بیرون مرزهای ممکن تاکردن فیزیکی، اهمیت مدلسازی را نشان می‌دهد؟

تفکر جبری کجاست؟

بعضی دانش‌آموزان آماده هستند که بدون تاکردن کاغذ، الگو را بیابند. بعضیها ممکن است احساس کنند دقت شمارش به زحمت تا کردن می‌ارزد ولی بالاخره همه متقاعد خواهند شد که اکتشاف باید بدون تا کردن فیزیکی ادامه پیدا کند. این می‌تواند قدم اولیهٔ مهمی به سمت تفکر جبری در مورد الگوها باشد. توجه، توصیف و ثبت الگوها می‌تواند منجر به درک ریاضی پشت صحنه در این الگو شود و دانش‌آموز را به سوی تعمیم دادن و استفاده از زبان ریاضی سوق خواهد داد. چنین استدلالهایی درکی اولیه و لذت بخش از یک مدل ریاضی خواهد داد. در این مرحله، ممکن است دانش‌آموزان برای بیان استدلال خود از روشهای مختلفی بهره بگیرند. مثلاً بعضیها جدول رسم می‌کنند، بعضی می‌نویسند تعداد نواحی = ۲×...×۲×۲×۲ (۲۰ بار). همین فرصت برای تعمیم کلامی نمادها کافیست که نمادها را به صورت مجرد تعمیم دهند و بنویسند $R = ۲^L$ که در آن R تعداد نواحی است و L تعداد تاکردنها. همچنین این سؤالات می‌تواند به درکی از این که حل معادله چه معنی می‌دهد، منجر شود. برای پیدا کردن نواحی تولید شده توسط ۲۰ تا دانش‌آموزان می‌توانند ۲ را حساب کنند یا از جدول استفاده کنند. برای پیدا کردن این که چند بار تا کردن ۶۴ ناحیه می‌دهد، دانش‌آموزان در واقع معادلهٔ $۶۴ = ۲^x$ راحل می‌کنند. دانش‌آموزان با معکوس کردن روند استدلال خود این مسئله را حل می‌کنند. حتی ممکن است بعضی از دانش‌آموزان از نمودار استفاده کنند تا ببینند برای ۶۴ ناحیه یا ۲۰۴۸ ناحیه چند بار تا کردن لازم است.

در صورتی که دانش‌آموز از ماشین حسابی که نمودار هم می‌کشد، استفاده کند چنین شکلی به‌دست می‌آید.



و این الگویی گسسته برای مفهوم تغییر به دانش‌آموز خواهد داد. دانش‌آموزان باید بین اعدادی که در جدول وارد کرده‌اند، ارتباط برقرار کنند. نمودار تابع و مقادیر تابع مفاهیمی هستند که بعدها در

نتیجهٔ این فعالیتها در ذهن دانش‌آموز شکل خواهند گرفت. می‌توانند فکر کنند که این مدل درکدام پدیده‌ها دیده می‌شود و یا می‌توانند سعی کنند الگوی $y = ۲^x$ را برای مقادیر غیرصحیح x هم تعریف کنند. این که مسئله برای تعداد نواحی برابر با ۱۰۰ ناحیه جواب ندارد، می‌تواند شروع خوبی برای لگاریتم باشد. دانش‌آموز می‌تواند با این مقدمه به درکی از دنباله‌ها هم برسد. دانش‌آموزان می‌توانند مدلهایی شبیه به این را در اطراف خود ببینند. مثل تعداد پدر و مادر، تعداد پدربزرگ و مادربزرگها، تعداد جدهای پدری و مادری و ... حتی می‌توان الگوی تقسیم بر ۲ کردن را در هر مرحله به مسئلهٔ زوال پیوند داد.

این موقعیت چگونه عادت جست و جو برای الگوها را به‌وجود می‌آورد؟
راههای دیگر که دانش‌آموزان ممکن است استدلال کنند، کدام است؟
چگونه دانش‌آموزان می‌توانند ببینند که نمایشهای مختلف معادل‌اند؟
آهنگ رشد چگونه در هریک از نمایشهای مختلف قابل مشاهده است؟ آیا این نمایشها به درک رشد نمایی کمک می‌کنند؟
چه درکی از توابع برای فهم و توسعهٔ مفاهیم تغییر و رشد لازم است؟

مقایسهٔ دو الگوی رشد

دانش آموزانی که با موقعیتهای رشد توانی سر و کار دارند، به زودی خواهند دید که کمیتهایی که رشد توانی دارند به سرعت رشد می‌کنند. اگرچه این توصیف عموماً صحیح است اما تمام ابعاد ریاضی مسئله را دربرنمی‌گیرد. بهترین راه این است که رشد نمایی در جریان مفهومی تابع و ارتباط بین متغیرها مطرح شود. یک راه برای این‌که دانش‌آموز بین مدلهای رشد مختلف تمایز قائل شود این است که دو متغیر نمایی و خطی مقایسه شوند. در مثال زیر مسئله‌ای مطرح شده است که رشد و تغییر در محتوای پول بررسی شده است.

مسئلهٔ هدیه: عموی خشایار تصمیم گرفته است که هرسال به او مقداری پول هدیه دهد. او دو دستور پرداخت درنظر دارد و می‌خواهد بداند خشایار کدام‌یک از دو راه را انتخاب می‌کند.

نقشه الف: خشایار در تولد ۹ سالگی ۱۰۰۰ تومان دریافت کند و در تولد ۱۰ سالگی ۱۱۰۰ تومان و در تولد بعدی ۱۲۰۰ تومان و همین‌طور الی آخر یعنی سال اول ۱۰۰۰ تومان دریافت کند و هرسال ۱۰۰ تومان به آن اضافه می‌شود.

نقشه ب: خشایار در تولد ۹ سالگی ۱ تومان دریافت کند و در تولد ۱۰ سالگی ۲ تومان و سال بعد ۴ تومان و سال بعد از آن ۸ تومان و همین‌طور الی آخر یعنی سال اول ۱ تومان دریافت کند و هرسال مبلغ هدیه دو برابر شود.

اگر شما جای خشایار بودید کدام نقشه را انتخاب می‌کردید؟

سؤالاتی که می‌تواند پرسیده شود: خشایار در چندین سال آینده در هرکدام از نقشه‌های الف و ب چه‌قدر خواهد گرفت؟ تصمیم بگیرید که کدام نقشه بهتر است. دلایل خود را بگویید و فرضیات خود را عنوان کنید. عموی خشایار تا چه مدت فرصت می‌کند به هدیه دادن خود ادامه دهد؟ اگر عموی خشایار نقشهٔ ب را با پنج ریال شروع کند، کدام نقشه را انتخاب می‌کنید؟ اگر با یک ریال شروع کند، چه‌طور؟

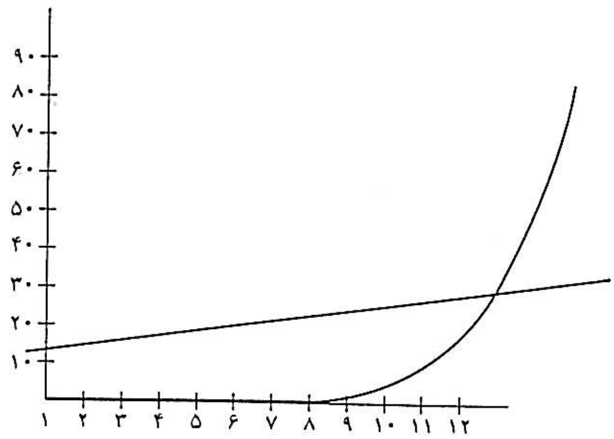
نگاهی به کلاس درس: بیش‌تر دانش‌آموزان با این عقیده شروع می‌کنند که الگویی که با ۱ تومان، ۲ تومان، ۴ تومان و ... شروع شود، چندان ارزشی نخواهد داشت اما با محاسبهٔ مقادیر بعدی کم‌کم متوجه می‌شوند که اگرچه مقدار هدیه برای ۵ تا ۶ سال ناچیز است، الگوی تغییر آن با نقشهٔ الف متفاوت است. بنابراین، متوجه می‌شوند که باید مقادیر بیش‌تری را محاسبه کنند. بعد از این‌که جدول تشکیل دهند، می‌توانند تفاوت رشد این مقادیر را درک کنند. در نقشهٔ الف مقدار تغییر هدیهٔ سالانه ۱۰۰ تومان است درصورتی که در نقشهٔ ب این تغییر هرسال بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین، شروع به حدس زدن می‌کنند که اگرخشایار چندین سال هدیه بگیرد، چه‌قدر پول خواهد داشت. دانش‌آموزان درمی‌یابند که وقتی خشایار ۲۱ ساله شود، نقشهٔ ب از نقشهٔ الف پیش خواهد افتاد. بعضیها به این توجه خواهند کرد که کل پولی که خشایار در این سن دریافت کرده، در نقشهٔ الف بیش از نقشهٔ ب است. پس جدولی جدید خواهند کشید که ستونهایی برای محاسبهٔ کل پول دریافتی داشته باشد و به‌این خواهند رسد که نقشهٔ الف تا سن ۲۳ سالگی ازنقشهٔ ب بهتر است. وقتی شروع به بررسی کردند که اگر نقشهٔ ب با ۵ ریال شروع می‌شد، بین آنها اختلاف نظر به‌وجود آمد که آیا جداول جدیدی رسم کنند یا با همین جدول قبلی کار کنند. یکی از دانش‌آموزان اشاره کرد که اگر با ۵ ریال شروع کنیم، سال بعد ۱ تومان و سال بعد ۲ تومان و الی‌آخر هدیه خواهیم گرفت. پس همان مقدار قبلی هدیه می‌گیریم اما یک سال دیرتر.

سن	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
نقشه الف	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۲۰۰	۱۳۰۰	۱۴۰۰	۱۵۰۰	۱۶۰۰	۱۷۰۰	۱۸۰۰	۱۹۰۰	۲۰۰۰	۲۱۰۰	۲۲۰۰	۲۳۰۰	۲۴۰۰
نقشه ب	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸	۴۰۹۶	۸۱۹۲	۱۶۳۸۴

تفکر جبری کجاست؟

این مسئله، دانش‌آموزان را در یک سری فعالیتها که تفکر جبری را رشد می‌دهند، درگیر خواهد کرد. جدول خود یک سیستم نمادین است زیرا همین که جدول تشکیل شود و محاسبات آن انجام گیرد، دانش‌آموزان قادر خواهند بود جدول را با مقادیر اولیهٔ دیگری هم محاسبه کنند (مثلاً مقدار ثابت دیگری در نقشه الف و یا ضرب ثابت دیگری در نقشهٔ ب). ادامه دادن جدول به دانش‌آموزان کمک می کند که دو کمیت مختلف را تشخیص دهند. یکی بزرگی مقدار هدیه‌ها و دیگری بزرگی مجموع هدیه‌ها. همین‌طور که دانش‌آموزان به این سمت می‌روند که درمورد الگوی رشد فکر کنند، ممکن است از نمودار برای مقایسه استفاده نمایند. دانش‌آموزان می‌توانند نمودار یک موقعیت پیوسته یا گسسته را رسم کنند و در هریک دو الگو رامقایسه نمایند. اگر از مدل پیوسته استفاده کنند، می‌توان پرسید که دو الگو درکدام نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند. این دانش‌آموزان را تشویق می‌کند که الگوریتمهایی برای تقریب‌زدن و استدلالهایی برای جدول یا نمودار ارائه دهند که حدسهای آنها را به‌طور سیستماتیک تقویت کند.

در نهایت این مسئله بهانه‌ای برای مطرح شدن دو نوع ارتباط بین متغیرهاست: خطی و توانی. آهنگ تغییر در این مسئله مطرح می‌شود. دانش‌آموزان می‌توانند تعمیمی بدهند و یا جملاتی نظیر $y = ۲$ و $y = ۱۰۰۰ + (n - ۱)۱۰۰$ را به‌کار ببرند. دانش‌آموزان ممکن است $y = ab^x$ و $y = ax + b$ را با هم مقایسه کنند و بررسی کنند چگونه تغییرات در a و b روی رشد این الگوها تأثیر می‌گذارد. حتی ممکن است رشد خطی و نمایی را با رشد درجه دوم و سوم مقایسه کرد و درکی از رفتار توانی با مقایسهٔ نرخ تغییرها به‌دست آورد.



مقدار پولی که هر سال هدیه گرفته می‌شود. بر حسب ۱۰۰ تومان

روشهای دیگر برای استدلال در مورد مسئله چیست؟
موقعیتهایی دیگر که در آن بتوان رشد خطی و غیرخطی را مقایسه کرد، کدامند؟
چگونه درک یک مدل باعث درک مدل دیگری می‌شود؟

معکوس کردن سؤال ــ پیدا کردن جمعیت اولیه از روی رشد نمایی

در فرمول‌بندی رشد نمایی، سؤالات بسیاری می‌تواند کنجکاوی دانش‌آموزان را برانگیزد. می‌توان این سؤالها را با استدلالهای گسسته یا پیوسته پاسخ گفت. یکی از این سؤالات با برعکس فکر کردن مطرح می‌شود. در حالت عادی با یک جمعیت شروع می‌کنیم و با داشتن آهنگ رشد می‌پرسیم جمعیت در آینده چه‌قدر خواهد بود. درصورت معکوس با داشتن جمعیت و آهنگ رشد می‌پرسیم جمعیت در گذشته چه‌قدر بوده است. دانش‌آموزانی که با محاسبات، مرحله به مرحله به عقب برمی‌گردند، به احتمال زیاد در مسئله گم خواهند شد. ازطرفی، دانش آموزانی که صرفاً اعداد را در فرمولها جایگزین می‌کنند حتی ایده‌های ریاضی مسئله را درک نمی‌کنند.

خلاصه

مسائلی انتخاب شده‌اند تا نشان دهند چگونه رشد نمایی به‌عنوان یک محتوا می‌تواند به رشد تفکر جبری دانش‌آموزان کمک کند. این مسائل و نظایر آن می‌توانند ازدوران ابتدایی تا دبیرستان در چهارچوب جریان مفهومی تابع و ارتباط بین متغیرها و جریانهای مهارتی مدلسازی و ترجمه به نمایشهای مختلف مطرح شوند.

در هرکدام از این مسئله‌ها یک موقعیت واقعی همراه با یک سؤال روزمره مطرح شده که دانش‌آموزان را به یک روند حل مسئله جبری دعوت می‌کند. همین‌طور که دانش‌آموزان به‌صورت فردی یا گروهی مشغول حل مسئله می‌شوند، سؤالات، روشهای نمایش نمادین و پیشنهاداتی که از طرف معلم ارائه می‌شوند کمک می‌کنند تا تفکر دانش‌آموزان روشن‌تر و دقیق‌تر شود تا به حل مسئله بیانجامد. چنین فعالیتهایی وسیلهٔ ارزشمند و مهمی برای توسعهٔ درک دانش‌آموزان از جبر است.

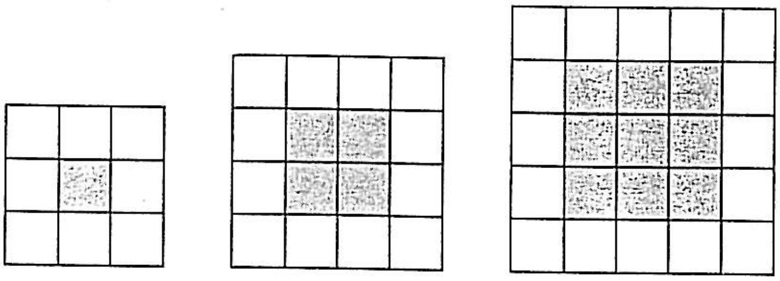
مثال ۲ــ از محتوای شکل و اندازه: به‌طور روزمره با سؤالاتی مربوط به شکل و اندازه برخورد می‌کنیم. این شیئ چه‌قدر بزرگ است؟ آیا این شیئ در آن مکان جا می‌گیرد؟ این شکلها چگونه با هم جفت می‌شوند؟ پاسخ به این سؤالات معمولاً طبیعت هندسی دارد. این ساختار محتوایی بر ارتباط بین شکل هندسی و تفکر جبری تأکید می‌کند و روشن می‌کند که چگونه تفکر جبری می‌تواند

به حل مسائلی که هندسی هستند، کمک کند. برای مثال، مسائلی که با محیط، مساحت و حجم سروکار دارند به ارتباط بین متغیرها مربوط می‌شوند. بسته به این که دانش‌آموزان در چه پایه‌ای باشند، می‌توان از آنان سؤالاتی پرسید تا به ایشان کمک کند یاد بگیرند به‌صورت نمادین اطلاعات و روابط را نمایش دهند. همین نمایشها می‌توانند موضوع بحث و بررسی باشند. در بعضی حالات، استدلال نمادین درکی را به‌دست می‌دهد که غیر آن ممکن است دانش‌آموز را گمراه نماید. با بحث و بررسی این نوع مسائل بین دانش‌آموزان تفکر جبری و تفکر هندسی با هم پیوند می‌خورد. ارتباطاتی که در یک مسئله بین متغیرها کشف می‌شوند می‌توانند به اکتشاف ابعاد دیگر مسئله کمک کنند.

استدلال در مورد الگوها

در این فعالیت، دانش‌آموز سعی می‌کند الگوهای متفاوتی در یک سری ازمربعهایی که با کاشیهای رنگی کاشی شده‌اند، بیابد. این مسئله بر بعد، محیط و مساحت تأکید دارد.

مسئلهٔ کاشیهای مرزی و کاشیهای درونی: با کاشیهای سفید و خاکستری سه مربع ساخته شده که کاشیهای مرزی آنها سفید و کاشیهای درونی آنها خاکستری است. آیا می‌توان با ۳۶ کاشی سفید یا خاکستری شکلی مانند اینها ساخت؟ در این الگو تعداد کاشیهای سفید و خاکستری چه اعدادی می‌توانند باشند؟



سؤالاتی که می‌تواند پرسیده شود : چند کاشی خاکستری در هر مربع استفاده شده است و چند کاشی سفید؟ آیا می‌توانید با ۱۲ کاشی خاکستری یک مربع بسازید؟ آیا می‌توانید مربعی با ۶ کاشی در هر ضلع بسازید؟ ۷ کاشی چه‌طور؟ برای ۱۰۰ مربع چند کاشی سفید و چند کاشی خاکستری به‌کار برده شده؟ برای تعداد کاشیهای سفید و خاکستری فرمولی بدهید و بگویید آیا مربعی هست که تعداد کاشیهای سفید آن با تعداد کاشیهای خاکستری برابر باشد؟

نگاهای به کلاس درس: دانش‌آموزان با مقواهای سفید و خاکستری مربع می‌سازند و از تعداد مربعها یادداشت برمی‌دارند. بعضی دیگر شکل می‌کشند. عدهٔ اول با ۳۶ کاشی سفید مربع

می‌سازند وبعد کاشیهای درونی را با کاشیهای خاکستری عوض می‌کنند. بعضی دیگر برای محاسبهٔ کاشیهای خاکستری و سفید مستطیل می‌سازند تا الگویی بجویند. دانش‌آموزان در حال ساختن الگوها بین تعداد کاشیهای سفید و خاکستری ارتباط پیدا می‌کنند. تعداد کاشیهای سفید چهار برابر تعداد کاشیهای خاکستری یک ضلع مربع خاکستری به‌علاوه چهار است. این چهار کاشی اضافه مربوط به کاشیهایی هستند که در چهار گوشهٔ مربع واقع شده‌اند. بعضی دانش‌آموزان این‌طور استدلال کردند که اگر تعداد کاشیهایی که در مرز مربع است W باشد، تعداد کاشیهای سفید برابر $W^۲ - (W-۲)^۲$ است؛ $W^۲$ برای تمام کاشیها و $(W-۲)^۲$ برای کاشیهای خاکستری. با این وصف بعضی دانش‌آموزان ترجیح می‌دهند جدول یا نمودار رسم کنند. بعضی توجه می‌کنند که تعداد کاشیهای مرزی همیشه بر ۴ بخش‌پذیر است و این سؤال را می‌پرسند که آیا هر مضربی از ۴ می‌تواند تعداد کاشیهای سفید باشد؟

تفکر جبری کجاست؟

تمرکز این مسئله بر کار با الگوهاست و جریان مهارتی ترجمه به نمایشهای مختلف نقش عمده‌ای در آن بازی می‌کند. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، ارتباط هندسی و عددی در این الگو ما را به این سمت سوق می‌دهد که الگوها را با نماد جبری نمایش دهیم. مثلاً در n − امین مربع خاکستری $n^۲$ کاشی هست و $۴n+۴$ کاشی سفید و کل کاشیهای استفاده شده $(n+۲)^۲$ بنابراین، $n^۲ + (۴n+۴) = (n+۲)^۲$. اگر این فرمولها بدون کمک الگوی هندسی استفاده شوند، ممکن است دانش‌آموز نداند که فرمول n دقیقاً مناسب چندمین مربع درالگوی هندسی بالاست. برقراری ارتباط بین شکل اول و تعداد هر رنگ و ... در آموزش دنباله‌ها در حسابان اهمیت خواهد داشت. بعضی ازدانش‌آموزان که با نمادگذاری مشکل دارند، ممکن است برای سادگی، تعداد کاشیها را مثلاً $f_۱$، $f_۲$ و ... بنامند و بعضی ممکن است اعداد را در جدول قرار دهند:

تعداد کل کاشیها	تعداد کاشیهای سفید	تعداد کاشیهای خاکستری	شکل
۹	۸	۱	۱
۱۶	۱۲	۴	۲

بحث در مورد این الگوها تفکر بازگشتی را هم تقویت می‌کند. همچنین جریان مفهومی تابع هم با رسم تعداد کاشیهای سفید و خاکستری در دو نمودار و مقایسهٔ آنها می‌تواند تقویت شود. دانش‌آموزان

می‌توانند درمورد توابع، استدلال کنند که چه موقع تعداد کاشیهای آبی از سفید بیش‌ترمی‌شود. همچنین می‌توانند تقسیم این دوتابع را رسم کنند تا تغییرات نسبت تعداد این کاشیها را بررسی کنند.

این مسئله می‌تواند به سه بعد هم توسعه داده شود و دانش‌آموزان ارتباط بین تعداد کاشیهای مکعبهای تودرتو رامحاسبه نمایند. کلمات کاشیهای مرزی و کاشیهای درونی در سه بعد به رشد زبان ریاضی دانش‌آموزان نیز کمک می‌کند. دانش‌آموزان می‌توانند به چندین روش به تعداد کاشیهای مرزی فکر کنند. در این‌جا الگوهای خطی، درجه دوم و درجه سوم هر سه دیده می‌شوند.

دانش‌آموزان به چه روش های دیگری ممکن است به این مسائل فکر کنند؟

چرا مهم است دانش‌آموزان ابتدایی در مورد الگوها استدلال کنند؟

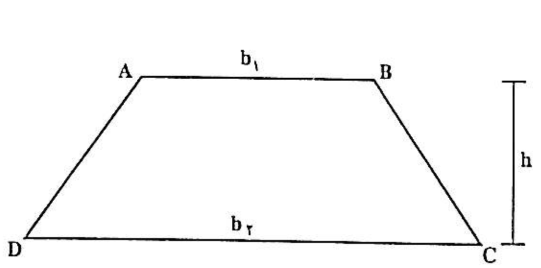
آیا تمرینهای در باب استفاده از نماد، درصورتی که نمادها برای اشیای ملموس انتخاب شوند، با معنی‌تر نمی‌شوند؟ چگونه حضور یک مدل به دانش‌آموزان کمک می‌کند که به‌طور جبری استدلال کنند؟

آیا محتوا کمک می‌کند که به نمایش نمادین معنی ببخشیم؟

استدلال هندسی و جبری مکمل یک‌دیگرند

محاسبهٔ مستقیم ناورداهای هندسی مثل مساحت و حجم معمولاً مشکل است. محاسبهٔ غیرمستقیم توسط فرمولها معمولاً کار را ساده‌تر می‌کند. مثلاً محاسبهٔ مساحت مثلث با اندازه‌گیری ارتفاع و قاعده ساده می‌باشد اما با پوشش مثلث با مربعهای کوچک کاری بسیار بغرنج است. پیدا کردن فرمولهایی برای مساحت نه‌تنها کار محاسبهٔ مساحت را بسیار ساده می‌کند، بلکه به درک بهتر شکل کمک می‌کند. این مسئله نشان می‌دهد که چگونه استدلال جبری و نماد گذاری جبری این کار را ساده می‌کند.

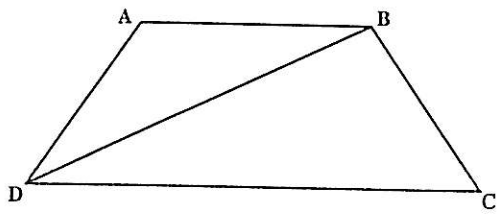
مسئلهٔ ذوزنقه: روشهای مختلفی برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقه پیدا کنید. رسم شکل به شما بسیار کمک خواهد کرد. سعی کنید روشهای محاسبه مساحت را برحسب ارتفاع h و قاعده‌های b_1 و b_2 بیان کنید.



سؤالاتی که می‌توانید بپرسید : چه روشهای متفاوتی پیدا کردید؟ با چه نمادهایی استدلال خود را نمایش دادید؟ آیا فرمولهایی که به‌دست آوردید، معادلند؟ چگونه این رامی‌فهمید؟ آیا می‌توانید با محاسبات نمادین نشان دهید که فرمولهای شما یکی هستند یا خیر؟

نگاهی به کلاس درس: بعضی دانش‌آموزان از کاغذ شطرنجی استفاده می‌کنند و سعی می‌کنند فرمولی برای مساحت بیابند. آنها مساحت را برای ذوزنقه‌های خاص محاسبه می‌کنند. بعضی دیگر ذوزنقه‌را به روشهای مختلف به نواحی کوچک‌تر تقسیم می‌کنند. بسیاری نمودارهایی مانند زیر رسم می‌کنند.

مساحت ذوزنقه ABCD = مساحت مثلث ABD + مساحت مثلث BDC

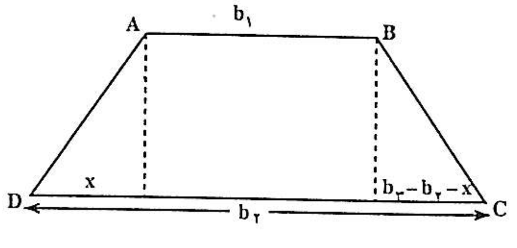


مساحت ذوزنقه ABCD = مساحت مثلث سمت چپ + مساحت مستطیل + مساحت مثلث سمت راست

$$= \frac{1}{2}hx + b_1h + \frac{1}{2}h(b_2 - b_1 - x)$$

$$= \frac{1}{2}hx + b_1h + \frac{1}{2}hb_2 - \frac{1}{2}hb_1 - \frac{1}{2}hx$$

$$= \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$$



دانش‌آموزانی که با کاربرد نمادها راحت هستند، می‌توانند با این روش نشان دهند نمایشهای مختلف با هم یکی هستند. دیگران با اندازه‌گیری در حالتهای خاص این را بررسی می‌کنند.

تفکر جبری کجاست؟

تقسیم ذوزنقه به نواحی ساده‌تر و نمایش مساحت آنها به‌صورت نمادین نشان می‌دهد که چگونه نمادهای جبری می‌توانند یک استدلال هندسی را به نمایش بگذارند. روند نمایش یک ایدهٔ هندسی با نمادهای جبری و تبدیل نمادها به یک‌دیگر به‌صورتی که معنای هندسی جدیدی بدهند، به محاسبات جبری معنی می‌دهد زیرا نمادها استدلال هندسی هدایت‌کنندهٔ حل مسئله را به نمایش می‌گذارند. در این‌جا قدرت جبر در ترجمهٔ بین استدلالهای هندسی و جبری و سپس تحلیل آن در محتواست.

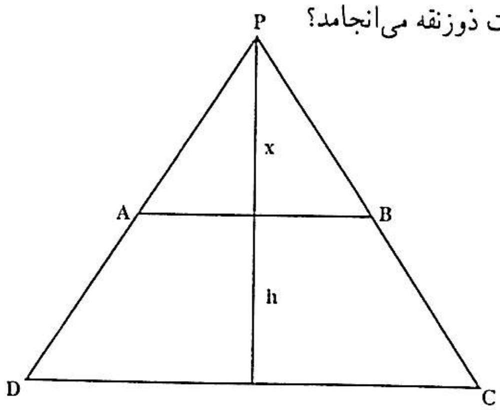
استفاده از نمادهای جبری چه تأثیری بر یادگیری تفکر واستدلال جبری دانش‌آموزان می‌گذارد؟ در مورد نمادها و کاربرد آنها، دانش‌آموزان چه چیزهایی را باید بدانند؟ چه سطحی از کار با نماد آنها را به این درک می‌رساند؟

آیا راه دیگری برای تفکر درمورد مسئلهٔ ذوزنقه وجود دارد؟ چگونه مدلهای هندسی و نمادین نمایشگر روش استدلال دانش‌آموز درمورد ذوزنقه هستند؟

آیا دانش‌آموزان می‌توانند نیاز به یک اثبات را احساس کنند؟ درچه سطحی اثبات دقیق ریاضی مناسب است؟ چگونه یاد می‌گیرند که یک اثبات قابل قبول چه اجزایی باید داشته باشد؟ آیا مسائلی مانند این به دانش‌آموزان کمک می‌کند قدرت و اهمیت جبر را دریابند؟

می‌توان مسئلهٔ ذوزنقه را چنین توسعه داد.

مسئلهٔ المیرا : او برای حل مسئلهٔ ذوزنقه خطوط AD و BC را امتداد داد تا مثلث DPC تشکیل شود و مساحت ذوزنقه را با کم‌کردن مساحت مثلث APB از DPC به‌دست آورد. او از تشابه مثلثها استفاده کرد تا اختلاف مساحتها را فقط برحسب ارتفاع و قاعده‌های ذوزنقه بیان کند. آیا روش المیرا به همان جواب استاندارد مساحت ذوزنقه می‌انجامد؟



نگاهی به کلاس درس: بعضی دانش‌آموزان از نمادها استفاده می‌کنند تا تفکر خود را به نمایش بگذارند.

$$\text{مساحت ذوزنقه ABCD} = \frac{1}{2}(x+h)b_2 - \frac{1}{2}\times b_1$$

$$\text{بنابر تشابه مثلثها:}\quad x = \frac{b_1 h}{b_2 - b_1}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه ABCD} = \frac{1}{2}\left[\frac{b_1 h}{b_2 - b_1} + h\right]b_2 - \frac{1}{2}\left[\frac{b_1 h}{b_2 - b_1}\right]b_1$$

ازاین‌جا به بعد بستگی به توانایی کار با نمادهای دانش‌آموزان دارد. مثلاً با خاصیت توزیع‌پذیری مساحت برابر $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ به‌دست می‌آید. این نمایش باعث شد بعضی از دانش‌آموزان حدس بزنند که شاید بتوان ذوزنقه را چنان برید که از قطعات آن مثلثی به قاعدهٔ $b_1 + b_2$ و ارتفاع h درست شود.

تفکر جبری کجاست؟

با محاسبات نمادین می‌توان با کمک اعداد حقیقی جملات پیچیده را به جملاتی ساده‌تر تبدیل کرد. دانش‌آموزان با تجربه خواهند آموخت که یک جمله را ساده کنند و هم این که بگویند حاصل به چه معنی از عبارت اولیه ساده‌تر است. آنهایی که به فرمول $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ می‌رسند و می‌پرسند که آیا راه دیگری برای به‌دست آوردن همین فرمول وجود دارد به مهارت بالاتری از نمایش جبری رسیده‌اند. آنها از نمادهای معادل استفاده می‌کنند تا الگوهای جدیدی در مسئله بیابند.

در دبیرستان هم مسئلهٔ ذوزنقه و هم مسئلهٔ المیرا قابل تعمیم به سه بعد هستند. مثلاً می‌توان حجم یک منشور قطع‌شده با صفحه‌ای موازی قاعده را با اصل کاوالیری که مطابق با آن حجم منشور مثلث حاصلضرب ارتفاع در مساحت قاعده است، محاسبه نمود.

روش المیرا در این‌جا قابل کاربرد است. تفکر در سه بعد برای بسیاری از دانش‌آموزان مسئله‌ای بسیارمبارزه‌طلبانه است. آنها می‌توانند روشهای دوبعدی را تعمیم دهند و پایهٔ استدلال را در سه بعد قرار دهند. تعمیم یک نتیجه به سه بعد کمک می‌کند درمورد این استدلال کنند که برای تعمیم یک حکم به چه نکاتی باید توجه کنند. نمادهای جبری هم می‌توانند در هدایت این نوع استدلالها مؤثر باشند.

خلاصه

مسائل این بخش هرچند شخصیت هندسی دارند اما در جریان مهارتی ترجمه به نمادهای مختلف می‌گنجند. با نسبت دادن متغیرها برای نمایش دادن اندازه‌هایی که با دقت انتخاب شده‌اند، می‌توانند ارتباطات هندسی بین این اجزا را روشن‌تر بیان کنند. یک مثال ابتدایی وقتی است که دانش‌آموزان درمی‌یابند که طول و عرض مستطیل همیشه مساحت مستطیل راکنترل می‌کنند. اگر بتوانند این کنترل را با یک فرمول نمایش دهند و بفهمند که این بسیار شبیه فرمول مساحت ذوزنقه است، این ارتباط را دقیق فهمیده‌اند. در بعضی مسائل، مثل مسئلهٔ کاشیهای مرزی دانش‌آموزان الگوهای عددی را به هندسهٔ پنهان در مسئله ربط می‌دهند. به‌علاوه، برای کار با مدلهای جبری به‌منظور بررسی شکلها، دانش‌آموزان دربارهٔ مشخصات صفر بعدی، یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی همان اشکال اظهارنظر می‌کنند. با نمودارها و جدولهایی که مسئله را خلاصه می‌کنند، پیدا کردن الگوها و ارتباطات درونی متغیرها و استدلال از روی آنها چنین اظهارنظرهایی را ساده می‌کنند. ممکن است دانش‌آموزان برای یافتن الگو یک ردیف از جدول را بررسی کنند و ممکن است بازگشتی فکر کنند. نمایشهای نمادین نه تنها خصوصیات مختلف یک شکل هندسی را به‌هم مربوط می‌کنند بلکه همراه با جدولها و نمودارها راه‌های مؤثری برای اکتشاف، توصیف و بررسی الگوها به‌دست می‌دهند. این کار به‌خصوص وقتی اهمیت دارد که دانش‌آموزان ایده‌های ریاضی را دریابند و در ذهن خود درونی کنند. (تغییر در اندازهٔ طولها در یک شکل چه تأثیری در اندازه‌گیری سطح و حجم دارد؟ آیا می‌توانید با دانستن روش المیرا فرمول مربوطه در سه‌بعد را حدس بزنید؟) کمک گرفتن از هر سه روش که در حل مسائل شکل و اندازه مطرح است، این سؤال را به ذهن می‌آورد که کدام روش مهم‌تر است یا این که آیا روشهای دیگری (مثل تصویرسازی) برای حل این مسائل وجود دارد که مهم‌تر از اینها باشد؟ در بسیاری از مسائل نمایش مسئله به چندین روش به این تصمیم‌گیری کمک می‌کند.

مسائلی که در بالا آمدند، برای تأکید بر این نکته بود که جبر در کدام مسائل هندسی پیدا می‌شود و در محتوای مربوط به شکل و اندازه چه نقشی بازی می‌کند. این مسائل به جبر به‌عنوان علم نمایشها نگاه می‌کند و با کمک استدلال جبری، راههای مختلفی برای حل مسئله می‌جوید. در همهٔ این مسئله‌ها جریان مفهومی ساختار نیز دیده می‌شود که چگونه جبر استدلال هندسی را کامل می‌کند. اشیا، تصاویر، نمودارها و نمادها از راههای مختلف نمایش دادن موقعیت مسئله هستند هرچند این مسائل در محتوای شکل و اندازه مطرح شدند، به محتوای رشد و تغییر نیز نیم‌نگاهی دارند.

مثال ۳ــ در محتوای اعداد: محتوای دیگری که بسیار با آن سرو کار داریم، اعداد هستند. مردم ازاعداد برای رده‌بندی و نظم‌ذهنی دادن به جهان اطرافشان استفاده می‌کنند. به‌وسیلهٔ اعداد،

محاسبات مربوط به شغلشان و زندگی روزمره‌شان را انجام می‌دهند. درک کودک از اعداد زوج و فرد به او اجازه می‌دهد دربارهٔ تقسیم کردن خوراکی و تشکیل تیم و رعایت نوبت در بازیها، رفتار صحیحی داشته باشد همین‌طور که آنها کشف می‌کنند که آنها می‌توانند تا بینهایت بشمارند، باعث می‌شود درکی از بزرگی عدد هم داشته باشند.

مطالعهٔ اعداد به بسیاری از موضوعات مهم مربوط می‌شود (ساختار اعداد، الگوهای عددی، اعمال حسابی، ارتباط و خصوصیات اعداد، روشهای شمارش، مرتب کردن و محاسبه) که هریک در جریانهای مختلفی می‌گنجند. مثلاً عدد برای درک تابع و ارتباط بین متغیرها اساسی است. ترتیب و خصوصیات ساختار اعداد حقیقی اولین برخورد دانش‌آموز با ساختار ریاضی است. جست و جو برای تعمیمها و روشهای نمایش نمادین ریشه‌های محکمی در ساختار اعداد دارند. همین‌طور که دانش‌آموزان دربارهٔ محاسبات استدلال می‌کنند، با الگوهای عددی برخورد می‌کنند یا کمیتها را به‌صورت تصویری یا هندسی بیان می‌کنند و با ساختار اعداد آشنا می‌شوند. با پیشرفت تکنولوژی استدلال درمورد اعداد توسعه یافته است. درنهایت، استدلال درمورد محاسبات و احتیاج برای نمایش نمادین، هم در مرحلهٔ نمایش و هم درمرحلهٔ مدلسازی، ارتباطات بین نمادها را به‌وجود می‌آورد. اگرچه تأکید تدریس نباید بر معنی نمایش نمادین باشد. انتخاب اعداد به‌عنوان یک ساختار کمک می‌کند بفهمیم چه‌قدر دانش‌آموزان هریک از جریانهای مفهومی و مهارتی را درک می‌کنند و چه‌قدر هر جریان را با دیگر جریانها ارتباط می‌دهند.

خصوصیات سیستم اعداد حقیقی به ما اجازه می‌دهند جملات را به‌صورتهایی دیگر بازنویسی کنیم تا به کمک آن یک موقعیت را نمایش دهیم و با آن نمایش کار کنیم بدون این‌که به محتوا باز گردیم. تأکید بر خاصیت توزیع‌پذیری نشان می‌دهد که چگونه اعداد در موقعیتی قرار می‌گیرند که جنبه‌های ساختاری جبری را بیش‌ترنشان دهند. البته سایر خواص اعداد نیز چنین نقشی دارند اما جریانهای دیگر غیر از جریان مفهومی ساختار نیز در روند رشد درک دانش‌آموز حاضرند. درک خاصیت توزیع‌پذیری به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد که :

- درمورد مشخصه‌های مختلف یک موقعیت فکر کنند.
- حدسها را نمایش دهند، تعمیم دهند و اثبات و ابطال کنند.
- اطلاعات جدیدی در مورد یک موقعیت از نمایشهای معادل به‌دست آورند.

با کمک خاصیت توزیع‌پذیری دانش‌آموزان در مورد محاسبات مربوط به یک موقعیت می‌توانند به صورت جمعی دربارهٔ کمیتهایی که هریک دو یا چند فاکتور دارد، فکر کنند یا می‌توانند به‌صورت حاصلضرب جملاتی که هرکدام مجموعی از علامتهاست، فکر کنند. ($ab + ac = a(b + c)$

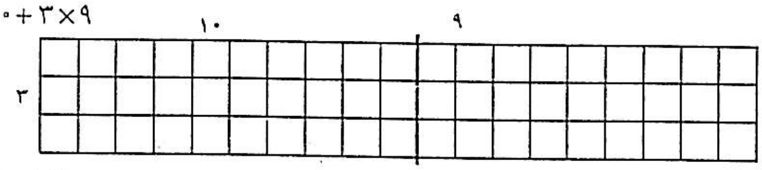
تعمیم دادن و به‌دست آوردن اطلاعات جدید از یک نمایش برای همهٔ خواص دیگر اعداد مانند توزیع‌پذیری امکان‌پذیر است.

مسائل زیر این ابعاد مختلف خاصیت توزیع‌پذیری را نشان می‌دهند. البته نمی‌توان این مسائل را به اهداف خاصی مربوط کرد چون اهداف مشترک بسیاری وجود دارد. به این مسائل به‌عنوان تختهٔ پرتابی برای تفکر در باب خاصیت توزیع‌پذیری فکر کنید.

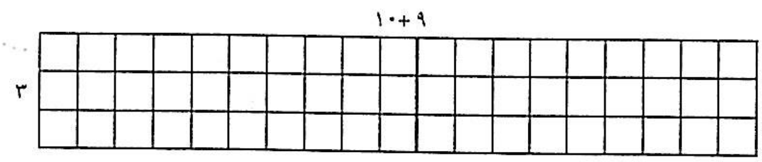
پایه‌گذاری مفهوم

تجربیات اوایل کودکی که به آنها کمک می‌کند، ساختار اعداد را بشناسند شامل پیدا کردن نظم و الگویابی می‌شود. استدلال درمورد ارتباط بین کمیتها و راه‌های مؤثر برای ارتباط برقرار کردن بین دو نمایش جبری مختلف البته نیاز به خاصیت توزیع‌پذیری دارد. استفاده از موقعیتهای الگویی که این تنوع نمایش را نشان دهد به دانش‌آموزان کمک می‌کند که تجربیاتی به‌دست آورند که در ساده‌کردن محاسبات، کارآمد باشند. مانند این مثال:

$= ۳\times۱۰+۳\times۹$



$= ۳\times(۱۰+۹)$



یک نمایش تصویری به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد که دانش‌آموزان معادل بودن دو نمایش جبری را دریابند.

چرا برای دانش‌آموزان مهم است که راههای متنوعی برای محاسبه داشته باشند؟
مدل مساحت به درک الگوریتم ضرب کردن اعداد صحیح، گویا و اعشاری چه کمکی می‌کند؟

ساختن بنا بر روی پیش‌دانسته‌ها

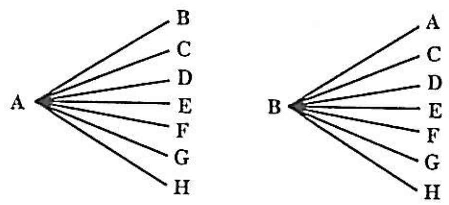
در این مسئله نشان داده شده است که چگونه راههای مختلف نمایش جبری به هم مربوط می‌شوند.

مسئله شبکه تلفن: خانه‌های بسیاری در یک ناحیه قرار دارند. برای این که هر خانه مستقیماً به تمام خانه‌های دیگر با یک سیم تلفن وصل شود، چند سیم تلفن احتیاج داریم؟

نگاهی به کلاس درس: آلاله و ژاله تصمیم گرفتند که چند مثال ساده را حل کنند تا بلکه الگویی بیابند. آلاله ۴ و ۵ خانه را درنظر گرفت و ارتباطات آنها را شمرد. همین کار را ژاله برای ۶ و ۷ خانه انجام داد. آنها جدولی تشکیل دادند و کشف کردند که می‌توانند تعداد سیمها را برای ۸ و آن‌گاه ۹ خانه پیشگویی کنند. آنها راهی پیدا کردند که عدد بعدی درجدول را از اعداد قبلی محاسبه کنند.

تعداد مسیرها	تعداد خانه‌ها
۶	۴
۱۰	۵
۱۵	۶
۲۱	۷
تعدادمسیرهای قبلی	۸
تعداد مسیرهای قبلی + تعداد خانه‌های قبلی = تعداد خانه‌های حالا	حالا

یک دانش‌آموز می‌نویسد : اگر n خانه داشته باشیم، هر خانه به خودش وصل نمی‌شود پس فقط آن را به $n-1$ خانه وصل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که $n(n-1)$ سیم داریم. برای مثال برای ۸ خانه داریم :



اما اگر خانهٔ A به خانهٔ B وصل شده باشد همانند این است که خانهٔ B به خانهٔ A وصل شده

باشد. پس باید تعداد را بر ۲ تقسیم کنیم. پس $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ ارتباط وجود دارد.

ژیلا و منیژه نیز یک جدول رسم کردند که در آن ۱ نمایندهٔ برقراری ارتباط است و D نمایندهٔ برقرار نبودن ارتباط.

	A	B	C	D
A	۰	۱	۱	۱
B	۱	۰	۱	۱
C	۱	۱	۰	۱
D	۱	۱	۱	۰

این جدول یک مربع است پس اگر n خانه داشته باشیم $n^۲$ ارتباط بررسی شده‌اند اما در قطر مربع ارتباط برقرار نیست. پس $n^۲ - n$ ارتباط برقرار شده‌اند اما هر ارتباط دوبار شمرده شده است.

پس تعداد کل سیمها $\frac{n^۲-n}{۲}$ می‌شود.

مینا همین رابطه را به شکل $\frac{۱\times n\times(n-۱)}{۲}$ نوشت و به یاد فرمول مساحت افتاد : $\frac{۱}{۲}bh$. او پرسید که آیا این فرمول مساحت به جدولی که دوستانش ساخته‌اند، ربطی دارد؟

سؤالاتی که می‌توان پرسید : آیا همهٔ فرمولها همان جوابی را می‌دهند که آلاله و ژاله به دست آوردند؟ از کجا می‌دانید که این فرمولها برابرند؟ یکی ازفرمولها شبیه به مساحت مثلث است اما کدام مثلث؟

تفکر جبری کجاست؟

جست و جو برای الگوهای بازگشتی می‌تواند پاسخی به‌دست بدهد که در بسیاری از حالات روش مؤثری نیست. این ارتباطات معمولاً به سختی می‌توانند به‌صورت فرمول بیان شوند. آنها که سعی می‌کنند یک روش مستقیم‌تری پیدا کنند، بسیار متفاوت فکر می‌کنند و سعی می‌کنند از نمایشهای مختلف استفاده نمایند. یک نکته که نشان می‌دهد نمایشهای ریاضی مختلف معادل، خاصیت توزیع‌پذیری

است. البته مینا نکته‌ای کاملاً متفاوت بیان کرد. او نمایش نمادین را به‌چیز دیگری که می‌دانست مربوط کرد. دانش‌آموزان می‌توانند سعی کنند این ارتباط را دقیق‌تر کنند. بعضی نمایشهای این مسئله به مثلث مربوط می‌شود چون این اعداد که در مسئله ظاهر می‌شوند، اعداد مثلثی هستند. ممکن است بعضی این نکته را از مثلث خیام ـ پاسکال دریابند. دانش‌آموزان می‌توانند در دنبالهٔ زوج اعداد الگویابی کنند.

۱,۰ → (۱,۰)

۲,۱ → (۲,۱)

۳,۳ → (۳,۳)

۴,۶ → (۴,۶)

دیگران ممکن است از نمودار این دوتاییها برای الگویابی استفاده کنند. آنها خواهند دید که نمودار به شکل $y = x^2$ است اما با نرخ تغییر کم‌تر و رأس متفاوت. در این‌جا این که نمایشهای مختلف $y = x^2 - x$ و $y = x(x-1)$ نمودار یک معنی دارند بسیار آموزنده است.

چگونه نمایشهای جبری روند استدلال دانش‌آموزان را نمایش می‌دهند؟ فایدهٔ داشتن نمایش های مختلف چیست؟

چگونه انتخابهای ما برای نمایشهای جبری با هم متفاوت‌اند؟ آیا می‌توانید بر این دیدگاه خود برداشتهای دیگری بنا کنید؟

این مسئله در سالهای بالاتر می‌تواند به‌صورت یک مسئلهٔ شمارشی هم مطرح شود. برای انتخاب یک سر سیم n انتخاب و برای انتخاب سر دیگر سیم $n-1$ انتخاب داریم. با تقسیم کردن بر دو، این انتخاب سیم مستقل از جهت آن می‌شود. به این روش اعداد مثلثی ۱، ۳، ۶، ۱۰ و ... ظاهر می‌شوند که به ضرایب دوجمله‌ای هم مربوط می‌شوند.

در هر پایه چه‌قدر باید بر ساختار تأکید کرد؟ دانش‌آموز برای درک ساختار به چه ادراکاتی نیازمند است؟ با چه محتوایی می‌توان محیط مناسب برای به‌دست آوردن این ادراکات را به‌وجود آورد.

چه‌قدر تلاش و چه‌قدر زمان نیاز دارد که دانش‌آموزان بفهمند که به خاصیت توزیع‌پذیری نیاز دارند و یاد بگیرند که با آن کار کنند؟

خلاصه

همگام با این که در این مثالها توجه به عدد است، جریانِ مفهومی ساختار اهمیت دارد. خاصیت توزیع‌پذیری نقش مهمی در درک ارتباط بین نمایشهای نمادینِ مختلف بازی می‌کند. برای استفاده از خصوصیات ساختاری یک سیستم جبری دانش‌آموزان باید با تفکر و دقت با این ساختارها از سنین پایین سروکار داشته باشند. قدرت تعمیم این ارتباطات در قلب جبر واقع است و طبیعت ساختاری اعداد به ما اجازه می‌دهد که ارتباطات جبری بتوانند به‌صورتهای معادلی تبدیل شوند. هر نمایش جدید می‌تواند به دانش ما از مسئله اضافه نماید. کاربرد نمادها و خصوصیاتی که اعمال حسابی از آنها پیروی می‌کنند به ما اجاره می‌دهند یک موقعیت را به زبان نمادین به نمایش درآوریم. می‌توان مسئله را به زبان نمادها ترجمه کرد و بعد به زبان نمادها محاسباتی انجام داد و در نهایت حاصل محاسبات را دوباره به زبان مسئلهٔ اولیه ترجمه نمود.

به کاربردن این چهارچوب

شما می‌توانید با تجربهٔ آموزشی خود، این چهارچوب را قدرت‌مندتر کنید.

- در مورد پاسخ این سؤالات تحقیق کنید.
- طبیعت ذاتی هرکدام از این جریانها چیست؟
- آیا بعضی از جریانها در سنین خاصی اهمیت بیش‌تری دارند؟
- چه جریانهای مهم دیگری می‌شناسید؟
- چه محتوایی می‌تواند بهتر در چهارچوب این جریان‌ها تفکر جبری را توسعه دهد؟
- تمرکز این جریانها در پایههای دبیرستان باید چگونه باشد؟
- چگونه می‌توان جریانهای مختلف را با هم هماهنگ نمود؟
- چگونه و چه موقع باید رشد تفکر جبری را یاری کرد؟
- تفکر جبری دانش‌آموزان در سنین مختلف چه مشخصه‌هایی دارند؟

حل مسئله در برنامهٔ درسی ریاضیات

مقدمه

بنا بر اعتقاد ما، به‌طور خلاصه وظیفهٔ اولیهٔ معلمان ریاضی، آموزش تفکر به دانش‌آموز است. این فرایند تفکر شامل: پرسشگری و یافتن قلب محتوای مطلب ریاضی است و این که دانش‌آموزان بیش‌تر از این که ایده‌ها را طوطی‌وار تکرار کنند، بتوانند آنها را به‌کار گیرند. چنان‌که هالموس در مقالهٔ «قلب ریاضیات» می‌گوید:

«حل مسائل، بخش اصلی از هر زندگی پرمعنا است. قسمت قابل‌ملاحظه‌ای از زندگی حرفه‌ای تکنسینها، مهندسین، دانشمندان و ... وابسته به حل مسائل ریاضی می‌باشد. وظیفهٔ همهٔ معلمان خصوصاً معلمان ریاضی این است که دانش‌آموزان را بیش‌تر از حقایق (یا مفاهیم)، با مسائل مواجه کنند.»

«رویکرد مسئله‌ای» در آموزش ریاضیات برای همهٔ دانش‌آموزان ارزشمند است: کسانی که برای این رویکرد ارزش قائل هستند، کسانی که از آن استفاده می‌کنند و کسانی که با آن زندگی می‌کنند.

در آموزش ریاضیات، هر رویکردی را که حالت پرسشگری و آمادگی ذهنی را در دانش‌آموز پرورش می‌دهد و او را به‌طور فعال در فرایند انجام دادن ریاضیات به‌کار می‌گیرد، مغتنم می‌شماریم و نیز استفاده از «رویکرد مسئله محور» قابل ارائه در یک درس استاندارد را که شامل مشارکت دانش‌آموزان در بحث، حل و ارائهٔ حل مسئله باشد، تشویق می‌کنیم. کسانی که نگران پوشش مواد موضوعات گوناگون هستند باید به بخش «پیشنهادهایی برای تدریس» مراجعه کنند. به همین‌منظور، باید مباحث حل مسئله را که در پایه‌های مختلف گسترش یافته‌اند، به‌صورت منظم در یک برنامهٔ درسی استاندارد بگنجانیم.

با کمک درسهای حل مسئله که یا بر بعضی از مطالب و موضوعات خاص متمرکز شده یا دامنه‌ای کلی از مباحث حل مسئله را پوشش می‌دهند، می‌توان روح پژوهش ریاضی را به‌طور اساسی در دانش‌آموزان تقویت نمود. به‌منظور رواج التزام به آموزش از طریق حل مسئله پیشنهاد می‌شود که کتابهای حل مسئله که در همهٔ سطوح گسترش یافته‌اند به‌طور وسیعی منتشر شوند.

پیشنهادهایی برای تدریس حل مسئلهٔ ریاضی

هیچ راه منحصربه‌فرد (مستقیمی) برای آموزش حل مسئله وجود ندارد و باید با بی‌پروایی

اعتراف کرد که تعداد راههای عملی آموزش تفکر ریاضی، به تعداد معلمان با استعداد است. علاوه بر این، روشهای اجرای کلاسی وابسته به ویژگیهای شخصی معلمان دارد. روشی که برای یک معلم کار می‌کند، برای دیگری باید اصلاح شود تا به‌راحتی بتواند آن را مورد استفاده قرار دهد.

این پیشنهادها با در نظر داشتن دیدگاه فوق ارائه شده‌اند و به همین دلیل، تا اندازه‌ای غیر رسمی و قابل انعطاف نوشته شده‌اند.

این پیشنهادها عملی و در کلاس قابل اجرا هستند. لطفاً همان‌طور که خود تلاش می‌کنید که آنها را اجرا کنید، به همکاران نزدیک خود نیز آنها را توصیه کنید. با در نظر گرفتن این پیشنهادها، آنهایی را که به‌نظر شما متناسب هستند به‌کار گرفته و به‌گونه‌ای در کنار هم قرار دهید که احساس راحتی کنید.

۱ــ زمینه و دلیل منطقی: یک تفاوت بزرگ بین اجرای مباحث ریاضی ما معلمان و نگرش دانش‌آموزان به آنها وجود دارد و آن این که در جریان فرایند کشف، انجام دادن ریاضیات امری حیاتی است بدین جهت که فهم اشیا و دستگاههای خاص ریاضی را به‌دنبال دارد. ابتدا با یک ناحیه (از ریاضیات) آشنا می‌شویم. درحال انجام دادن ریاضیات، شهود ما گسترش می‌یابد، شک کرده و درستی بعضی چیزها را حدس می‌زنیم، آن را با مثالهای مختلف آزمایش کرده، به مثال نقصها توجه کرده و سعی می‌کنیم پیشنهادهای ارائه دهیم که درستی حدس را به اثبات برساند. وقتی تصور می‌کنیم که می‌دانیم چه چیزی (در راستای اثبات حدسمان) کار می‌کند، برای اثبات آن تلاش می‌کنیم. این تلاش ممکن است موفقیت‌آمیز باشد یا نباشد؛ ممکن است هر تعدادی شروع اشتباه، شکست، صرف هزینه و اصلاحات به‌وجود آید. اما ناگهان نتیجه با پشتکار و بخت و اقبال مانند آبشار به پایین ریزش می‌کند. کمی آزمایش کردن می‌تواند به اندازهٔ کافی لذت‌بخش و مهیج باشد.

ما قلمروهای ناشناخته را به تصویری کشیده‌ایم و خود را در فرایندها غنی و پربار کرده‌ایم. متأسفانه دانش‌آموزان ما به‌ندرت معتقدند که ریاضیات می‌تواند شبیه چنین چیزی باشد. آنها به‌طور عجیب و مهیبی قربانی کارکشتگی و مهارت ما معلمان می‌شوند؛ زیرا مطالب زیادی وجود دارد که آنها باید یاد بگیرند. ما نتایج اکتشافات ریاضی را به‌طور سازمان‌دهی شده در اختیار آنان قرار می‌دهیم. البته آنان می‌توانند تسلط بیش‌تری بر این مطالب پیدا کنند؛ اما این نوع تسلط و مهارت می‌تواند نتایج ناخوشایندی به‌همراه داشته باشد. دانش‌آموزان فکر می‌کنند تمام ریاضیات شناخته شده است و مانند دستور زبان لاتین باید با تمرین کردن یاد گرفته شود. جز احساس رضایت‌مندی ازانجام این تمرینها هیچ هیجان دیگری وجود ندارد. به هنگام برخورد با مشکلات در ریاضیاتی که برای ما ساده است، آنها برای برطرف کردن مشکل، احساس عدم صلاحیت می‌کنند. ایده‌های ما را در اختیار ندارند و

برای فهمیدن مطالب جدید ریاضی باید تلاش و ستیز بیش‌تری داشته باشند. مهم‌تر این که، به این باور نرسیده‌اند که فهمیدن ریاضیات یعنی پرسیدن سؤالهای مناسب تا لحظه‌ای که مطالب برای آنها با معنی شده و درک گردند؛ بلکه فکر می‌کنند که فهمیدن ریاضیات به معنی این است که کارهایی را که دیگران نشان داده‌اند بدون علاقه بازسازی کنند.

تأکید ما بر این است که ما می‌توانیم و باید به دانش آموزان تجربهٔ انجام ریاضیات را آن‌گونه که می‌دانیم، عرضه کنیم. این مطلب که دانش آموزان نمی‌توانند به نمودارهایی که به فهم خودشان از مسئله کمک می‌کند و همچنین آزمایش حالتهای خاص و استراتژیهایی نظیر اینها تکیه کنند، نگران کننده است. نگران‌کننده‌تر این که دانش‌آموزان واقعاً به ندرت می‌فهمند که می‌توانند تفکر خود را تماشا کنند و می‌توانند در اجرای حل مسئله، با برگشت روی شکستها و موفقیتهای خودشان پیشرفت کنند. به‌نظر می‌رسد آن‌چه که در زمینهٔ ورزش کاملاً طبیعی جلوه می‌کند، در زمینهٔ تعلیم ذهن اشخاص کاملاً ناآشنا است. به دلیل این که در زمینهٔ ورزش، عمل و آموزش و یادگیری تجسم آشکار دارد ولی تعلیم ذهن تجسم آشکار ندارد. به عنوان هشداری در ساده‌نگری به این مطلب، خوب است بپرسیم چیزی که ما می‌خواهیم دانش‌آموزان از آموزه‌های خود استخراج کنند، چیست؟

خدمت واقعی ما به دانش‌آموزان این است که برای آن‌ها مهارتهای تفکری که بعد از پایان امتحان نهایی بتوانند به‌کار گیرند را فراهم کنیم.

بدون شک ریاضیات می‌تواند برای این منظور به‌عنوان یک وسیلهٔ ایده‌آل خدمت کند. برای یادگیری چیزی که ما به آن «فهمیدن» می‌گوییم، نظام بهتری وجود ندارد.

تفکر ریاضی منطقی و دقیق است و شگردهای مورداستفادهٔ ما در حمله به مسئله‌ها، عموماً کاربردپذیر است اما دانش‌آموزان احتمالاً نمی‌توانند به احساسی درمورد فهمیدن برسند و همچنین نمی‌توانند ازشگردهای تفکر بدون این که خودشان آنها را به‌وجود آورده باشند، استفاده کنند. بعید است آنها تفکر ریاضیشان را بعد از آموزش توسعه دهند مگر این که ما به‌عنوان یک تسهیل‌کننده در انجام دادن ریاضی آنها خدمت کرده باشیم که البته بر این کار توانائیم. بعضی از کارهایی که در درس حل مسئله می‌توان انجام داد و همچنین بعضی دلایل انجام آنها به دنبال خواهد آمد.

۲ــ موضوعاتی در باب تدریس حل مسئله

الف ــ معلم به‌عنوان یک الگو: قسمت مشکل آموزش مهارتهای تفکر ریاضی این است که ما فراموش کرده‌ایم که ریاضیات را خیلی‌خوب می‌دانیم (به‌ویژه وقتی ما ریاضیات مقدماتی تدریس می‌کنیم) و وقتی با ریاضیات سروکار داریم، احتیاجی به فکر کردن نداریم و آنها را به‌طور خودکار انجام می‌دهیم. ما در اکثر مسائلی که در کلاس مطرح می‌شوند، راه مستقیمی که ما را به حل مسئله

نزدیک کند، می‌دانیم ولی دانش‌آموز نمی‌داند و صرف نشان دادن راه‌حل مستقیم مسئله به دانش‌آموزان، در دوری گزیدن آنها از همهٔ رویکردهای اشتباهی که در تلاشهای خود دارند، کمکی نمی‌کند ؛ به همین دلیل، ما باید برخی از فکرهایمان را بشکافیم تا دانش‌آموز بتواند آن را دنبال کند. برای انجام این کار سه روش وجود دارد :

الف ـ ۱ ـ حرکت در مسیر فرایند کشف بر اساس حرکت «گام به گام» (حتی وقتی که شما جواب را می‌دانید.)

به عنوان مثال، مسئلهٔ زیر را درنظر بگیرید :

$P(x)$ و $Q(x)$ را دو چند جمله‌ای با ضرایب وارونه بگیرید.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

به‌طوری که $a_0 \neq 0$ و $a_n \neq 0$. رابطهٔ بین ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ چیست؟ ادعای خود را ثابت کنید.

شما در برخورد با مسئله‌ای شبیه به این چه می‌کنید؟ روش کلی برای یافتن ریشه‌های یک چندجمله‌ای در دست نداریم. وضعیت در مورد مقایسهٔ ریشه‌های دو یا چند جمله‌ای بدتر نیز هست. احتمالاً بهترین کار در این لحظه، مشاهدهٔ چند مثال ساده است. شاید بتوانیم با این مثالها شهود و دامنهٔ دیدمان را گسترش دهیم. به‌جای این که یک زوج چند جمله‌ای دلخواه درنظر بگیریم، یک جفت چندجمله‌ای درجه دوم درنظر می‌گیریم. در این حالت حداقل می‌توانیم آنها را حل کنیم. هرگاه $P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ ریشه‌ها به ترتیب : $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ هستند. چون این دو کسر صورتهای یکسانی دارند، یقیناً الهام‌بخش خواهد بود.

واقعاً چیزی که تعمیم یابد یا بتوانیم آن را به پیش ببریم، نمی‌بینیم. این مطلب را در مدت یک یا دو دقیقه به‌دست خواهیم آورد ؛ اما باید چند مثال دیگر را نیز بررسی کنیم.

حالت خطی را درنظر می‌گیریم. اگر $P(x) = ax + b$ و $Q(x) = bx + a$ ریشه‌ها به ترتیب $-\frac{b}{a}$ و $-\frac{a}{b}$ می‌باشند که وارون یک دیگرند. ولی جذابیتی ندارد. به چند جمله‌ایهای مربعی برگردیم. هنوز به‌اندازهٔ کافی احساس این که می خواهیم چه بکنیم را نداریم. باید مثالهای بیش‌تری را بررسی

کنیم. یک ایدهٔ زیرکانه انتخاب چندجمله‌ایهایی است که بتوانیم آنها را تجزیه کنیم. در این صورت دسترسی به ریشه‌ها آسان خواهد بود. وضعیت در مورد چندجمله‌ای ساده‌ای مثل $(x+2)\ (x+3)$ چگونه خواهد بود؟

داریم $P(x) = x + 5x + 6$ و $Q(x) = 6x + 5x + 1$ ؛ $Q(x) = (2x+1)\ (3x+1)$. ریشه‌ها به‌ترتیب ۳-، ۲- و $-\frac{1}{3}$، $-\frac{1}{2}$ می‌باشند که متناظراً وارون یک‌دیگرند.

در مورد $P(x) = (3x+5)(2x-7) = 6x - 11x - 35$ چه می‌توان گفت. می‌دانیم که ریشه‌های آن $\frac{7}{2}$ و $-\frac{5}{3}$ می‌باشند. $Q(x) = 30x - 11x + 6 = -(5x+3)(7x-2)$ و ریشه‌ها $\frac{2}{7}$ و $-\frac{3}{5}$ می‌باشند که متناظراً معکوس ریشه‌های $P(x)$ می‌باشند. دیگر این اتفاقی نیست اما هنوز بهتر است به تجزیه‌پذیرها نگاه کنیم. فرض کنید :

$$P(x) = (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \quad \text{در این صورت}$$

$$Q(x) = bdx^2 + (ad+bc)x + ac = (bx+a)(dx+c)$$

و ریشه‌ها به ترتیب $-\frac{b}{a}$، $-\frac{d}{c}$ و $-\frac{a}{b}$، $-\frac{c}{d}$ می‌باشند. دو مرتبه آن روش کار می‌کند و حدس می‌زنیم که این، تعمیم پیدا می‌کند. در این‌جا دو راه برای ادامه دادن وجود دارد. در حالت کلی حدس می‌زنیم که ریشه‌های $P(x)$ وارون ریشه‌های $Q(x)$ است و درصورتی که هنوز مطمئن نشده باشیم باید با یک یا دو چندجمله‌ای تجزیه‌پذیر از درجه ۳ را امتحان کنیم. اینک می‌توان در جهت تعمیم استدلال فوق تلاش کرد ولی کاملاً سر راست نیست. هرچند جمله‌ای نمی‌تواند به عوامل اول تفکیک شود. در این‌جا ممکن است توقف کردن وعبارت‌بندی جدید از حدس زدن باارزش‌تر باشد.

پس فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب معکوس باشند. ثابت کنید ریشه‌های آنها وارون یک‌دیگرند.

اجازه دهید از منظری که مسئله می‌طلبد، نگاه کنیم یعنی این‌که بعضی مقادیر مانند، ریشه $P(x)$ است، چیست؟ یعنی $P(r) = 0$. اکنون حدس می‌زنیم که وارون r که عدد $\frac{1}{r}$ است به‌عنوان ریشه Q مفروض است یعنی $Q(\frac{1}{r}) = 0$. اجازه دهید به حالت درجه دوم برگردیم و ببینیم چه اتفاقی می‌افتد.

هرگاه $P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + q$ اگر r ریشه‌ای از $P(x)$ باشد، آنگاه :

$P(r) = ar^2 + br + c = 0$ اکنون $Q(\frac{1}{r})$ چیست؟

$$Q(\frac{1}{r}) = C(\frac{1}{r})^2 + b(\frac{1}{r}) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

بنابراین، روش فوق کار می‌کند و این بحث تعمیم پذیر است. اکنون می‌توانیم برهان را بیان کنیم.

قضیه: فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ مانند فوق باشند در این صورت ریشه‌های $Q(x)$ وارون ریشه‌های $P(x)$ است.

برهان: فرض کنید r ریشه‌ای از $P(x)$ باشد، در این‌صورت $P(r) = 0$ مشاهده کنید که $r \neq 0$ چرا که $a_0 \neq 0$. علاوه بر این:

$$Q(\frac{1}{r}) = a_0(\frac{1}{r})^n + a_1(\frac{1}{r})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\frac{1}{r}) + a_n =$$

$$\frac{1}{r^n}(a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1}r^{n-1} + a_n r^r) = \frac{P(r)}{r^n} = 0$$

بنابراین، $\frac{1}{r}$ ریشه $Q(x)$ است.

برعکس فرض کنید s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد، دیدیم که $P(\frac{1}{s}) = 0$ و این برهان قضیه را تمام می‌کند.

اینک زمان کالبدشکافی مسئله رسیده است. مشاهده کنید که برهان مانند یک مبحث ریاضی کلاسیک مختصر و رسمی است و نتایج فرایند فکر را نمایش می‌دهد. اما برهان مسئله از کجا الهام گرفته شد؟ اگر شما به‌شیوه‌ای که بحث شد، نظر افکنید خواهید دید که دو کشف مهم وجود داشته است. اولین پیشرفتی که همراه با فهم مسئله انجام داده‌ایم، دریافت احساسی ازمسئله بود. بیان مسئله در کلی‌ترین حالت، کار کوچکی برای ما بود. کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالتهای خاص به‌منظور دیدن یک الگو برای برهان بود. به‌ویژه این که اولین توجه مابه حالتهای خاص چند جمله‌ایهای درجه ۲، بینش و آگاهی زیادی را تأمین نکرد. ما می‌بایست حالات خاص بیش‌تری را بررسی می‌کردیم. در این راه به مشاهدهٔ یک سری مثالهای سر راست که برای محاسبه ساده هستند، به‌منظور کشف بعضی از الگوها پرداختیم. خوشبختانه قادر بودیم که الگو را تعمیم دهیم. در این حالت برای دراختیار داشتن ریشه‌های چندجمله‌ایها، چندجمله‌ایهای تجزیه‌پذیر را اختیار کردیم. به‌طور بدیهی حالات

متفاوت و پیش‌آمدهای متفاوت، ما را به انتخابهای متفاوت هدایت خواهد کرد. تدبیر مذکور به ما اجازه داد تا حدس خود رابسازیم.

پیشرفت دوم بعد از این‌که حدسمان را ساختیم، حاصل شد. اگرچه برای برقراری حکم چند ایده داشتیم ولی بحث آشفته به‌نظر می‌رسید و ما برای بازنگری مسئله توقف کردیم.

کاری که در آن‌جا انجام دادیم، مهم است اما اغلب از آن‌چشم‌پوشی می‌شود. به شرایط مسئله برگشتیم، آنها را کشف کردیم و آنها را به‌منظور حس ارتباطشان با نتایج موردنظرمان مشاهده کردیم. ممکن است سؤالاتی ازقبیل r ریشه P(x) است یعنی چه؟ وارون r چیست و معنی این که $\frac{1}{r}$ ریشه Q(x) است، چیست؟ اغلب به‌طور انفرادی ساده به‌نظر برسد ؛ اما این سؤالات توجه ما را به خیلی چیزهایی که جواب را در اختیار ما گذاشت، جلب نمود. روشن کردن چنین فرایندهایی دوکار انجام می‌دهد :

۱ــ از ریاضیات راززدایی کرده و آن را در دسترس قرار می‌دهد. وقتی دانش‌آموز ببیند که این ایده از کجا آمده است، دیگر مانند شعبده‌بازی به‌نظر نمی‌رسد.

۲ــ تدابیر مورد تأکید در فوق، قابل تعمیم بوده و در هر جای دیگر مفید می‌باشند. آموزش کیفیت به‌کارگیری آنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مسئله‌حل کنهای بهتری بشوند.

نقطه ضعف بحث فوق این است که نمایش هنوز یک‌طرفه است. معلم هنوز در حال توضیح این مطلب است که او چگونه به مسئله نزدیک می‌شود. اگرحل کردن مسئله یک تجربه شخصی است، دانش‌آموز نیازمند است که شخصاً با مسئله درگیر شده باشد. این مطلب معلمان را به راه دوم خدمت‌گذاری به‌عنوان الگو و نقش‌آفرین هدایت می‌کند.

الف ــ۲ــ حل مسئله‌ها همراه دانش‌آموزان؛ استفاده ازایده‌های آنان: ایده مطرح در این‌جا، حل مسئله‌ها با کمک یک‌دیگر است و معلم به‌عنوان هماهنگ‌کننده و تنظیم دهنده ایده‌ها و یک رفیق شفیق، سؤالهای مهم را ایجاد کرده و همه‌چیز را در مسیر صحیح هدایت می‌کند. او مستقیماً جوابها را به‌دست نمی‌دهد بلکه دانش‌آموز را در جهت بهترین استفاده از منابع در دسترس خود یاری می‌کند. معلم باید جزوه‌ای مشتمل بر مسئله‌ها داشته باشد و کلاس را به‌بحث روی یکی از آنها متمرکز کند. سؤالاتی که توسط معلم مطرح می‌شوند، نوعاً این‌گونه‌اند :

آیا کسی پیشنهادی دارد؟ دیگران چه‌طور؟ دراین مورد چه فکری می‌کنید؟ بسیار خوب، ما اینها را به‌عنوان ایده‌های محتمل داریم. کدام‌یک را باید انجام دهیم؟ آیا ندای معقولی به گوش می‌رسد؟ آیا روزنهٔ امیدی هست؟ آیا در این مورد باید تلاش کنیم؟ شما فکر می‌کنید چه چیزی

جایگزین مناسب‌تری است؟ چیزی رافراموش نکرده‌ایم؟ پنج دقیقه است که داریم همین کار را می‌کنیم، آیا شما مطمئن هستید که حقیقتاً مسئله را به‌قدر کافی فهمیده‌ایم؟ چه چیزی را باید درنظر می‌گرفتیم؟ شما با مسئله‌ای که ما در حال حل کردن آن هستیم، چه‌طور برخورد می‌کنید؟ آیا کشفی در ذهن ما صورت گرفته؟ و غیره.

با پشتکار معلم، این سؤالها نهایتاً طبیعت ثانویه دانش‌آموز خواهد شد. یاد می‌گیرد که خود او هم از این سؤالات بپرسد. بدین‌ترتیب می توان در اواسط سال تحصیلی از آنها پرسید چه سؤالاتی می‌خواهم از شما بپرسم؟ و آنها معمولاً در پایان قادر خواهند بود که بگویند که آنها حقیقتاً می‌خواهند خودشان از خودشان سؤال بپرسند.

الف ــ۳ــ معلم روی صحنه، حل مسئله‌های جدید: آموزش حل مسئله، به دلیل عدم وجود سلوب خاص، برای دانش‌آموز درسی پردردسر و سنگین است. دقیقاً وقتی به مسئله‌ای فکر می‌کنند، مسئلهٔ دیگری را فراموش می‌کنند و مسائل جدید آنها را در یک دور بسته می‌اندازد. به‌منظور دادن یک استراحت کوتاه به دانش آموزان و همچنین برای این که آنها معلم را در وضعیتی مشابه خود ببینند، باید به آنها اجازه بدهیم که مسئله‌هایی را مشابه آنچه برایشان طرح می‌کنیم، برای ما طرح کنند. به این ترتیب که کلاس با هر سؤالی شروع می‌شود و اگر مسئله‌ای داشته باشند، معلم با صدای بلند روی تخته‌سیاه [کنایه از طرز رفتاری که مراحل حل مسئله را برجسته و مشاهده‌پذیر کند] روی مسئله کار کند. بهره و ثمرهٔ آنها از این روش، این است که معلم را در حال به‌کارگیری استراتژیها مشاهده می‌کنند.

ب ــ معلم به‌عنوان پرورش‌دهنده: بعضی از همکاران، ریاضیات را برای دانش‌آموزان خود به‌عنوان یک «ورزش» توصیف می‌کنند. البته منظور آنها این است که دانش‌آموز می‌بایست درگیر انجام دادن ریاضیات شود یعنی این که دانش‌آموز خارج از گود نمی‌تواند به ارزش ریاضی پی‌ببرد. دیدگاه دیگری در شبیه‌سازی تعلیم و تعلم ریاضیات به ورزش موجود است.

معلم به‌جای ایفای نقش مربی یا پرورش‌دهنده، معمولاً نقش توزیع‌کننده دانش رادرحین اجرای درس و آموزش متن و پیشبرد کلاس ایفا می‌کند. زیرا در اکثر روشهای آموزش، توانایی تعلیم ما در مهارتهای پهلوانی بسیار پیشرفته‌تر ازمهارتهای عقلانی است. نقشهٔ یک تربیت عقلانی برای اکتشاف باارزش است. عمل تعلیم یک مهارت سرراست ورزشی مانند سرو در تنیس یا پرتاب خطا در بسکتبال را درنظر بگیرید. آن مربی که می‌گوید : «ببینید این حرکت را چگونه انجام می‌دهم، پس خودتان آن راتمرین کنید.» خیلی موردتوجه قرار نمی‌گیرد. با این روش، ورزشکار برای مدت طولانی مشغول نخواهند شد. البته فرایند اجراشده، به‌طور قطعه‌به قطعه نمایش و توضیح داده

می‌شود. او می‌گوید چگونه باید ایستاد، وضعیت دست چگونه باید باشد و ... ورزشکاران نیز به‌طور کلی هر کدام از قسمتهای تکلیف را به‌موازات بیان مربی انجام می‌دهند. همچنین هرکدام از ورزشکاران برای تمرین آموخته‌های خود به صحنه فرستاده می‌شوند اما مربی سریعاً به‌اصلاح حرکت آنها و بیان جزئیات بیش‌تر مراحل انجام فعالیت برمی‌گردد: «شانه‌هایتان باید پایین باشد، شما نباید برای پرتاب خیلی خیز بردارید و ...» اگر اجرا مهم باشد، معمولاً مربی و بازیکن، فیلم حرکت کند ورزشکار را در حال انجام عمل خواسته شده از ویدئو موردبازبینی قرار می‌دهند تا بتوانند نکات ظریف مورد استفادهٔ ورزشکار که در پیشرفت وی مؤثر هستند را شناسایی و تفکیک کنند. این دیدگاه از تربیت باید با آن‌چه که «مهارتهای پایه» یا رویه‌های استاندارد نامیده می‌شود، همراه باشد. اما مربیان کارهای مهم‌تری هم انجام می‌دهند. قسمت اعظم کار مربیان، تربیت ورزشکاران برای اتخاذ تصمیمهای هوشمندانه در طی بازی است.

در یک آزمون تکنیکهای انتگرال‌گیری از ۱۷۸ دانش‌آموز ۴۴ نفر انتگرال $\int \frac{xdx}{x^{۲}-q}$ را با روش تجزیه کسرها و ۱۷ دانش‌آموز دیگر با جایگذاری $x=۳\sin\theta$ به‌دست آوردند. اما هردوی این روشهاوقت بسیار زیادی می‌گیرد. یک ملاحظهٔ مختصر نشان می‌دهد که مسئله می‌تواند با جایگذاری بسیار مقدماتی‌تر $u=x^{۲}-۹$ حل شود.

قسمتی از یک نصیحت استاندارد که میانبری مجازی در همهٔ محتوا است، می‌گویند: «تا موقعی که به‌وجود یک روش جایگزین ساده اطمینان حاصل نکرده‌ایم، هیچ کار سختی را انجام ندهیم» این یکی از نصیحتهایی است که مربی باید بپذیرد. همین نکته به‌عنوان راهی ارزشمندتر از ارائهٔ «مستقیم» حل مسئله به دانش‌آموز تلقی می‌شود.

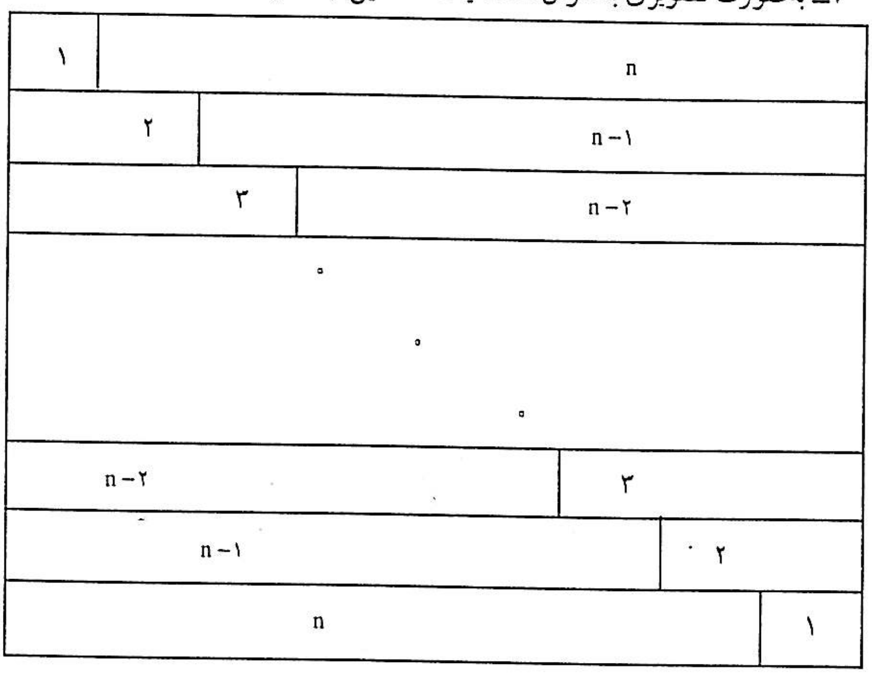
پ ــ بیش‌تر از یک راه برای حل مسائل وجود دارد: از آن‌جا که بیش‌تر مسائلی که ما در کلاس حل می‌کنیم بسیار ساده هستند. معمولاً اولین راه‌حلی که توسط تکنیکهای آموزش داده شده به دانش‌آموزان قابل اجراست، اکتفا می‌کنیم و پس از حل یک مسئله به‌دنبال مسئله دیگری می‌رویم. دانش‌آموزان با این تصور که ما راه‌حل مناسب برای حل مسئله را ارائه کرده‌ایم، تنها گذاشته می‌شوند. اما این یک توهم است. مثلاً راه‌حلهای پیشنهادی که برای قضیه فیثاغورس را می‌شناسیم درنظر بگیرید و این که اگر یکی از ما راه‌حل جدید به‌دست بیاورد، چه‌قدر خوشحال خواهد شد. به این نکته توجه داشته باشید که درک بهتر یک حقیقت ریاضی یعنی برقرار کردن ارتباطات بیش‌تر و بیش‌تر با سایر مفاهیم ریاضی. برای مثال می‌توان به مجموع $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ به زبان

چندین نمایش فکرکرد:

۱ــ حاصل جمع $\sqrt{\frac{n}{۲}}$ زوج که هرکدام مجموع $n+۱$ دارند.

$$\underbrace{۱+۲+۳+\underbrace{\cdots+(n-۲)+(n+۱)}+n}_{n+۱}$$

۲ــ به‌صورت تصویری به‌عنوان نصف یک مستطیل $n\times(n-۱)$



که به‌طور نمادین می‌تواند به‌صورت زیر نمایش داده شود:

$$s=۱+۲+۳+\cdots+(n-۲)+(n-۱)+n$$

$$s=n+(n-۱)+(n-۲)\cdots+۳+۲+۱$$

$$۲s=\underbrace{(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)}_{n\ \text{بار}}$$

۳ــ به‌عنوان حکمی که صحت آن توسط استقرا ثابت می‌شود.

۴ــ به‌عنوان حالت خاص یک معادلهٔ تفاضلی.

می‌توان به دانستن یکی از این ابعاد خرسند بود اما هر کدام از این ابعاد تفکر متفاوتی است و می‌تواند به روش متمایزی تعمیم داده شود. در حل یک مسئلهٔ جدید هرکدام از این دیدگاهها ممکن

است کلید راه‌حل مسئله باشد. به‌علاوه علم به این که مسائل می‌توانند از چندین روش حل شوند، بر روشهای حل مسئلهٔ دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد. دانش‌آموزی که فکر می‌کند هر مسئله یک راه دارد، اگر مدتی در مورد مسئله‌ای فکر کند خسته می شود و منتظر یادگیری تکنیک مناسب می‌شود. اما دانش‌آموزی که تصور می‌کند جایی برای اکتشاف ریاضی هم هست و از آن سود خواهد برد، به احتمال بیش‌تری به کلنجار رفتن با مسئله ادامه خواهد داد و در نهایت به یک راه‌حل غیرقابل انتظار دست خواهد یافت.

ت ــ *محتوای بیش‌تر لزوماً بهتر نیست:* بسیاری از معلمان نگران هستند که حجم درس آنها با این روش کم شود. آنها این‌طور استدلال می‌کنند که یک دانش‌آموز به‌طور متوسط تنها ۴۰٪ آن‌چه به آنها می‌گوییم، به‌خاطر می‌سپارد. بنابراین، باید ۲۵٪ آن‌چه باید یاد بگیرند به آنها درس داد اما آن‌چه مسلم است این روش لزوماً کار نمی‌کند. اما حل مسئله نتایج مثبت‌تری داشته است.

دانش‌آموزانی که به روش حل مسئله ریاضی آموخته‌اند، شخصیت شجاعانه‌ای در برابر مسائل از خود نشان داده‌اند. آنها به سادگی به قلب مسئله می‌رسند و هوشمندانه در مورد مسئله سؤالاتی می‌پرسند که نشان می‌دهد از آن‌چه در کلاس اتفاق افتاده است، مطلعند.

لزومی ندارد تمام آن‌چه دانش‌آموز باید بالاخره یاد بگیرد، از همان ابتدا به او بیاموزیم. اگر ۴۰ سرفصل بسیار مهم داشته باشیم، این بدان معنی نیست که باید در ۴۰ جلسه درس همهٔ آنها را درس بدهیم و انتظار داشته باشیم کاملاً توسط دانش‌آموزان جذب شود بلکه باید ۲۰ سرفصل را به‌طور خلاصه مطرح کنیم و ۲۰ سرفصل را به‌طور عمیق با حل مسئله درس بدهیم به‌طوری که دانش‌آموزان خودشان آنها را کشف کنند و با کاربردها آشنا شوند.

ث ــ تا یک نکته به زبان آورده نشود، درک نمی‌شود: در یک تحقیق در مورد آموزش حل مسئله که در آن دانش‌آموزان آموزشهای خاصی در این زمینه دیده بودند، به این منظور که مشخص کنند چه‌قدر این آموزشها بر روند حل مسئلهٔ دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد، نتایج تکان‌دهنده‌ای به‌دست آمد. آموزشها در چهارچوب روش Polya در حل مسئله بود و بر «نگاه به عقب»، (مرحلهٔ چهارم حل مسئله) تأکید زیادی شده بود. تقریباً ۴۰٪ وقت کلاس به مرور راه‌حلها و بررسی استدلالها و تعمیمها صرف شده بود. نتایج تحقیق شوک شدیدی به محققان وارد کرد. دانش‌آموزان فرآیند «نگاه به عقب» را با وجود تأکید شدید معلمانشان کاملاً فراموش کرده بودند. بعد از بررسی نوارهای ویدئویی دلیل این امر آشکار گردید. معمولاً معلمان بعد از حل یک مسئله کنار می‌رفتند و چیزی شبیه این می‌گفتند که «حال بیایم نگاهی دوباره به راه‌حل داشته باشیم و ببینیم از آن‌چه می‌توان آموخت». آن‌چه منظور معلمان بود روشن است و مرحلهٔ مهمی از حل مسئله محسوب می‌شود؛ یعنی، بررسی

صحت جواب، بررسی استدلالها، جست‌وجو برای جایگزینها، بررسی در نمایشهای نمادین مختلف، استفاده از نتایج و روشهای مسائل دیگر و... که همه کمک می‌کنند مسئله را بهتر بفهمیم اما آن‌چه دانش‌آموزان دیدند این بود که معلم درحال مرور پاسخ است. آنها احساس می‌کردند که اگر پاسخ را فهمیده‌اند، نیازی به توجه دوباره ندارند. اگر نکته‌ها را، هر چه‌قدر هم به‌نظر ما بدیهی باشند، به دقّت و روشنی و به مراتب بازگو نکنیم، امکان دارد که به آن توجه نشود. بنابراین:

۱ــ به آنان بگویید که می‌خواهید چه به آنان بگویید.

۲ــ آن را بگویید.

۳ــ به آنان بگویید که چه چیز را به آنان گفته بودید.

نیازی نیست که تأکید کنیم این قوانین را نباید به‌طور خشک اجرا کرد. به‌خصوص در درسی که قرار است نتایج را دانش‌آموزان خودشان کشف کنند. اما این ضرری ندارد که مطمئن شویم آنها این کشف را واقعاً انجام داده‌اند. پس آن‌قدر به آنان نکته‌های مهم را تأکید کنید که در صورت دانش‌آموزان نشانهٔ رضایت را مشاهده کنید. همان‌جا دست نگه دارید. اگر بیش از اندازه تکرار کنید اثر معکوس خواهد داشت.

ج ــ *دو نکته در مورد سختی مسئله‌ها:* مسائل ساده و ابتدایی می‌توانند بسیار آموزنده و مبارزه‌طلب باشند. اگر ما دانش‌آموزان را چنان تربیت کنیم که مسائل مبارزه‌طلب و مشکل را بتوانند حل کنند، آن‌گاه دانش‌آموزان به این گرایش خواهند رسید که مسائل را مشکل ببینند. از طرف دیگر، مسائل ساده اگر خارج از محتوای مربوطه مطرح شوند، می‌توانند بسیار هم مبارزه‌طلب باشند. برای مثال خیلی از مسائلی که دانش‌آموزان در دبیرستان به‌راحتی حل می‌کنند، در دانشگاه به سادگی نمی‌توانند حل کنند چون در این صورت مسائل خارج از محتوای مربوطه مطرح شده‌اند و دانش‌آموزان را با ابزارها و سلاحهای خودشان تنها گذاشته‌ایم.

از طرف دیگر، متأسفانه یکی از نتایج مخرب روش تدریس ما این است که ریاضیات باید ساده باشد. دانش‌آموزان چنین فکر می‌کنند که روانی حل تمارین کتاب و آسانی درک سخنرانیهای معلم به این معنی است که کشف و انجام دادن ریاضی باید فرآیندی ساده و مستقیم باشد. برای این‌که نکته روشن‌تر شود، به این سؤال پاسخ دهید: تا به حال چند مسئله در کلاس برای دانش‌آموزان مطرح کرده‌اید که حل آن بیش از ۱۵ دقیقه طول کشیده باشد؟ آنها این تصور را پیدا می‌کنند که همهٔ مسئله‌ها باید در عرض نیم‌ساعت یا یک ساعت حل شوند، بعضی تصور می‌کنند که اگر یک مسئله نتواند در عرض یک ساعت توسط آنان حل شود، هرگز حل نخواهد شد. آنان که ساعتها، روزها، هفته‌ها و ماه‌ها را صرف درک بهتر یک مسئله کرده‌اند، می‌دانند که این تصور چه‌قدر اشتباه است. دانش‌آموزان

باید بفهمند که:

۱ــ کارِ گِل در بسیاری از موارد لازم است.

۲ــ زمانهای طولانی کشف و بررسی برای درک درست مسئله لازم است.

ج ــ *در باب خط‌پذیر بودن:* در بخش اول گفتیم که دانش‌آموزان حق دارند برای معلمانشان مسئله طرح کنند. به‌خصوص برای شناختن معلم خود در اوایل سال دانش‌آموزان به این کار بسیار علاقه‌مندند. اما تا هفته سوم یا چهارم معلم خود را بهتر می‌شناسند و علت علاقهٔ آنان به سؤال پرسیدن این است که می‌خواهند معلم را در موقعیت حل مسئله مشاهده کنند.

حقیقت این است که مسائل به‌ندرت معلم را به مشکل جدی می‌اندازند. معلم قادر است در اکثر مسائل حداقل اندکی آن را به پیش ببرد. بسیاری از مسئله‌ها برای معلم آشنا هستند. اگر بخواهیم مسئله را همراه با روند کشف با صدای بلند پای تخته اجرا کنیم، این کار بسیار کند است و به ما فرصت می‌دهد که فکر کنیم. اما با این حال ممکن است یک مسئله در صحنهٔ کلاس برای ما مشکل به‌نظر برسد؛ در این‌صورت، صورتهای مختلفی را که می‌توان به مسئله حمله کرد، مطرح کنید و هر کدام شکست خورد پس از اعلام شکست آن استراتژی به استراتژی دیگری بپردازید. اگر همهٔ استراتژیها شکست خورد، آن‌گاه این بزرگترین درس شما به دانش‌آموزان خواهد بود. آنها یاد خواهندگرفت که معلم آنها هم ممکن است نتواند مسئله‌ای را حل کند!

۳ــ ساختار کلاس

دانش‌آموزان ریاضیات را با انجام دادن یاد می‌گیرند نه با نگاه کردن. در درسهای حل مسئله در چندین ساختار کلاسی متفاوت، دانش‌آموزان به فعالیت و درگیر شدن با مسئله‌ها تشویق می‌شوند. حضور معلم در کلاس به‌عنوان متکلم‌وحده به حداقل ممکن کاهش می‌یابد. حتی اگر بخواهد ایدهٔ خاصی را آموزش دهد. این کار بسیار قدرتمندتر خواهد بود اگر دانش‌آموزان با مسئله دست و پنجه نرم کرده و شکست خورده باشند. روی هم رفته شاید ۱۰٪ وقت کلاس به صحبتهای معلم اختصاص داده می‌شود و شاید اختصاص دادن ۵٪ الی ۱۰٪ دیگر به حل مسئلهٔ جدید توسط معلم پای تخته کافی باشد. می‌توان باقیمانده وقت کلاس را با اسلوبهای زیر هدایت کرد:

الف ــ بحث «خود را بیازماییم»هایی که در خانه انجام شده است: $\frac{1}{3}$ وقت کلاس به حل خود را بیازماییمها اختصاص دارد. اگر دانش‌آموزی خود را بیازماییم مربوطه را حل کرده است، او پای تخته راه‌حل خود را ارائه می‌کند. کلاس می‌تواند دو نوع سؤال مطرح نماید.

۱ــ در مورد صحت جوابها و این‌که چرا باید این راه‌حل را بپذیرند.

۲ــ در مورد این‌که این راه‌حل از کجا آمده است؟ چه چیزی حل‌کننده را به این ایده‌ها هدایت کرده است؟ چرا؟

اگر مسئله حل نشده باشد، مدت کمی دانش‌آموزان به‌صورت گروهی روی آن کار می‌کنند یا می‌توان با راهنمایی یا بدون راهنمایی آن را دوباره به‌عنوان تکلیف شب درنظر گرفت.

ب ــ تشکیل گروههای کوچک حل مسئله برای بحث مسائل جدید: در انجام یک فعالیت تقریباً نیمی از وقت آن به کار گروهی در گروههای کوچک اختصاص داده می‌شود. بحثی در مورد طبیعت مسئله شروع خوبی است. در این حین که دانش‌آموزان مشغول کارند، معلم بین گروهها قدم می‌زند و سعی می‌کند نقش یک مشاور را بازی کند. این مشاور قرار نیست که مطمئن شود که همهٔ گروهها به جواب می‌رسند؛ بلکه قرار است مطمئن شود که گروهها پیشرفت معقولی دارند. اگر گروهی کارش را خوب انجام داده است، معلم می‌تواند از کنار گروه بدون هیچ راهنمایی بگذرد یا می‌تواند بپرسد که چه دلیلی برای روشی که در پیش گرفته‌اند، دارند. معلم باید مطمئن شود که دانش‌آموزان می‌توانند:

۱ــ با دقت بگویند که مشغول چه محاسباتی هستند.

۲ــ دلیل پرداختن به این محاسبات را بگویند.

۳ــ بگویند از حاصل این محاسبات چه استفاده‌ای خواهند کرد.

این تأکید بر روند کشف و ارزش‌یابی آن دانش‌آموزان را از اسیر شدن در حلقه‌های تودرتو نجات می‌دهد. اگر دانش‌آموزان مشکل داشته باشند یا معلم به آنها راهنمایی می‌کند و یا آنها را به لیست استراتژیها متوجه می‌کند و یا توجه آنها را به مسائلی که قبلاً حل شده، معطوف می‌دارد.

ایدهٔ کلی این است که معلم کم‌ترین کمک را به دانش‌آموزان بدهد اما آن‌قدر که برای پیشرفت گروه کافی باشد.

توجه داشته باشید که وقت کلاس بسیار ارزش‌مند است و کار گروهی در گروههای کوچک فعالیتی بسیار زمان‌گیر است. پس باید در محدود کردن آن دقت نمود. می‌توان دلایل زیر را برای لزوم کار گروهی ارائه کرد:

۱ــ این ساختار کلاس به معلم یک فرصت استثنایی می‌دهد تا مستقیماً در روند حل مسئلهٔ دانش‌آموزان دخالت کند نه این‌که با محصول نهایی حل مسئله مواجه شود. اهرم اصلی هدایت دانش‌آموزان برای یادگیری استراتژیهای تفکر همین فرصت است.

۲ــ حل مسئله در گروه، فراشناخت را تقویت می‌کند. یک دانش‌آموز هنگام حل مسئله اولین استراتژی معقول برای حل مسئله را پیش می‌گیرد. اما در گروه دو یا سه استراتژی مطرح می‌شود و

دانش‌آموزان ناچارند در مورد انتخاب استراتژی مناسب بحث و تصمیم‌گیری کنند. این فرایند استراتژیهای تفکر را در ذهن دانش‌آموزان نهادینه می‌کند. به زودی دانش‌آموزان به‌طور فردی با چند پیشنهاد مختلف برای حل مسئله شروع کرده و بین آنها بهترین را انتخاب می‌کنند.

پ ــ همهٔ کلاس با هم روی مسئله کار می‌کنند: بعد از این‌که گروههای کوچک با مسئله آشنا شدند و کمی روی آن فکر کردند، می‌توان این تجربه را پایه‌ای برای حل مسئله توسط کل کلاس قرار داد. دانش‌آموزان برای حل مسئله پیشنهادهایی می‌کنند و معلم به‌عنوان مشاور نقش بازی می‌کند و پای تخته پیشنهادها را می‌نویسد و اجرا می‌نماید.

نیمهٔ باقی‌مانده از وقتی که به یک فعالیت اختصاص داده می‌شود باید این‌گونه به اجرا گذاشته شود.

روش اجرای محتوا در کلاس

فصل ۱ــ همه می‌توانند مسئله حل کنند

بخش ۱ـ الگویابی در اشکال هندسی

جلسه ۱ــ اشکال هم مساحت

فعالیت دوبرابرکردن مساحت مربع داده شده

اهداف فعالیت: مهارت در کار با خط‌کش و قیچی، تشخیص اشکال هم مساحت با کمک افراز آنها به اجزای مساوی، نقشه کشیدن برای حل مسئله قبل از دست‌بکار شدن، ایجاد اعتمادبه نفس برای حل مسئله در همه دانش‌آموزان، الگویابی هندسی، بازنگری و نقد استدلالهایی که دانش‌آموزان خودشان ارائه کرده‌اند، آزمایش صحت یک ادعا با کمک دانسته‌های قبلی.

سؤالهایی که می‌توان پرسید: فرض کنید مسئله حل شده باشد. بین مفروضات مسئله و جواب آن چه ارتباطی می‌بینید؟ آیا می‌توانید با کنار هم گذاشتن دو مربع مساوی یک مربع بسازید؟ آیا می‌توانید با قیچی آنها را به اجزاء کوچک‌تری تقسیم کنید که بتوان با کنارهم گذاشتن آنها یک مربع ساخت به‌طوری همه اجزاء به کار رفته باشند؟ هر یک از مربعها را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنید. آیا با کنار هم گذاشتن که آنها می‌توانید یک مربع بسازید؟ هر یک از مربعها را از روی قطر به دو نیمه تقسیم کنید و با کنار هم‌گذاشتن این اجزاء یک مربع بسازید. پس از این که مسئله را حل کردید به دنبال راه‌حل دیگری جستجو کنید. آیا در مسیر حل مسئله نکات جدیدی آموخته‌اید؟ آنها را به دقت یادداشت کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف می‌توانید حل مسئله‌را به‌روشی که سقراط ارائه‌می‌کند در کلاس اجرا کنید. یعنی خطوط اضافی و سؤالات راهنما توسط معلم پرسیده می‌شود و دانش‌آموزان فقط مراحل طی‌شده را تأیید می‌کنند و در صورتی که دانش‌آموزان اشتباه کنند معلم به روش سقراط آنان را متوجه اشتباهشان می‌کند. مهم‌است که درس چنان اجراشود که‌اعتماد به نفس‌دانش‌آموزان‌تقویت شود.

در یک کلاس متوسط به دانش‌آموزان اختیار دهید در روند حل مسئله ابتکار عمل را بدست بگیرند. هرجا لازم می‌دانید با سؤالات راهنما به روند فکری‌ایشان جهت بدهید. ° در یک کلاس قوی به دانش‌آموزان فرصت بدهید تا با کمک همدیگر مسئله را خودشان حل کنند. اگر لازم دانستید نکاتی را که خودشان به آن رسیده‌اند دوباره به آنها گوشزد نمایید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با روش مباحثهٔ سقراط به کتاب زیر مراجعه کنید «گفت‌وشنودهایی در باب ریاضیات» نوشته آلفرد رینی ترجمه سعید قهرمانی.

زندگینامهٔ علمی افلاطون

(ت. آتن [؟]، ۱۰۴۸ ق هـ/ ۴۲۷ ق م ؛ و. آتن، ۹۶۹ یا ۹۶۸ ق هـ/ ۳۴۸ یا ۳۴۷ ق م)، نظریهٔ شناخت، صاحب‌نظر بودن، هم از جنبهٔ نظری و هم از جنبهٔ عملی، در تعلیم و تربیت مبتنی بر ریاضیّات، سازمان بخشی به پژوهش.

شور و شوق افلاطون برای ریاضیّات و اخترشناسی و نظریهٔ موس همه‌جا در نوشته‌هایش دیده می‌شود، و شناختی از پزشکی و فیزیولوژیکی روزگار خود متجلّی می‌سازد که بسیار از سطحی بودن دور است. در زمانهای قدیم داوران صاحب اهلیّت بر آن بودند که وی در سراسر عمر خود ریاضیّات، خاصّه هندسه، را به پیش برده است. تئودوْرهٔ کورنی آرخوتاس تارنتومی دوستان وی، و ائودوْکسوس کنیدوسی و تئایتتوس منایخموس همکاران یا شاگردان او بودند. منتقدان وی برآنند که نظر وی دربارهٔ شناخت هرگونه دانش تجربی را کنار می‌گذارد و وی، در نتیجه آرمان گرایش، تصوری یکسره نادرست از راه و رسم و ارزش ریاضیاتی داشت که آن را گرامی می‌شمرد و تحسین می‌کرد. با این همه می‌توان گفت که آکادمی، که وی در تاریخی که به‌درستی معلوم نیست (شاید ۱۰۰۱ ق هـ) در آتن تأسیس کرد، مرکزی شد که در آن متخصّصان (که همه با فلسفه و شناخت‌شناسی او همدل و همداستان نبودند) می‌توانستند گردهم‌آیند و از بحث با وی و با یکدیگر مستفیذ شوند.

اوّلین مکالمه‌ها و رسالهٔ «دفاعیه» ممکن است در سالهای ۱۰۲۰ تا ۱۰۰۹ ق هـ نوشته شده باشند. او وظیفهٔ خود دانست که از خاطرهٔ سقراط دفاع کند، خصوصاً از آن روی که مجادله دربارهٔ هدفهای وی بر اثر نشر نوشته‌های خصمانه از نوجان گرفته بود. چون احتمال هر کردار سیاسی دور از دسترس می‌نمود، وی به‌تدریج این فکر را پرورد که جوانان را نه در سخنوری بلکه در ریاضیات ورزیده سازد و روش پرسش و پاسخ سقراطی فقط وقتی آغاز شود که شالودهٔ ریاضی استوار شده باشد. بخشی از تشخیص وی از بیماران آتن این بود که مردان جوان زودتر از زمان لازم خود را با درگیرشدن با تناقضهای فلسفی سرگشته ساخته‌اند ؛ احتمالاً این اندیشه‌ها چندان به طبع مگاراییان خوش نمی‌آمد. در حدود سال ۱۰۱۱ ق هـ. وی مصمّم شد که از غرب، که آرخوتاس تارنتومی در آن باقیماندهٔ هواخواهان نظام فیثاغورسی تعلیم و تربیت بود و در پژوهش همچنان فعّالیّت می‌کرد، دیدن کند.

نظرهای افلاطون هنگام عزیمت به مسافرت به سوی غرب به‌خوبی در گوْرگیاس، که اوّلین تلاش سازندهٔ عمدهٔ وی به عنوان اخلاق‌گرا بود، دیده می‌شود.

افلاطون در ۱۰۰۹ ق هـ، پس از دو سال غیبت به آتن بازگشت. هیچ چیز قطعی دربارهٔ زندگی شخصی وی در بیست‌ودوسالی که بعداً بر او گذشت در جایی ثبت نشده است. اما آکادمی یا در این

زمان پی افکنده شد یا به‌تدریج رشد کرد و وی نیز مکالمه‌های بیش‌تری به سبک سقراط ترکیب نمود. منون، ائوتوفرون، ائوتودموس، فایدون، سومپوسیوم، و «جمهور» همه باید به این سالها نسبت داده شوند. در این گفتارها وی گزارش دقیق دربارهٔ معرفت را چنان که در ذهن وی شکل گرفته است عرضه می‌کند؛ هدف و روش خود در تعلیم و تربیت را شرح می‌دهد و ثابت می‌کند که هدفهای وی تداوم هدفهای سقراط است؛ و هرجا که لازم باشد خود را از فیثاغورسیان ایتالیایی جدا می‌کند. طبیعی است که «جمهور» در انتهای این رشته قرارداده شود و در آن به صورت برنامه‌ای برای مدرسه‌ای که در نظر است، یا گزارشی به مردم آتن از آنچه تاکنون در میان آنان صورت پذیرفته است، نگریسته شود.

ارسطو تحلیلی روشن از عاملهایی که آموزهٔ «صورتها»ی افلاطون را بوجود آوردند بدست می‌دهد. افلاطون از زمان جوانی با مردی آتنی به نام کراتولوس آشنا بود، که همراه با هراکلیتوس، اعلام می‌کرد که در جهان حس هیچ جوهر ثابتی یا مستمسکی برای معرفت آدمی نیست. افلاطون در آن زمان یا پس از آن این نکته را انکار نمی‌کرد اما، چون می‌خواست که پژوهش سقراط برای کلّیات را در دایرهٔ اخلاقیّات، که ثابت می‌ماند، از سر گیرد و ادامه دهد، به حکم ضرورت کلّیات را از جزییات محسوس جدا کرد. وی بود که برای آن اصطلاحهای مُثُل و صور را وضع کرد. در نظر او جزییات (یعنی چیزها، حالتهای چیزها و عملها و کیفیتها) واقعیّت را به وسیلهٔ «مشارکت» از صورتها بیرون می‌آورند؛ و هر وقت ما این جزییات را نام می‌بریم یا از آنها سخن می‌گوییم، در حقیقت از صور نام برده‌ایم.

افلاطون در مکالمه‌های خود غالباً از تباینی که بین معرفت (دانش) و عقیده وجود دارد آغاز می‌کند. زیستن در حالت یک عقیده پذیرفتن تصدیقها است، خواه دربارهٔ واقعیت یا دربارهٔ اصل، بر بنیاد یک‌نظر صائب یا صرفاً از سر عادت. عقیده ممکن است درست و راست باشد؛ اما چون بر پایهٔ عقلی استوار نیست ممکن است به وسیلهٔ عاطفه از ذهن بیرون رانده شود، و دلالت آن علیه فراموشی کم‌تر از دلالت معرفت علیه آن است. همچنین صاحب عقیده ممکن است در موردی نامتعارف فریفته شود. از آنجا که پایهٔ عقیده بر عادت استوار است آن را نمی‌توان به‌آسانی به دیگری منتقل کرد؛ یا اگر انتقال صورت پذیرد در حکم تعلیم نیست. براساس نظریهٔ صور، کسی که صاحب معرفت باشد صور را می‌شناسد و می‌تواند مثالها و موارد جزیی را به آنها ارتباط دهد (هرچند افلاطون در توضیح آن که چگونه چنین چیزی صورت می‌گیرد توفیق نیافت)، حال آن که هرکس به عقیده قانع باشد در میان جزییات نیمه‌حقیقی حرکت می‌کند.

بدین نحو افلاطون، در نیمهٔ عمر، از مبانی سقراطی خود به سوی معتقداتی پیش رفت که با

نهایت اطمینان پای بندشان بود، و از آنها پیامدهای عملی بسیار بیار آمد. اجزای اصلی عبارت بودند از: تباین میان دانش و عقیده؛ اعتقاد به قلمروی از صور تغییر ناپذیر، که ذهنهای آدمیان می‌توانند با آنها فرصت تماسهای منقطع داشته باشند و در این گونه فرصتها ذهنهای آنها [یعنی صور] را «از آنِ خود» یا سخت نزدیک به خود می‌شناسند؛ و چون چنین است، روان، یا جزء عقلی آن، همچنان جاودانه به‌نظر می‌رسد؛ و اعتقاد به این که «صور»، که هر یک از آنها واقعیت را در جزییات متناظر با خود رسوخ می‌دهد، به نوبت خود، وجود و قابلیّت درک و حقیقت خویش را از صورتی عالی‌تر کسب می‌کنند، و آن «خیر» است.

پیشرفت از کثرت صورتها به سرچشمهٔ آنها، در نتیجه، به‌عنوان مرحلهٔ نهایی در پژوهش آدمی، (به یونانی megiston mathema)، نگریسته می‌شود؛ و این گامی است که فقط معدودی می‌توانند برداشت، اما برای رفاه نوع بشر کمال اهمیت را دارد که آن معدود این گام را بردارند. در درون مکالمه می‌توان آن را توصیف کرد امّا نمی‌توان تحقّق بخشید. نشانه‌هایی هست بر آن که به نحوی روشمندانه می‌توان آن را از سایر صورتهای «خیر» بیرون آورد؛ امّا در حال حاضر این تصویر، که به وسیلهٔ آن نشان داده شده است که «خیر» با موضوعهای دیگر تعقّل همان رابطه‌ای را دارد که خورشید با سایر اشیای قابل رؤیت دارد، جای آن را می‌گیرد. پس با خواندن «جمهور» و مکالمه‌های بعدی، آدمی باید بتواند به این مکان پی‌ببرد که افلاطون در مدرسهٔ خود نحوهٔ عرضهٔ آنچه را برای نوشتن برگزیده بود وسعت بخشید یا تصحیح کرد.

در اندیشهٔ آتنیان شایسته آن بود که مردان جوان پیش از توجّه به کار جدّی خود را با جرو بحث بر سر موضوعهای انتزاعی ورزیده سازند، و بدین ترتیب و بر این اساس برای «تحمل» فلسفه آماده شوند. اما افلاطون، چنان که گفته شده است، علیه این عمل سخن می‌گوید و معتقد است که این عمل فلسفه را بی‌اعتبار ساخته است. در حقیقت، بنابر عقیدهٔ وی، ترتیب این کار باید معکوس شود. برهان، یا نظریهٔ برهان، سخت‌ترین شاخهٔ فلسفه است و باید دیرتر به آن پرداخته شود. مردان و زنانی که قانونگذاری و مدیریت باید در نهایت به آنان واگذار شود باید در علوم (از جمله اندیشیدن دربارهٔ روابط بین آنها) متحمّل انضباط گردند و آنگاه، مثلاً در سی سالگی، باید به بررسی دیالکتیکی موضوعهایی بپردازند که عقل به کمک‌گرفتن از تصورات آنها را جذب می‌کند. این‌گونه نظم و انضباط کسانی را که استعداد بحث جدلی (دیالکتیک) دارند از دیگران جدا خواهد کرد. وظیفهٔ وضع قوانین خوب، اگر قبلاً بوجود نیامده باشند، و تعبیر و کاربرد آنها، اگر بوجود آمده باشند، برعهدهٔ این کسان است. برای نیل به این هدف باید دانش را با تجزیه نیرومند ساخت. حکومت بی‌قانون خطای مشترک حکومت استبدادی و حکومت دموکراسی است.

افلاطون معتقد است که ندانستن حقایقی ریاضی که به هیچ روی نهفته و محصور نیستند، مثلاً این عقیدهٔ غلط که همهٔ کمیّات اندازه پذیرند، نکبتی است برای طبیعت آدمی. اما آنچه در طرح آموزشی «جمهور» او برآن تکیه می‌شود این مطلب نیست. افلاطون می‌گوید که خصوصیت یا سرشت مطالعات ریاضی این است که به آرامی ذهن را از ظواهر محسوس جدا می‌سازد و آن را به سوی واقعیت می‌برد، و هیچ رشتهٔ دیگری چنین نمی‌تواند کرد. ریاضیّات حالتی ذهنی (که افلاطون آن را dianoia، یعنی با تسلسل منطقی از موضوعی به موضوعی دیگر رسیدن، می‌نامد) ایجاد می‌کند روشن‌تر از اعتقاد و اعتماد ساده‌دلانه به حواس اما مبهم‌تر از شناخت و خرد. مثلاً در هندسه آموزنده قادر یا ملزم می‌شود که با کمک شکلها دقّت خود را بر چیزهای قابل فهم متمرکز سازد. همچنین ریاضیدانان «عددهای فرد و زوج، شکلهای گوناگون، سه نوع مثلث، و دیگر از این قبیل را به‌عنوان فرضیه مطرح می‌سازند.» اما به بررسی آنها نمی‌پردازند و در پی اثبات آن برمی‌آیند که مسئله‌ای که موجب مطالعه و پژوهش آنان شده بود حل شده است. از این حیث، روش ریاضی‌گرایش به آن دارد که ذهن را از واقعیّت منحرف سازد و فقط می‌تواند حقیقت مشروط را فراهم آورد. اما این‌گونه مطالعات وقتی که به نحوی منسجم دنبال شوند، بی‌آن که دائماً دربارهٔ کاربرد عملی آنها سخن گفته شود، مقدمهٔ خوبی برای پرداختن روشمندانه به آن نوع ارتباطهایی بین صورتها هستند که نمی‌توان به نحوی آشکار بر آنها دست یافت.

حساب و هندسهٔ مسطّحه بنیاد تعلیم و تربیتی خواهند بود که باید به دانش بینجامد؛ هندسهٔ فضایی، یعنی اشکال سه‌بُعدی، را هم باید آموخت، وقتی که گلاوکُن ضمن محاوره خاطر نشان می‌سازد که چنین چیزی هنوز به عنوان علم وجود ندارد سقراط جواب می‌دهد که برای این دو دلیل است: نخست، در زمان حاضر هیچ دولتی (یا دولتشهری) به تحصیل علم احترام نمی‌گذارد و آدمیان را ترغیب نمی‌کند که وقت خود را صرف آن کنند؛ و دوم آن که برای هماهنگ کردن مطالعه و تحقیق مدیری لازم است. پیداکردن چنین مردی دشوار است، و در حال حاضر اگر هم وجود داشته باشد پژوهندگان بیش از آن به خود اعتماد دارند که به او مراجعه کنند. حتی بی‌این شرایط، و حتی اگر پژوهندگان به روشن ساختن این که در پی‌انجام چه‌کاری می‌کوشند توفیق نیابند لطفی که ذاتی مطالعهٔ شکلهای سه‌بُعدی است آن را به پیش می‌برد. این یکی از بخشهای کتاب است که در آن کسانی که در مکالمات افلاطون رشتهٔ سخن را در دست دارند، پیامبر گونه اما با عبارتهایی در لفافه و پوشیده، به اوضاع و احوال زمان نوشتن مطلب اشاره می‌کنند. موضوع برای ما تا حدّی معمّا گونه است. شاید نیّت تهنیت گفتن به تئایتتوس بوده است که راههای ترسیمی برای محاط کردن هشت وجهی یا بیست‌وجهی منتظم در کره کشف کرده بود؛ یا او یا خود افلاطون نقش مدیر را ایفا می‌کند و از عامهٔ

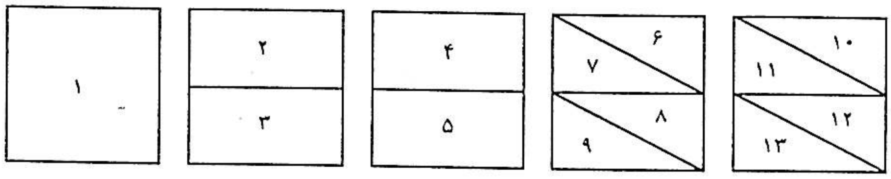
مردم تقاضا می‌شود که از آکادمی پشتیبانی کنند تا پژوهش را بتوان ادامه داد.

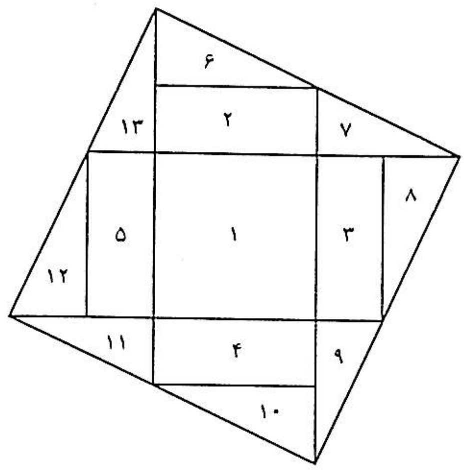
به هنگام پرداختن به علوم اخترشناسی و نظریهٔ موسیقی نیز چنین اشاره‌ای شخصی وجود دارد. سقراط در عین حال که گفتهٔ فیثاغورسیان را تأیید می‌کند که دو علم یادشده با یکدیگر خویشی نزدیک دارند خود را از آنان جدا می‌سازد. نظریهٔ آنان دربارهٔ هماهنگی محدود است به بیان عددی توافقهای قابل شنیده شدن؛ و هدف اخترشناسیشان کشف تناسب است میان ماه و سال و دوره گردش سیّارگان. به جای این، هماهنگیهایی را که شنیده می‌شوند باید به مثابهٔ حالت خاصی از هماهنگیهای میان اعداد بررسی کرد؛ و تناسب میان ماه و سال و امثال آنها (که بی‌گمان تغییر ناپذیر نیست) را به منزلهٔ کاربرد نظریهٔ وسیع‌تری مورد پژوهش قرارداد که به روابط فضایی میان هر تعداد از اجسام دارای هر شکل، با هر سرعت منظم در هر فاصله حرکت می‌کنند، می‌پردازد. جهان مرئی در نظر «اخترشناس راستین» همان خواهد بود که نموداری زیبا در نظر هندسه‌دان است، یعنی کمکی به علم نه موضوع تأمّل و تماشا. در اینجا افلاطون اشاره می‌کند که او بسادگی در سرزمین آتن همتایی برای مدارس فیثاغورسی بی نیفکنده است، علقه به عالم حس را باید سست ساخت و علوم را باید با تأکید بر خویشاوندیهایشان با یکدیگر آموخت، ؛ زیرا که قدرت تلخیص، و درک صفات مشترک است که باید تقویت گردد. آن چند تنی را که به این درجهٔ عالی رسیده‌اند باید کنار گذاشت و آنان را ورزیده ساخت که روشی دیگر در پیش گیرند که در آن فرضها موقت انگاشته می‌شوند تا وقتی که به آنچه بی‌قید و شرط واقعی است پیوند یابند و بدین نحو صحتشان محقّق گردد.

اگر رابطهٔ افلاطون با تئایتتوس و ائودوکسوس را در نظر گیریم و پای گواهی ارسطو را هم به میان آوریم، نقش اصلی افلاطون در آکادمی اندک اندک آشکار می‌شود. احتمالاً وی همهٔ تعلیم تخصّصی را به آنان واگذاشته بود. وی پژوهشهای آنان را در نظر می‌گرفت و گاه از روشهایشان انتقاد می‌کرد و مانند شخص صاحب قدرتی سخن می‌گفت؛ کهتران را در این اندیشه دربارهٔ اصول اوّلین و دربارهٔ رابطه‌های متقابل بین علومی رهبری می‌کرد که در کتاب هفتم «جمهور» مناسب حال آنان شناخته شده بود؛ و به برخی از آنان نوعی فلسفهٔ اخلاقی ــ ریاضی را همچون رازی به امانت می‌سپرد که در آن دو اصل غایی، که از آنها صور و اعداد مشتق می‌گردیدند، به کمک تحلیل بدست می‌آمدند. آکادمی جایی نبود که در آن علم، به معنی اعم کلمه، برای نفس علم مورد مطالعه قرار گیرد، بلکه جایی بود که در آن علوم برگزیده آموخته می‌شدند و مبانی آنها به صورت یک نظم ذهنی مورد بررسی قرار می‌گرفتند و هدف از آنها عقل عملی و مهارت قانونگذاری بود، که به عقیدهٔ افلاطون از فلسفهٔ تاملّی جدایی‌پذیر نیستند. آکادمی قطعه زمینی بود در شمال‌شرقی شهر که به صورت پارکی آراسته شده بود و یک ورزشگاه عمومی جزء آن بود. به گفتهٔ لوسیاس، در طول سال آشفتهٔ ۱۰۲۵ ـ ۱۰۲۴ ق هـ

اسپارتیان در آن اردو زده بودند. ممکن است افلاطون در همان زمین ورزش شروع به تعلیم کرده باشد ؛ اما دیری نکشید که باغی در مجاورت آن خرید و در آن ساختمانهایی برپا کرد، و ممکن است گفته شود که از این زمان مدرسه‌ای تأسیس نمود. بیش از آن یارای آن نداشت که شنوندگان تصادفی را بیرون براند. ساختمانها، ممکن بود مکانهایی برای دانشجویان یا مهمانان داشته باشند، و احتمالاً افلاطون خودش در آن همسایگی می‌زیست. غذای مشترک از خصوصیّات زندگی فیثاغورسیان بود، و این سابقه مراعات می‌شد. شناخت قانونی بدین نحو تأمین می‌گردید که آکادمی به صورت یک مجمع برادری درآمده بود. داستان آن را که بر پیشانی آکادمی این عبارت حک شده بود که «هرکس که بر هندسه مسلّط نیست حق ورود ندارد» فقط تا زمان یحیی فیلوپونوس (سدهٔ یکم ق هـ) می‌توان ردیابی کرد. در سدهٔ هفتم ق هـ (یکم ق م) تعلیمات آکادمی در گومناسیوم (ورزشگاه) بطلمیوس نزدیک بازار آتن داده می‌شد.

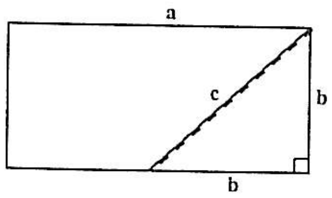
خود را بیازماییم ۱



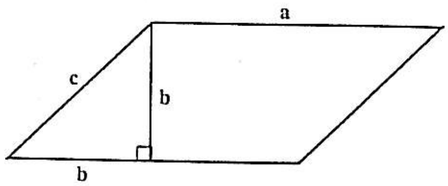


خود را بیازماییم ۲

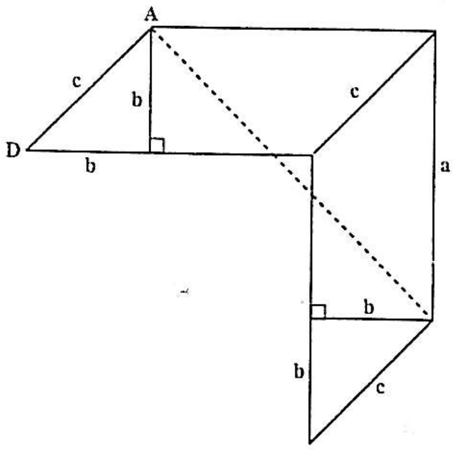
مرحله ۱ ـ از روی نقطه‌چینها بریده شود.



مرحله ۲ ـ تبدیل مستطیلها به متوازی‌الاضلاع

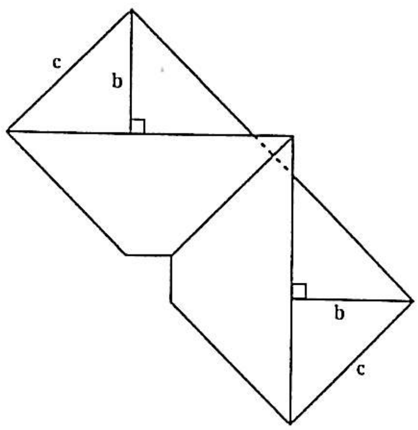


مرحله ۳ـ قراردادن متوازی‌الاضلاعی کنارهم



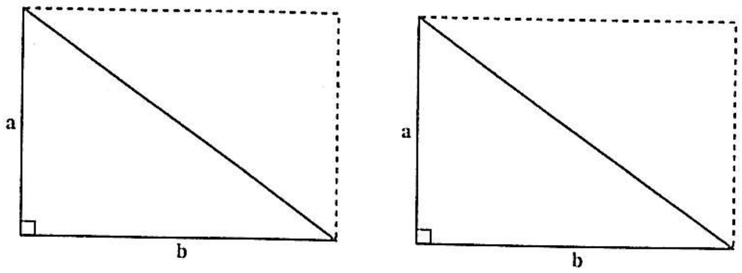
مرحله ۴ـ برش و تبدیل شکل به مستطیل

مرحله ۵ـ برش نهایی

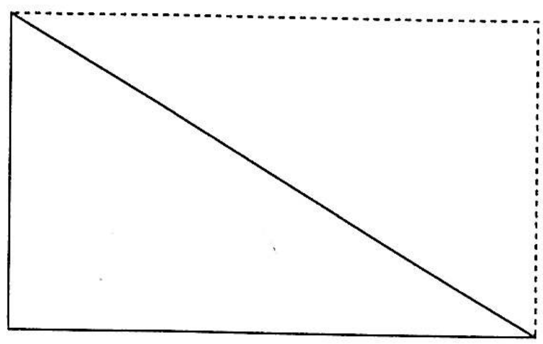


خود را بیازماییم ۳

مرحله ۱ــ دو مثلث قائم‌الزاویه را به دو مستطیل تبدیل می‌کنیم.



مرحله ۲ــ با کمک مسئله قبل می‌توانیم مستطیلهای متشابه را به دو متوازی‌الاضلاع تبدیل کنیم.



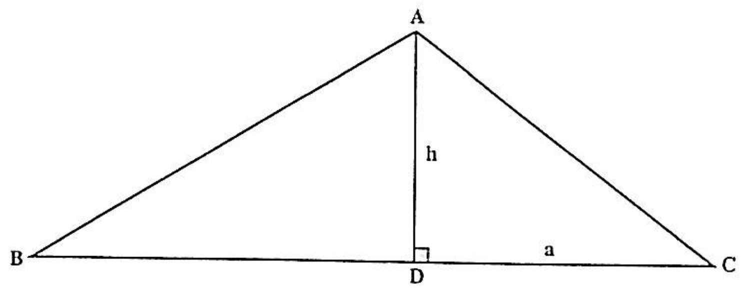
مرحله ۳ــ قراردادن متوازی‌الاضلاعی کنار هم.

مرحله ۴ــ برش و تبدیل شکل به مستطیل.

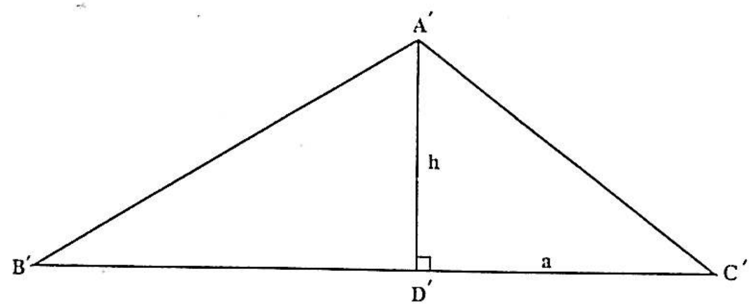
مرحله ۵ــ نیمی از مستطیل حاصل، مثلث قائم‌الزاویه خواسته شده است.

خود را بیازماییم ۴

مرحله ۱ــ مثلث مختلف‌الاضلاع $A\overset{\Delta}{B}C$ تبدیل به دو مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\Delta}{B}D$ و $A\overset{\Delta}{D}C$ شده است.



مرحله ۲ــ با کمک مسئله قبل دو مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم که هر یک دوبرابر این مثلثها هستند. (با کنار هم گذاشتن آنها)

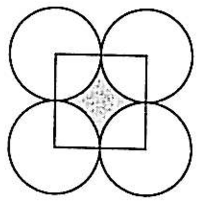


مسائل برای حل: از مجلهٔ «معلم ریاضی»

۱ــ ماکزیمم نقاط اشتراک سه خط و دو دایره چند است.

۲ــ مساحت قسمت میانی چقدر است؟

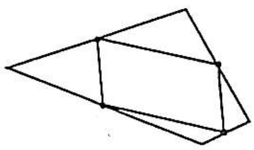
$R = ۳$



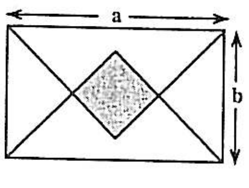
۳ــ یک چهارضلعی دلخواه رسم کرده و وسطهای اضلاع را به هم وصل کنید.

الف ــ ثابت کنید چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

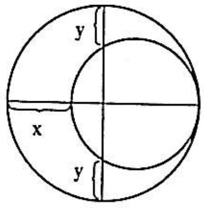
ب ــ رابطه مساحت مثلثهای حاشیه با مساحت متوازی‌الاضلاع چیست.



۴ــ اگر قسمت هاشور خورده مربع باشد مساحت آن را حساب کنید.



۵ــ دو دایره مماس‌اند و $\begin{cases} x = ۱۶ \\ y = ۱۰ \end{cases}$ شعاعها چند است.



بخش ۱ــ الگویابی در اشکال هندسی

جلسه ۲ــ قضیه فیثاغورس

فعالیت قضیه فیثاغورس

اهداف فعالیت: تأکید بر اینکه قضیه فیثاغورث تعمیم فعالیت دوبرابر کردن مساحت مربع داده شده است، تعمیم یک مسئله، آموزش مباحثه به روش سقراط، الگویابی هندسی، بررسی طبیعت یادگیری، تقویت اعتماد به نفس دانش‌آموزان برای تولید دانش، درک نظام منطقی ریاضی، تقویت اعتماد به نفس دانش‌آموزان برای اظهارنظر، بازنگری و نقد و آزمایش صحت دانسته‌های قبلی، ایجاد فرهنگ مباحثه، ایجاد فرهنگ همه می‌توانند یاد بگیرند و نقد کنند و یاد بدهند.

سؤالهایی که می‌توان پرسید: چگونه می‌توان بین این سه مربع ارتباطی پیدا کرد؟ به شکلهای کتاب توجه کنید. آیا الگویی می‌بینید؟ آیا می‌توانید با قیچی کردن مربعی به ضلع $a + b$ که در آن a و b اضلاع زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه داده شده هستند، مربعی به ضلع وتر بسازید؟ آیا می‌توانید با قیچی کردن این مربع به صورت دیگری مربعهایی به ضلع a و به ضلع b بسازید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چطور می‌توانستید خودتان به این جواب برسید؟ فکر می‌کنید فیثاغورس چگونه این قضیه را فهمیده بود؟ به فعالیت دوبرابر کردن مساحت مربع داده شده برگردید. آیا می‌توانید قضیه فیثاغورس را برای مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با کمک شکل نشان دهید؟ آیا می‌توانید قضیه فیثاغورس را برای مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با کمک شکل نشان دهید؟ با کمک خط‌کش و قیچی چطور؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف حل مسئله را به روش سقراط اجرا کنید، می‌توانید از متن کتاب کمک بگیرید. وقتی سؤالی مطرح می‌کنید پس از پاسخ‌دادن به آن کمی مکث کنید و به دانش‌آموزان فرصت بدهید که با مسئله درگیر شوند. این به تمرکز آنها کمک می‌کند.

در یک کلاس متوسط در صورتی که دانش‌آموزان خودشان نتوانستند مسأله را حل کنند شکل کتاب را در اختیارشان قرار دهید. مطمئن شوید که همه نکاتی را که در متن مطرح شده خودشان آموخته‌اند. اگر تا ۱۵ دقیقه نتوانستند در حل مسئله پیشرفتی کنند نگذارید بیش‌تر خسته شوند و به آنها راهنمایی کنید. کلاس را چنان اداره کنید که مسئله بدون اینکه دانش‌آموزان خسته شوند به حل نهایی برسند. حتی اگر لازم شد نکته‌های کلید مسئله را خودتان مطرح کنید. در یک کلاس قوی به دانش‌آموزان فرصت بدهید با یکدیگر در مورد حل مسئله بحث کنند. به آنها اجازه بدهید به‌طور جمعی برای چگونگی حمله به مسئله تصمیم بگیرند. لزومی ندارد که حتماً به حل نهایی مسئله دست

پیدا کنند. در پایان کلاس اگر مسئله حل نشده بود خودتان آن را برای کلاس حل کنید. نکات مهمی را که دانش‌آموزان هنگام حل مسئله به آن می‌رسند با تأکید به آنها گوشزد کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به اثباتهای قضیه فیثاغورس در کتاب «هنر حل مسئله»

زندگینامهٔ علمی فیثاغورس

(ت. ساموس، حدود ۱۱۸۱ ق هـ/ ۵۶۰ ق م ؛ و. متاپونتوم، حدود ۱۰۰۱ ق هـ/ ۴۸۰ ق م)، ریاضیات، نظریهٔ موسیقی، اخترشناسی.

بیش‌تر منابع مربوط به زندگی و فعالیتها و آموزه‌های فیثاغورس متعلّق به قرون چهارم و سوم ق هـ (سوم و چهارم میلادی) هستند، حال آن که برخی منابع که اندکی نزدیکتر به زمان او هستند (قرون دهم و یازدهم ق هـ) اغلب متناقضند، و قسمتی از دلیل این وضع شکافی است که به فاصلهٔ کوتاهی بعد از درگذشت او در میان پیروانش پدید آمد.

چند ده سالی بعد از مرگ فیثاغورس دو گروه تند و تیز بوجود آمدند که بر سر این که کدام به‌راستی فیثاغورسی‌تر بود اختلاف داشتند. ادعای یک گروه این بود که از گفته‌های خود فیثاغورس کلمه به کلمه پیروی می‌کند، و گروه دوم ظاهراً افکار فیثاغورسی را تا حدّی پرورده بودند که دیگر توافق کامل با اصل خود نداشتند. موضوع پیچیده‌تر از این بود زیرا که، بنا بر روایت قدیم، فیثاغورس تعلیمات خود را با وضوح و به کمال فقط برای پیشرفته‌ترین شاگردان و مریدان خود آشکار می‌ساخت. بدین ترتیب سنّت اخیر فیثاغورسی متضمّن تعدادی تدبیرها و آموزه‌های غریب و عجیب است که به صورت تحت‌اللفظی مطلق تعبیر شده است ؛ استدلالی‌ترین گروه (که زمانی به وسیلهٔ آریستوکسنوس، که از پیروان افلاطون و ارسطو نیز بود، رهبری می‌شد) تعبیری نمادی و استعاری را ترجیح می‌دادند.

این ابهام و تاریکی دربارهٔ نیّت فیثاغورس در میان نویسندگان تاریخ علم موجب اختلاف عقیده شده است که آیا فیثاغورس به راستی می‌توانست دانشمند یا حتی آغازگر اندیشه‌های علمی شمرده شود. موضوع قابل بحث دیگر این است که آیا آن نویسندگان قدیم را که کمک و خدمتی راستین به ریاضیّات و اخترشناسی و نظریهٔ موسیقی کردند می‌توان فیثاغورسیان راستین، یا حتی کسانی که از اندیشه‌های اصیل فیثاغورس تأثیر پذیرفته بوده‌اند، شمرد. با این همه، بجز نظریهٔ تناسخ (که معاصرانش از آن یاد کرده بودند)، روایتهای قدیم یک آموزه را به فیثاغورس و فیثاغورسیان آغازین نسبت می‌دهند که تقریباً ممکن نیست بر پیشرفت ریاضیات اثر نگذاشته باشد، و آن عبارت است از تعمیمی وسیع، مبتنی بر مشاهداتی محدود (روشی که در علم باستانی یونان متداول بوده است)، که همه چیز عدد است.

نظریهٔ اعداد فیثاغورس مبتنی بر سه مشاهده بود. اولین آنها رابطهٔ ریاضیِ الحان موسیقی بود ــ یعنی این که وقتی نسبت طولهای آلات تولید کنندهٔ صدا (مانند تارها و نیها) به آلات موسیقی دیگری سرایت داده شود ــ که رابطه‌های یک بعدی دارند همان الحان موسیقی نتیجه می‌شوند. دوم، فیثاغورسیان متوجه شده بودند که هر مثلثی که از سه قطعه چوب بر نسبت ۳ و ۴ و۵ ساخته شود، صرف‌نظر از این که طول اضلاعش چه‌قدر است، قائم‌الزّاویه است. سومین مشاهدهٔ مهم آنان ناشی از رابطه‌های عددی ثابت در حرکات اجرام آسمانی بود. از این روی برآنان این نکته واضح بود که چون الحان موسیقی و شکلهای هندسی واحد ممکن است در محیطهای مختلف و با اندازه‌هایی که با همان نسبت اعداد ترکیب شوند تولید می‌گردند، خود اعداد باید مبیّن الحان و اشکال و حتّی مبیّن چیزهایی که آن الحان و اشکال را داشتند باشند. به این ترتیب ممکن بود گفته شود که این چیزها ــ یا، چنان که بعداً نامیده شدند، جوهرهای این چیزها ــ عملاً عدد بودند. گروههای اعدادی که جوهر یک چیز را تشکیل می‌دادند، و ممکن بود آن چیز بار دیگر از آنها به‌وجود آید. با اصطلاحی نامیده می‌شدند که بعداً معنی «نسبت» پیدا کرد.

نظریهٔ «میانگینها» نیز بی‌شک فیثاغورسی است و احتمالاً قدمت قابل ملاحظه‌ای دارد.

هرچند خدماتی که فیثاغورس و اولین جانشینان او به حساب و نظریهٔ عدد کردند ممکن است تا حدی با دقّت معیّن شود، خدمات آنان به هندسه به صورتی مبهم باقی‌مانده است. قضیهٔ به اصطلاح فیثاغورسی را در زمان هامورابی (= حمورابی) در بابل می‌شناختند و احتمال می‌رود که فیثاغورس آن را در آنجا آموخته باشد. معلوم نیست که قضیه در زمان حیات فیثاغورس، یا کوتاه مدتی بعد از آن، به ثبوت رسیده باشد. ستارهٔ پنج‌پر، که نقشی چنان مهم در دایره‌های فیثاغورسی در اوایل سدهٔ یازدهم ق هـ ایفا کرد، نیز بر بابلیان معلوم بود، و ممکن است از آن سرزمین وارد شده باشد. این شکل، که پنج ضلعی منتظمی است که اضلاعش امتداد یافته و یکدیگر را قطع کرده و ستارهٔ پنج‌پری بوجود آورده‌اند، دارای این خاصیت قابل توجه است که اضلاع و اقطار آن همه‌جا یکدیگر را برنسبت ذات وسط‌الطرفین تقسیم می‌کنند؛ فیثاغورسیان این ستاره را مانند علامتی بکار می‌بردند که آنان را به یکدیگر می‌شناسانید.

از کشفهای ریاضی که روایات قدیم به فیثاغورسیان منتسب داشته‌اند مهم‌ترین عبارت است از کشف اندازه‌ناپذیر (گنگ) بودن. بنابر کتاب تئایتتوس افلاطون این کشف ممکن نیست بعد از ربع اول سدهٔ دوازدهم ق هـ صورت پذیرفته باشد، و با این که اندکی جرّ و بحث عالمانه دربارهٔ دقّت این تصدیق شده است، دلیلی نیست براین که در درستی آن تردید کنیم. مسلم به‌نظر می‌رسد که این آموزهٔ فیثاغورسی که همه‌چیز عدد است، انگیزهٔ نیرومندی برای پژوهش اعداد نهفته‌ای که جوهر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و پنج ضلعی منتظم را تشکیل می‌دادند، بوده باشد؛ اگر، همان‌طور که فیثاغورسیان

تشبیه شده بودند به هفت تار چنگ، و تصور شده بوده است که آهنگی آسمانی بوجود می‌آوردند که بر آن موسیقی افلاک نامگذاری شده بود. مخلوقهای فانی عادی نمی‌توانستند این موسیقی آسمانی را بشنوند (ارسطو این فکر را عرضه کرده بود که این ناتوانی نتیجهٔ آن بود که این مخلوق از زمان تولد پیوسته در معرض آن بوده است)، اما فیثاغورسیان متأخّر می‌گفتند که این موسیقی به گوش فیثاغورس می‌رسیده است.

مفهوم عرفانی دیگری، که از بابلیان گرفته شده بود، مفهوم سال بزرگ بود. این مفهوم، که فیثاغورسیان و احتمالاً فیثاغورس آن را بکار می‌بردند، برمبنای این عقیده بود که چون دوره‌های حرکت وضعی اجرام آسمانی بر نسبت عددهای صحیح بودند می‌بایست کوچکترین مضرب مشترکی وجود داشته باشد، به نحوی که صورتی از ستارگان آسمان بعد از دورهٔ معیّنی از زمان به وضع سابق خود بازگردند (و این دوره از زمان «سال بزرگ» بود). براساس این اعتقاد، این عقیده پیش آمد که هر چیزی که رخ می‌دهد درست به همان طریق باز می‌گردد.

فکری که فیثاغورسیان از زیبایی داشتند ایجاب می‌کرد که ستارگان بر روی ساده‌ترین منحنیها حرکت کنند. لازمهٔ این اصل آن بود که همهٔ اجرام سماوی بر روی دایره‌ها حرکت کنند، چون دایره زیباترین منحنی بود و این مفهوم در بسط اخترشناسی قدیم بیش‌ترین اهمیت را داشت. شاید ـ حتی پیش از آن که افلاطون از ریاضیدانی غیر فیثاغورسی به نام ائودُکسوس تقاضا کند که نمونه‌ای بسازد که حرکات مستدیرِ همهٔ اجرام آسمانی را نمایان سازد ـ نظریهٔ فیثاغورسی حرکتهای عطارد و زهره را به صورت افلاک خارج حول خورشید توصیف کرده بود، و بدین نحو اوّلین گام را به سوی دستگاه خورشید مرکزی برداشته بود.

خود را بیازماییم ۱

کافی‌است از روی نقطه‌چین قیچی کنیم.

خود را بیازماییم ۲

قطعه‌های متناظر در دو شکل را حذف کنید.

مسائل برای حل

مراجعه کنید به کتاب هنر حل مسئله

بخش ۲ــ الگویابی در دنباله‌های اعداد

جلسه ۳ــ الگویابی

فعالیت مثلث خیام ــ پاسکال

اهداف فعالیت: الگویابی عددی، پیشگویی جملات بعدی در دنباله‌های عددی، تنوع الگوها، حل مسئله از چند راه مختلف، همیشه یک مسئله چیزهای جدیدی برای یادگرفتن دارد، تجزیه به عوامل اوّل و نمایش استاندارد، دنباله اعداد اول، ساختن الگو با کمک جمع یا ضرب، همهٔ دنباله‌های عددی الگو ندارند.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: آیا می‌توانید ردیف بعدی را پیشگویی کنید؟ در این جدول چه نظمی می‌بینید؟ آیا در تکرار اعداد الگویی می‌بینید؟ آیا در ستونهای کج الگویی می‌بینید؟ آیا بین این ستونها ارتباطی می‌بینید؟ آیا بین هر عدد و اعداد نزدیک آن ارتباطی هست؟ جدولی شببه این درست کنید که از الگویی از پیش تعیین شده پیروی کند.

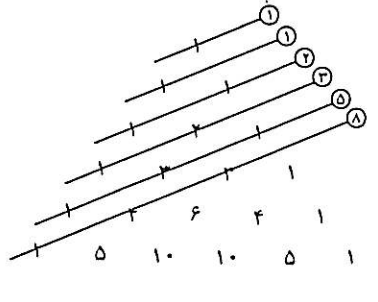
روش اجرا: در یک کلاس ضعیف سؤالات بالا را از دانش‌آموزان بپرسید و در این حین که به آنها پاسخ می‌دهید به دانش‌آموزان نیز فرصت بدهید با آن سؤالات درگیر شوند. به یافته‌های دانش‌آموزان بها بدهید و آنان را تشویق کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بدهید ولی خودتان یافته‌های آنان را منظم کنید. در صورت لزوم با سؤالات بالا آنها را راهنمایی کنید.

در یک کلاس قوی تمام مراحل حل مسئله را به دانش‌آموزان واگذار کنید. یافته‌های آنان را منظم کنید و به هم ربط دهید. دانش‌آموزانی را که خلاقیت نشان می‌دهند تشویق کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به مبحث اعداد فیبوناتچی در کتاب «تئوری مقدماتی اعداد» نوشته غلامحسین مصاحب

الگوی اعداد فیبوناتچی در مثلث خیام ــ پاسکال به صورت زیر ظاهر می‌شود.



زندگینامهٔ علمی خیام

(ت. نیشابور، خراسان، ۴۲۷/۴۴۰ ؛ و. نیشابور، ۵۳۶/۵۱۰)، ریاضیات، اخترشناسی، فلسفه.

احتمالاً در نیشابور تحصیل کرد ؛ ممکن است معلم خصوصی شده باشد ؛ در حدود سال ۴۴۹ از حمایت ابوطاهر، قاضی‌القضات سمرقند، برخوردار شد و با سرپرستی او کتابی بزرگ دربارهٔ معادله‌های درجهٔ سوم به نام رسالة فی‌البراهین علی مسائل الجبر و المقابله نوشت. از طرف سلطان جلال‌الدین ملکشاه سلجوقی و وزیرش نظام‌الملک به اصفهان دعوت شد تا رصدخانهٔ اخترشناسی آنجا را سرپرستی کند (هجده سال در اصفهان گذرانید) ؛ اخترشناسان اصفهان (که بهترین اخترشناسان زمان بودند)، به رهبری خیام، زیج ملکشاهی را گردآوردند. خیام طرح اصلاح تقویم را تنظیم کرد (حدود ۴۵۸) ؛ به‌عنوان اختر بین دربار خدمت می‌کرد، اگرچه به اختربینی احکامی اعتقاد نداشت. شروح بر نظریهٔ اقلیدس در مورد خطوط متوازی و نظریهٔ نسبتها را کامل کرد (۴۵۶) ؛ این اثر با رساله مهمترین کار علمی وی را تشکیل می‌دهد ؛ دربارهٔ موضوعهای فلسفی مطلب نوشت (حدود ۴۵۹). پس از درگذشت ملکشاه و کشته‌شدن نظام‌الملک، خیام مورد بی‌مهری قرارگرفت. کمک مالی به رصدخانه قطع شد. بعد از سال ۴۹۷ اصفهان را به قصد اقامت در مرو (اکنون ماری، جمهوری ترکمنستان)، که پایتخت جدید سلجوقیان بود، ترک کرد و احتمالاً در آنجا میزان‌الحکم و قسطاس‌المستقیم را نوشت ؛ اثر اول راه حل جبری مسألهٔ تعیین مقادیر طلا و نقره را در آمیزه (آلیاژ) معیّنی به وسیلهٔ وزنهای مخصوص بدست می‌دهد. رسالهٔ مسائل الحساب خیام، اگرچه باقی نمانده است، احتمالاً روش چینی محاسبه را در دستگاه موضعی دهدهی به وسیلهٔ ده عدد برای استخراج کعب بکار می‌برده است. اثری دربارهٔ موسیقی نوشت به نام القول علی اجناس التی بالاربعاء، که مسألهٔ تقسیم یک چهارم را به سه فاصلهٔ مربوط به مایه‌های بی‌نیم پرده، با نیم پردهٔ بالا رونده، و یک چهارم پرده عنوان کرد. کتابهای دوم و سوم شروح به اقلیدس مربوط است به مبانی نظری حساب به نحوی که در بررسی نظریهٔ نسبتهای ظاهر شده است ؛ نظریه‌ای دربارهٔ نسبتها ابداع کرد که هم‌ارز با نظریهٔ اقلیدس بود ؛ در کتاب سوم به نسبتها مرکّب، هندسه، نظریهٔ موسیقی، و مثلثات پرداخته است ؛ در مورد جبر، کار خیام در ابداع نظریهٔ هندسی معادلات درجهٔ سوم موفق‌ترین کاری است که دانشمندی مسلمان انجام داده است. نخستین کسی بود که گفت معادلهٔ درجهٔ سوم را نمی‌توان عموماً با تبدیل به معادله‌های درجهٔ دوم حل کرد، اما می‌توان با بکاربردن مقاطع مخروطی به حل آن دست یافت. وی نخستین کس بود که نشان داد معادلهٔ درجهٔ سوم ممکن است دارای دو ریشه باشد ؛ یکی از نخستین تعاریف جبر را بدست داد.

کتاب اول شرح خود بر اقلیدس را به کار مجدد دربارهٔ نظریهٔ موازیها و بنا نهادن آن بر مبنایی غیر از اصل موضوع پنجم اقلیدس اختصاص داد. پنج رسالهٔ فلسفی و دینی نوشت. پیش از هزار رباعی به زبان فارسی در حال حاضر به نام خیام انتشار یافته که صحت بسیاری از آنها مورد تردید است.

خود را بیازماییم ۱

مجموع اعداد سطر n ـ ام برابر است با 2^{n-1}.

خود را بیازماییم ۲

اعداد پنج ضلعی

مسائل برای حل

مراجعه کنید به کتاب هنر حل مسئله

بخش ۲ــ الگویابی در دنباله‌های اعداد

جلسه ۴ــ اعداد مثلثی، مربعی، ...

فعالیت مثلث خیام ــ پاسکال

اهداف فعالیت: الگویابی عددی، پیشگویی جملات بعدی در دنباله‌های عددی، تنوع الگوها، حل مسئله از چند راه مختلف، همیشه یک مسئله چیزهای جدیدی برای یادگرفتن دارد، اعداد مربع کامل، اعداد مثلثی، برقراری ارتباط بین الگوهای هندسی و عددی، برقراری ارتباط بین تجزیه به عوامل اول و اعداد مربع کامل، اعداد مخمسی و مسدّسی.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: بین ستونهای کج چه ارتباطی می‌بینید؟ در هر یک از ستونهای کج دنبالهٔ اعداد چه ارتباطی باهم دارند؟ آیا این دنباله‌ها را در جای دیگری دیده‌اید؟ آیا می‌توانید آنها را به الگوهای هندسی ارتباط دهید؟ آیا می‌توانید یک عدد را به اعداد ستون بالای آن ارتباط دهید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف چون این مسئله برای بار دوم مطرح می‌شود انتظار داریم مانند یک کلاس متوسط عمل کنند. پس ابتکار عمل را به ایشان بدهید ولی خودتان یافته‌های آنان را منظم کنید و در صورت لزوم با سؤالات بالا آنها را راهنمایی کنید.

در یک کلاس متوسط چون این مسئله برای بار دوم مطرح می‌شود تمام مراحل حل مسئله را به دانش‌آموزان واگذار کنید. یافته‌های آنان را منظم کنید و به هم ربط دهید دانش‌آموزانی را که خلاقیت نشان می‌دهند تشویق کنید.

در یک کلاس قوی به دانش‌آموزان شخصیت بدهید. از آنان بخواهید که خودشان الگوهای جدیدی در مثلث خیام ــ پاسکال بیابند. از خلاقیت آنان شگفت زده خواهید شد! از آنان بخواهید یافته‌های خود را منظم کنند و به هم ربط دهند. در مورد شخصیت علمی خیام و تحقیقات او برای آنان صحبت کنید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با مثالهایی از اعداد فیبوناتچی که در طبیعت ظاهر می‌شوند مراجعه کنید به «کارگاه اعداد» نوشته آرش رستگار

زندگینامهٔ علمی پاسکال

(ت. کلرمون فران، پویی دوْ دوْم، فرانسه، ۱۶۳۲/۱۰۰۲ ؛ و. پاریس، فرانسه، ۱۶۶۲/۱۰۴۱)،

ریاضیات، محاسبه با ماشین، فیزیک، شناخت شناسی.

پاسکال مطالعات علمی را در نوجوانی با خواندن «اصول» اقلیدس در حدود ۱۰۱۴ شروع کرد؛ در ۱۰۱۸، که هنوز شانزده سال نداشت، در فعّالیّتهای فرهنگستان مِرسن شرکت جُست. در آن سال ژیرار دزارگ تازه Brouillon project d'une atleinte aux événemens des recontres du cone avec un plan («مسوّدهٔ طرح دستیابی به رویدادهای برخورد مخروط با صفحه») را منتشر کرده بود. پاسکال، که اهمیت مفهوم مقاطع مخروطی دزارگ را درک کرد، موضوع اصلی «مسوّده ...» را پذیرفت. در خرداد ۱۰۱۸ اوّلین کشف مهم را کرد، و آن کشف خاصیتی بود هم ارز آنچه امروز «شش ضلعی عرفانی» پاسکال نامیده می‌شود، بدین شرح: سه نقطهٔ برخورد اضلاع مقابل شش‌ضلعی محاط در هر مقطع مخروطی بر یک خط مستقیم واقع می‌شوند.

در ۱۰۱۹ Essay pourles coniques («رساله‌ای برای مقاطع مخروطی») را نوشت، جزوه‌ای که فقط چند نسخه از آن منتشر شد. این رساله، که طرحی بود برای تحقیقی بیش‌تر و متضمن بیان چند گزارهٔ نمونه‌ای که او تا آن زمان کشف کرده بود، خلاصهٔ رسالهٔ بزرگی را تشکیل می‌داد که وی دربارهٔ مخروطات طرح‌ریزی کرده و شروع به تهیّهٔ آن نموده بود. در ۱۰۲۷ پاسکال یک راه حل دقیق و کلی کاملاً هندسی برای مسألهٔ مشهور پاپوس بدست آورد. در ۱۰۳۳ اعلام کرد که کتاب را تقریباً کامل کرده است اما کتاب هیچ وقت منتشر نشد. به نظر می‌رسد که فقط لایب‌نیتس دست نوشتهٔ آن را دیده، و دقیقترین جزییاتی را که دربارهٔ کتاب دانسته شده است فراهم آورده بود. اگرچه معدودی از مطالب کتاب پاسکال که به وسیلهٔ لایب‌نیتس حفظ شده است تصویر کاملی از محتویات آن را بدست نمی‌دهد، به اندازهٔ کافی نشان دهندهٔ پرباری و روشنی کار پاسکال است وقتی که او از قدرت روشهای تصویری کاملاً مطلع شده بود.

پاسکال، که علاقه‌مند بود که به پدرش (اتیئن پاسکال)، که وظایفش مستلزم محاسبات فراوان بود، کمک کند، به فکر ماشینی کردن دو عمل مقدّماتی جمع و تفریق افتاد. در اواسط ۱۰۲۰ طرحی را شروع کرد برای تهیهٔ ماشینی که این اعمال را به حرکت سادهٔ دنده‌ها تبدیل کند. به گفته خودش، بعد از ساختن «بیش از پنجاه نمونهٔ کاملاً متفاوت» سرانجام نمونهٔ نهایی را در ۱۰۲۴ تهیه کرد. او خودش ترتیب ساخت و فروش آن دستگاه را داد. این فعالیتها زمینهٔ نشریهٔ دوم پاسکال را تشکیل می‌دهد.

در ۱۰۳۳ پاسکال نه‌تنها آخرین دست‌کاری را در رساله‌های هندسه و فیزیک خود انجام داد بلکه مطالعات عمدهٔ خود در حساب و تحلیل (آنالیز) ترکیباتی و حساب احتمالات را هم کامل کرد. این عمل از نامه‌ای که به فرما نوشت و نیز از Traité du triangle arithmétique («رساله دربارهٔ

مثلّث حسابی») وی مستفاد می‌شود.

پاسکال، که از زندگی دنیوی خود و فعالیتهای شدید علمی ناراضی بود، به علایق دین کشانیده شد. او کارهای علمی خود را ترک گفت تا خود را وقف اندیشه و فعالیتهای دینی کند و به پیروان یانسن در جنگ با دشمنان متعدد، بخصوص یسوعیان، یاری رساند، بی‌ذکر نام، بین ۲۳ دی‌ماه ۱۰۳۴ و ۳ فروردین ماه ۱۰۳۶، با کمک دوستان پوْر روایالی خود، آنتوان آرنوْوپیئرنیکوْل، هجده Lettres provinciales («نامه‌های شهرستانی») را تنظیم کرد. این شاهکار بحث‌انگیز، که خدمتی والا به بحث و جدلی بود که آن روز عقاید مسیحیت را آشفته کرده بود، اوّلین بار به صورت مجموعه‌ای در ۱۶۵۷/۱۰۳۶ با نام مستعار لویی دوْموْنتالت منتشر شد. این طرح ناتمام منبع چندین نوشته بود که پس از مرگ وی انتشار یافت، و مهمترین آنها Pensées ـ«اندیشه‌ها») بود که در ۱۰۴۹ منتشر شد. این کار اساسی، که موضوع چندین شرح و مطالعات انتقادی مؤثّر قرارگرفت، هنر برجستهٔ فلسفی و ادبی پاسکال را جلوه‌گر می‌سازد.

در حوالی ۱۰۳۶، به خواهش آرنوْ، پاسکال کتابی با عنوان Éléments de géométrie («اصول هندسه») را شروع کرد، که از آن فقط قطعاتی دربارهٔ روش شناسی برجای مانده است: خلاصهٔ «مقدمه بر هندسه»، که در میان کاغذهای لایب‌نیتس [۱۸] حفظ شده است؛ و دو قطعهٔ «دربارهٔ ذهن هندسی» و «در هنر ترغیب». از اواخر ۱۰۳۶ تا اواخر ۱۰۳۷ پاسکال بیش‌تر وقت خود را برای کامل کردن «نظریّهٔ بخش‌ناپذیرها»، که طلیعهٔ روشهای حساب فاضل و جامع بود صرف کرد. این نظریّهٔ جدید او را قادر ساخت که مسائلِ شامل اعداد بی‌نهایت کوچک را مطالعه کند: تعیین اندازهٔ مساحتها و حجمها، تعیین مرکز ثقلها، و بدست‌آوردن طول منحنیها.

در اواخر ۱۰۳۶ پاسکال معتقد شد که اندازه‌گیری بخش‌ناپذیرها را با ظریف‌کردن روش خود و توسعه دادن زمینه‌های کاربرد آن کامل کرده است. چون مسلّم فرض می‌کرد که به این طریق راه حل مسائل متعدد بی‌نهایت کوچکهای مربوط به منحنی چرخزاد (سیکلوئید) را کشف کرده است، تصمیم گرفت که ریاضیدانان دیگر را برای حل این مسائل به مبارزه بخواند. در بخشنامهٔ بی‌امضایی که در خرداد ۱۰۳۷ پخش شد، او شرایط این مسابقه را اعلام کرد و آخرین موعد مسابقه را روز ۹ مهر تعیین نمود. در بخشنامه‌ها و جزوه‌های بی‌امضای دیگری، که بین تیرماه و دی‌ماه ۱۰۳۷ منتشر شد، بعضی از شرایط را تعدیل یا مشخص‌تر کرد و نتایج را اعلام نمود. به انتقادهای برخی از شرکت‌کنندگان نیز جواب داد و در پی آن برآمد که اهمیت و اصالت راه‌حلهای خود را به اثبات رساند. بیش‌تر ریاضیدانان برجستهٔ آن زمان این مسابقه را با علاقه دنبال کردند، در پایان مسابقه، پاسکال راه‌حلهای خود برای بعضی از مسائل اصلی و بعضی از مسائلی را که در این میان به آنها اضافه شده بود منتشر

کرد. در آذر و دی ۱۰۳۷ چهار نامه با امضای مستعار آ. دتونویل منتشر کرد که در آنها اصول اساسی روش خود و طرز به‌کار بردن آن در مسائل مختلف مربوط به منحنی چرخزاد، همچنین مسائلی از قبیل مربع کردن سطحها و مکعب‌کردن، اندازه‌گیری مرکزهای ثقل، و طول خطوط منحنی را مطرح کرده بود. در بهمن‌ماه ۱۰۳۷ این چهار جزوه با عنوان Lettres de A. Dettvnoille contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie .... («نامه‌های آ. دتونویل مشتمل بر بعضی از اختراعات هندسی او ...») جمع‌آوری شد. کار برجستهٔ پاسکال در این زمینه گام مهمّی بود در انتقال از حساب بخش‌ناپذیرها به حساب انتگرالها. ص.

مسائل برای حل: از مجلهٔ «معلم ریاضی»

۱ـ با جایگذاری پرانتز جمله را درست نمایید.

۹۰۵+۲−۸۰۳+۱=۲۲

$$\begin{array}{r} \text{MOM} \\ +\text{DAD} \\ \hline ۱\,\text{SON} \end{array}$$

۲ـ اعداد را به‌دست آورید.

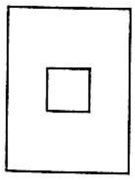
۳ـ به سه طریق می‌توان عدد ۱۰ را به اعداد فرد و مثبت افراز کرد:

۱+۱+۳+۵ ۱+۱+۱+۷ ۱+۳+۳+۳

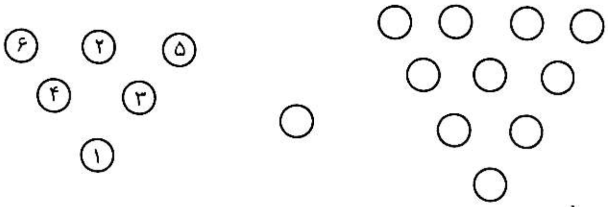
همه ۱۱ طریق افراز عدد ۲۰ به مجموع هشت عدد فرد را بیابید.

۴ـ همه رقمها متمایز هستند (I).(AM).(NOT)=SURE پیدا کنید.

۵ـ پسر بچه‌ای یک مربع ۳×۳ از صفحه تقویم (مستطیل ۳۰×۱۲) می‌کند هرگاه مجموع ۹ تاریخ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد تاریخ روز در مربع پایین سمت‌چپ چیست؟



۶ـ الگویابی عددی: هر عدد در پایین قدرمطلق تفاضل دو عدد در بالاست. این کار را با اعداد ۱ الی ۱۰ را انجام دهید.



فصل ۲ــ اعداد

بخش ۱ــ عدد و نماد

جلسه ۵ــ نمادگذاریهای مختلف برای اعداد

فعالیت مربع وفقی

اهداف فعالیت: آشنایی با نمادگذاریهای مختلف برای اعداد طبیعی، تنوع نمادگذاری، خلاقیت در نمادگذاری برای اعداد طبیعی، محاسبات با نمادهای مختلف، الگویابی، الگوسازی، آشنایی با تاریخ استفاده از نمادها

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: چند چینش تصادفی انتخاب کنید و مجموع اعداد هر سطر و ستون را محاسبه کنید. اگر برابر نباشند، آیا می‌توان با جابجایی بعضی اعداد آنها را با هم برابر کرد؟ آیا می‌توان این کار را آنقدر ادامه داد که مجموع اعداد در همهٔ سطرها و ستونها و قطرها برابر شود؟ فرض کنید مسئله حل شده باشد. مجموع اعداد در سطرها، ستونها و قطرها چقدر است؟ حال که مجموع را پیدا کردید دوباره سعی کنید خودتان مربع وفقی را بسازید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف با پرسش سؤالات بالا مسئله را به‌سوی حل پیش ببرید. البته به دانش‌آموزان فرصت بدهید تا درگیر مسئله شوند. انواع نمادگذاریها را که تمدنهای مختلف بکار برده‌اند به آنان معرفی کنید.

در یک کلاس متوسط مراحل حل مسئله را به دانش‌آموزان واگذار کنید. و پس از معرفی نمادگذاریها در تمدنهای مختلف آنها را مقایسه کنید و مقایسه توانمندی این نمادگذاریها را در کلاس به بحث بگذارید.

در یک کلاس قوی پس از حل مسئله از دانش‌آموزان بخواهید یک مربع وفقی ضربی بسازند. از آنها بخواهید با اعدادی که خودشان می‌سازند مربع وفقی را چنان پر کنند که حاصلضرب اعداد هر سطر و هر ستون و هر قطر برابر شود. در اینجا چند جواب می‌آید.

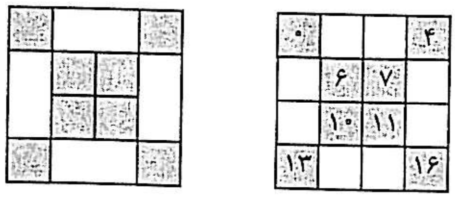
$۲^{۶}$	$۲^{۷}$	$۲^{۲}$
$۲^{۱}$	$۲^{۵}$	$۲^{۹}$
$۲^{۸}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$

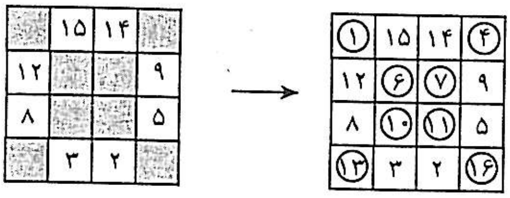
۱	۱	۱
۱	۱	۱
۱	۱	۱

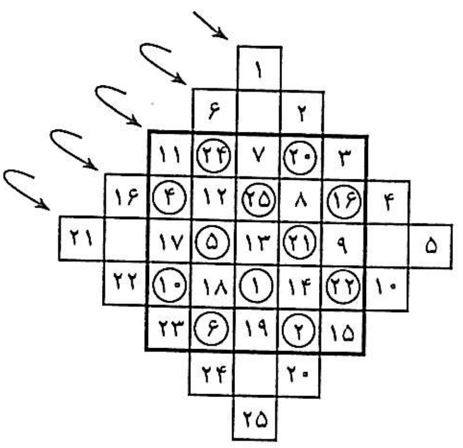
پس از معرفی نمادگذاریها در تمدنهای مختلف از آنها بخواهید خودشان یک نمادگذاری متفاوت از این نمادگذاریها معرفی کنند. به پیشنهادات آنان احترام بگذارید. اما فواید آنها را به‌طور جدی نقد نمایید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با نمادهای مختلفی که برای اعداد بکار می‌رفته است مراجعه کنید به کتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات» نوشته ایوز ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

مربعهای وفقی







بخش ۱ـ عدد و نماد

جلسه ۶ـ مبنا

فعالیت نمایش اعداد در مبنای پنج

اهداف فعالیت: مهارت در دسته‌بندی، درک عدم اهمیت عدد ۱۰ در نمایش اعداد، آشنایی با نمایش دو دویی و کاربرد آن در کامپیوتر، مزایای نمایش اعداد در مبنای ۱۰، مزایای نمایش اعداد در مبنای ۲، محاسبات در مبناهای مختلف

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: آیا دسته‌بندی به دسته‌های ده‌تایی را که در دبستان انجام می‌دادید به یاد دارد؟ رشته‌های ده‌تایی و صدتایی را چگونه تشکیل می‌دادید؟ همین‌کار را برای دسته‌های پنج‌تایی انجام دهید. یک دسته صدتایی از چند بسته ده‌تایی تشکیل شده است؟ در پنج دسته پنج‌تایی چند عضو پیدا می‌شود؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف هم می‌توان ابتکار عمل را به دانش‌آموزان سپرد و اگر احتیاج به راهنمایی داشتند به آنها کمک نمود.

در یک کلاس متوسط از دانش‌آموزان بخواهید در نمایش شصت‌گانی جمع و تفریق انجام دهند و مزایای نمایش اعداد در مبنای ۶۰ را با دیگر مبناها مقایسه کنند.

در یک کلاس قوی از دانش‌آموزان بخواهید در هر نماد داده شده جمع و تفریق و ضرب انجام دهند.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به «تئوری مقدماتی اعداد» نوشته غلامحسین مصاحب

خودرا بیازماییم:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & + \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0^{2} & - \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

در مواقع ۲ بر یک در دستگاه دوگانی مانند ده بر یک در دستگاه ده‌گانی عمل می‌شود
مسائل برای حل: مراجعه کنید به کتاب هنر حل مسئله

بخش ۲ــ نماد علمی

جلسه ۷ـــ توان طبیعی و توان صحیح

فعالیت تاکردن کاغذ و فعالیت توان صحیح

اهداف فعالیت: رشد نمایی، توان طبیعی، توان صحیح، نمایش اعداد کوچک به‌صورت توان خلاقیت در نمادگذاری، الگویابی، درک ملموس از اعداد بزرگ

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: در فصل« چارچوبی برای پویاسازی تفکر جبری دانش‌آموزان » فعالیت تاکردن کاغذ به‌طور مبسوط مطرح شده است

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف انجام فعالیت تاکردن کاغذ را به دانش‌آموزان بسپارید امّا فعالیت توان صحیح را خودتان همراه با مطرح کردن پرسشهای آن انجام دهید. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا با مسئله درگیر شوند.

در یک کلاس متوسط انجام هر دو فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید. آنان را به بحث وادارید. در پایان درس ایده‌های مطرح شده را خلاصه و منظم کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان باید بتوانند مرتبه اعداد بزرگ را از روی اعداد معرفی شده در متن حدس بزنند. هر دو فعالیت را به عهده دانش‌آموزان بگذارید. بحثهای مشکل و تکنیکی درمورد فعالیت توان صحیح ممکن است کلاس را از مسیر اصلی خارج نماید. از اینگونه بحثها احراز نمایید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به سند «چارچوبی برای پویاسازی تفکر جبری» در همین مجله

زندگینامهٔ علمی گالیله

(ت. پیسا، ایتالیا، ۱۵۶۴/۹۴۳ ؛ و. آرچتری، ایتالیا، ۱۰۲۱/۱۶۴۲)، فیزیک، اخترشناسی.

زندگانی گالیله با پیدایش دگرگونی برجسته‌ای در آغاز سدهٔ هفدهم در زمینهٔ تعادل میان فلسفهٔ نظری، ریاضیات، و قراین تجربی در بررسی پدیده‌های طبیعی پیوند دارد. این دوره، که دورهٔ انتشار آثار علمی او است، با اعلام نخستین کشفیات نجومی تلسکوپی در ۹۸۹ آغاز شد و با نخستین کوشش منظم در راه توسعهٔ کاربرد ریاضیات در فیزیک از ایستایی شناسی (statics) به جنبش‌شناسی (kinematics) و مقاومت مصالح در ۱۰۱۷ به پایان رسید.

آموزش آغازین گالیله را معلم سرخانه‌ای به‌نام یاکوپو بورگینی در پیسا برعهده داشت. خانوادهٔ او در آغاز دههٔ ۹۵۰ به فلورانس بازگشت. آنگاه گالیلئو را به مدرسه صومعهٔ مشهور سانتارماریا در والومبروسا فرستادند. او، به‌رغم خواست پدرش، در ۹۵۷ به‌عنوان نوآموز وارد آن فرقهٔ دینی شد، و

پدر وی را دوباره به فلورانس بازگرداند. در ۹۶۰ در رشتهٔ پزشکی دانشگاه پیسا نام‌نویسی کرد.

چنین می‌نماید که در بیشتر سالهائی که گالیله در پیسا دانشجو بوده کرسی تدریس ریاضیات هیچ استادی نداشته است. بنابراین آموزش رسمی وی در اخترشناسی احتمالاً محدود به سخنرانیهائی می‌شده که فرانچسکو بوئونامیچی فیلسوف دربارهٔ کتاب De caelo («در آسمان») ارسطو ایراد می‌کرده است. فیزیک نیز از طریق دروس و سخنرانیهای ارسطویی، که به‌وسیلهٔ بوئونامیچی و جیرولامو بورو عرضه می‌شد، تدریس می‌گردید. علاقهٔ او به پزشکی چندان زیاد نبود؛ در عوض با تعلیماتی که از اوستیلیوریتچی در بیرون از دانشگاه کسب کرد، در ۹۶۲ به ریاضیات علاقه‌مند شد. تحصیلات گالیله در ریاضیات، که در آغاز با مخالفت پدرش روبه‌رو بود، بسرعت پیش رفت؛ در ۹۶۴ دانشگاه را بی‌آن که مدرکی بگیرد ترک کرد و به فلورانس بازگشت، و در آنجا نزد خویش به مطالعهٔ آثار اقلیدس و ارشمیدس ادامه داد.

گالیله از ۹۶۴ تا ۹۶۸ در فلورانس به‌تدریس خصوصی ریاضیات و در سیئنا به‌تدریس خصوصی و عمومی پرداخت. هنگام دیدار از رم در ۹۶۶، با کریستوف کلاو (کلاویوس) ریاضیدان یسوعی آشنا شد. گالیله در ۹۶۸ کرسی تدریس ریاضیات در پیسا را بدست آورد، اما با بسیاری از استادان آنجا روابط صمیمانه نداشت، و علت عمدهٔ آن مبارزهٔ وی برای بی‌اعتبار ساختن فیزیک رایج ارسطویی بود. آزمایش نمایشی او در «برج کج پیسا» مبنی بر این که اجسام همجنس ولی مختلف الوزن با سرعت برابر سقوط می‌کنند، آشکارانه یک آزمایش بلکه یک هماوردجویی در ملأعام با فیلسوفان بود.

گالیله در رسالهٔ Demotu («دربارهٔ حرکت»). قانون حاکم بر تعادل اوزان در سطوح شیب‌دار را استخراج کرد و کوشید که این قانون را با سرعت پایین آمدن اجسام مربوط سازد. گالیله، پس از آن که پدرش در ۹۷۰ درگذشت، به پادوئا رفت و در آنجا استاد کرسی ریاضیات گردید. در میان عامهٔ مردم به سخنرانی دربارهٔ موضوعهای مقرر پرداخت و رساله‌های متعددی برای استفادهٔ شاگردانش تألیف کرد. یکی از آنها، که معمولاً به‌نام Le meccaniche («مکانیک») خوانده می‌شود، به سه شکل متوالی آن (۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۹) باقی‌مانده است وی در این رساله، علاوه‌بر گسترش بیشتر شیوهٔ کار خود دربارهٔ سطوح شیب‌دار، از این عقیده که یک نیروی بی‌نهایت کوچک می‌تواند تعادل را برهم زند به‌عنوان پلی‌میان ایستایی شناسی و پویایی‌شناسی (dynamics) بهره گرفت.

گالیله در اوایل شهریور ۹۸۸ با تلسکوپ نُه توانی (nine - power) خود، که سه بار مؤثرتر از تلسکوپهای دیگر بود، به ونیز رسید. پیشرفت سریع تلسکوپ گالیله همچنان ادامه داشت تا آن که وی، در پاییز ۹۸۸، تلسکوپی سی‌توانی (thirty power) ساخت. این حدّ عملی برای تلسکوپ نوع

گالیله‌ایی بود، که یک عدسی چشمی کوژ (محدب) و یک عدسی شیئی کاو (مقعر) داشت. او این ابزار جدید را بی‌درنگ در دی ماه ۹۸۸ به‌سوی آسمانها نشانه گرفت و نتایجی تکان‌دهنده بدست آورد. نه‌تنها روشن شد که ماه کوههائی دارد و کهکشان (راه‌شیری) مجموعه‌ای است از انبوه ستارگان جدا از هم، که با اصول ارسطویی مغایرت داشت، بلکه گروهی از ثوابت جدید و چهار قمر برجیس (مشتری) نیز بلافاصله کشف شدند. گالیله، که با شتاب فراوان اما با دقّتی عجیب کار می‌کرد، کشفیات خود را در Sidereus nuncius («پیک آسمان»)، که در اسفند ۹۸۸ در ونیز انتشار یافت، شرح داده بود. در تابستان ۹۸۹ از کرسی تدریس پادوئا کناره گرفت و به‌عنوان ریاضیدان و فیلسوف دوک بزرگ توسکانی، و ریاضیدان ممتاز دانشگاه پیسا، به فلورانس بازگشت، بی‌آن که ملزم به تدریس باشد.

کتاب گالیله به‌نام Letters on Sunspots («نامه‌هائی دربارهٔ لکه‌های خورشید») در سال ۹۹۲ زیر نظارت «فرهنگستان لینچئی» در رم انتشار یافت. گالیله در این کتاب برای نخستین‌بار به‌صورت چاپ شده از دستگاه کوپرنیک قاطعانه و بی‌پرده هواداری کرد. اما چندی نگذشت که حملات علیه گالیلئو و پیروان او در مراکز کلیسایی آغاز شد. این حمله‌ها در پاییز ۹۹۳ از منبر وعظی در فلورانس با اخطاری تهدیدآمیز به اوج خود رسید.

در آذر ۹۹۲ در یک میهمانی درباری که گالیله در آن حضور نداشت، پس از بالا گرفتن اعتراضهای شرعی علیه آیین کوپرنیک، بندتّو کاستلّی به دفاع از گالیله برخاسته بود. گالیله، پس از آگاهی به این ماجرا، نامه‌ای مفصّل به کاستلی نوشته، و در آن دخالت روحانیان در مسائل ناب علمی را ناروا دانسته بود. کاستلی، پس از ماجرای اخطار تهدیدآمیز سال ۹۹۳، آن نامه را به یک روحانی متنفذ دومینیکی نشان داد، و او نیز نسخه‌ای از آن برداشت و به دستگاه تفتیش عقاید رم فرستاد. آنگاه گالیله بی‌درنگ نامه‌ای آمرانه به رم نوشت و بسط مطالب آن را به‌صورت کتاب Letter to Christina («نامه به کریستینا») در ۹۹۴ آغاز کرد و احتمالاً در ۱۰۱۵ بچاپ رسانید. استدلال گالیله این بود که نه کتاب مقدس می‌تواند سخن دروغ گوید و نه طبیعت، و بررسی طبیعت در حوزهٔ صلاحیت دانشمند است، حال آن که وظیفهٔ سازگار گردانیدن واقعیتهای علمی با زبان کتاب مقدس را روحانیون برعهده دارند.

در پاییز ۹۹۴ گالیله برای تبرئهٔ خویش و، درصورت امکان، جلوگیری از صدور رسمی حکم ممنوعیت تدریس آیین کوپرنیک به رم رفت. در آغاز، توفیق با او قرین بود: هیچ تصمیم انضباطی علیه او دربارهٔ نامه‌اش به کاستلّی یا بیان کوپرنیکی وی در کتاب مربوط به لکه‌های خورشید اتخاذ نگردید. در اعتراض بار دوم، اما، شکست خورد. در ۷ اسفند ۹۹۴ به او توصیه شد که از حمایت

یا دفاع از آن عقیده دست بردارد. گالیله ، پس از بازگشت به فلورانس، خود را به‌بررسی مسأله‌ای عملی، که مورد مشاجره و اعتراض نبود، یعنی تعیین طول جغرافیایی در دریا، مشغول ساخت.

احتمال می‌رود که گالیله طی این دوره بار دیگر به تحقیقات مکانیکی خود، که در ۹۸۸ با پیدایش تلسکوپ قطع شده بود، نیز بازگشته باشد. گالیله ، در رساله‌ای به زبان لاتینی به‌نام De motu accelerato («دربارهٔ شتاب حرکت»)، بدرستی و طوری شتاب یکنواخت را تعریف می‌کند که به متن قطعی کتاب نهایی بسیار شباهت دارد.

در سال ۹۹۷ سه ستارهٔ دنباله‌دار توجه اروپا را به خود جلب کرد و موضوع بحث رساله‌ها و کتابهای متعدد شد. یکی از این کتابها، که بی‌امضا و به توسط اوراتسیو گراسی نوشته شده بود، در فرهنگستان فلورانس از سوی گوئیدوتچی، که نزد گالیلهٔ بیمار و بستری درس خصوصی می‌خواند، مورد انتقاد قرار گرفت. نتیجهٔ این منازعه یکی از معروفترین نوشته‌های جدلی علمی گالیله یعنی کتاب Il saggiatore («عیارسنج») بود. این کتاب خطاب به ویرجیتیو چزارینی نوشته شده بود، و او جوانی بود که مباحثات سال ۹۹۴ـ۹۹۵ گالیله را در رم شنیده، و در ۹۹۵ نامه‌ای ستایش‌آمیز دربارهٔ روشی که گالیله به یاری آن شاهراه نوینی به سوی حقیقت بر رویش گشوده بود برای گالیله فرستاده بود. گالیله، از آنجائی که دیگر نمی‌توانست از آیین کوپرنیک دفاع کند، از پرداختن به مسألهٔ حرکت زمین خودداری می‌کرد ؛ در عوض، یک رهیافت کلی علمی در زمینهٔ تحقیق دربارهٔ پدیده‌های کیهانی پیش‌نهاد. او هیچ‌گونه نظریهٔ مثبتی دربارهٔ ستارگان دنباله‌دار بدست نداد، اما در جریان استدلالهای خود خواص فیزیکی اشیا را از آثار حسی آنها تفکیک کرد، و هر موضوعی را که مورد بررسی مستقیم قرار می‌گرفت بی‌اعتبار دانست، و اظهار داشت که کتاب طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است، و تنها کسانی می‌توانند رمز آن را بگشایند که ریاضیات می‌دانند.

کتاب «عیارسنج»، که در سال ۱۰۰۲ زیر نظارت فرهنگستان لینچئی انتشار یافت، به پاپ اوربان هفتم هدیه شده بود. گالیلئو در ۱۰۰۳ به رم رفت تا احترامات خود را به اوربان تقدیم دارد، و اگرچه پاپ از لغو فرمان سال ۹۹۵ خودداری ورزید، اما به او اجازه داد تا در کتابی به بحث دربارهٔ نظام کوپرنیکی بپردازد، مشروط بر این که اظهاراتش دربارهٔ دیدگاه بطلمیوسی نیز با بحثی بیطرفانه و منصفانه همراه باشد.

کتاب Dialogue Concerning the Two Chief World Systems («گفتگو دربارهٔ دو نظام جهانی عمده») تا شش سال بعد گالیله را مشغول ساخت. این کتاب شکل ادبی مباحثه‌ای است میان مردی که از زبان کوپرنیک سخن می‌گوید، شخصی که مدافع بطلمیوس و ارسطو است، و تحصیل کرده‌ای که نقش بیطرف را میان دو سوی منازعه برعهده دارد. بدین‌ترتیب گالیله ، جز در پیشگفتار که

ظاهراً به دفاع از فرمان ضد کوپرنیکی سال ۹۹۵ می‌پردازد، در این کتاب از نظر فنی بیطرف باقی می‌ماند.

آنچه در کتاب «گفتگو» اهمیت دارد عبارتند از مفاهیم نسبیّت حرکت و بقای حرکت، هم زاویه‌ای و هم ماندی (inertial)، که، در پاسخ به استدلالهای معیار بطلمیوس و آنچه از سوی توکوبراثه افزوده شده است، برای آشتی دادن فیزیک زمینی با حرکتهای بزرگ زمین مطرح شده‌اند. از کاربرد قانون اجسام سقوط کننده و ترکیب حرکات نیز سخن می‌رود. تصحیح اندازه‌های بصری و فواصل احتمالی و موضعهای ثوابت نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. شرح مختصری از یک برنامه برای آشکار کردن جابه‌جاییهای اختلاف منظری میان ثوابت بیان می‌شود. و به وجوه مختلف ناهید (زهره) اشاره می‌گردد تا تبیین شود که چرا از طریق آن سیّاره نمی‌توان با چشم غیرمسلح به اختلاف بزرگ اندازه‌ها در حضیض و اوج پی‌برد. از اصلاحاتی که کپلر در مدارهای مستدیر کوپرنیکی وارد کرده است ذکری به میان نمی‌آید ؛ و درواقع، نظام کوپرنیکی بسیار منظم‌تر و ساده‌تر از آنچه خود کوپرنیک ایجاد کرده بوده است معرفی می‌گردد. در زمینهٔ اخترشناسی فنی نیز فقط دربارهٔ مسائل مربوط به رصد بحث می‌شود و از نظریهٔ سیاره‌ای سخنی به‌میان نمی‌آید.

گالیله ، در ردّ ایرادهای فیزیک مرسوم به حرکات زمین، دو استدلال به سود آن افزود. یکی از آن استدلالها مربوط بود به تغییرات سالانه در مسیرهای لکه‌های خورشیدی، که از لحاظ پویایی شناسی نمی‌شد آنها را با ساکن بودن مطلق زمین سازگار کرد. دومین استدلال جدید مربوط می‌شد به‌وجود جزر و مدّهای اقیانوس، که گالیله بدرستی اعلام کرده بود که تبیین فیزیکی آنها بدون متحرک بودن زمین نامکن است.

کتاب «گفتگو» در اسفند ۱۰۱۰ در فلورانس انتشار یافت. چند نسخه‌ای به رم فرستاده شد و تا مدتی هیچ فتنه‌ای دربی نداشت. اما ناگهان به ناشر دستور رسید که فروش را متوقف سازد، و به گالیله نیز فرمان داده شد که به رم برود و خود را در ماه مهر به دادگاه تفتیش عقاید معرفی کند.

گالیله ، که به‌علت بیماری سختی بستری بود، نخست از رفتن به رم سرباز زد. دوک بزرگ و سفیر او در رم نیز دلیرانه به سود او وساطت کردند، اما پاپ سرسختی نشان داد.

نتیجهٔ محاکمه، که در فروردین آغاز شد، قطعی و بی‌چون و چرا بود. گالیله را خارج از دادگاه قانع کرده بودند بپذیرد که در «گفتگو» در استدلال به سود کوپرنیک زیاده‌روی کرده است. براساس این اعتراف، کتاب «گفتگو» در فهرست «کتب ضاله» قرار گرفت، و خود گالیله نیز پس از توبه کردن از «الحاد» کوپرنیکی به زندان ابد محکوم گردید. مجازات حبس بیدرنگ به بازداشت تحت‌نظر دایم در منزل تخفیف یافت. او نخست به سیئنا فرستاده شد و در آنجا تصمیم گرفت که تمام کارهای بزرگ

علمی زندگانیش در زمینهٔ فیزیک را در کتابی به‌همان شکل کتاب «گفتگو» و با استفاده از همان شخصیتهای فرضی تنظیم کند.

در ۱۶۳۱ گالیله به ویلای خود در آرچتری، که بر تپه‌ای مشرف بر فلورانس واقع بود، انتقال یافت. احتمال می‌رود که وی هنگام عزیمت از سیئنا عبارت مشهور Eppur si muove» («با این حال می‌چرخی») را بیان نموده باشد، اما بنابر قول مشکوکی آن را پس از زانوزدن برای توبه در برابر کاردینالهای دادگاه تفتیش عقاید رم و هنگام برخاستن زیر لب ادا کرده بوده است. شوق گالیله بویژه از آن بود که به فلورانس باز گردد و نزدیک دختر بزرگش باشد. اما این دختر اندکی پس از بازگشت پدر درگذشت. تا مدتی گالیله هرگونه علاقه به‌کار و حتی علاقه به زندگی را از دست داد. اما کار ناتمامش درمورد حرکت بار دیگر توجهش را جلب کرد، و تا یک سال بعد درواقع به پایان رسید. اکنون مسألهٔ دیگری در برابر او قد برافراشت: انتشار هر یک از کتابهای او، چه قدیم و چه جدید، از سوی «انجمن فهرست کتب ضاله» ممنوع اعلام شده بود. با این حال یک نسخهٔ دستنویس را نهانی به فرانسه فرستاد، و انتشارات الزویر در لیدن چاپ آن را برعهده گرفت. هنگامی که کتاب در ۱۶۳۸ انتشار یافت، گالیله کاملاً نابینا شده بود.

آخرین اثر او به نام ــ Discourses and Mathematical Demon strations Concerning Two New Sciences(«گفتارها و برهانهای ریاضی دربارهٔ دو دانش نوین») به بحث دربارهٔ علم مهندسی مقاومت مصالح و علم ریاضی جنبش‌شناسی می‌پردازد. از چهار گفتار موجود در کتاب، دو گفتار آخر مربوط به حرکت یکنواخت و حرکت شتابدار، و نیز بحثی دربارهٔ مسیرهای سهموی است. دو گفتار نخست کتاب به مسائلی می‌پردازند که مربوطند به ساختمان مادّه؛ ماهیّت ریاضیات؛ مقام آزمایش و عقل در علم؛ وزن هوا؛ ماهیّت صوت؛ سرعت نور؛ و توضیحات پراکندهٔ دیگر دربارهٔ فیزیک به‌طور کلی.

گالیله، پس از انتشار آخرین کتابش، چهار سال در نابینایی مطلق زنده ماند. همدم وی در این مدت وینچنتسیو ویویانی بود، که (پس از اوانجلیستا توریچلی) ریاضیدان جانشین گالیله در دربار دوک بزرگ بشمار می‌رفت و کاغذهای گالیله در اختیار او قرار گرفت. م. ث.

خود را بیازماییم

در جمع و تفریق نمادهای علمی از مقداری که کوچکتر است صرف‌نظر می‌کنیم. مگر این که

دو مقدار قابل مقایسه باشند. در اینصورت تنها باید محاسبات را روی ضریب اعشاری انجام دهیم و دوباره به نماد علمی تبدیل می‌کنیم.

$$5/3\times10^1+4/8\times10^1=10/1\times10^1$$

$$=1/0\times10^2$$

مسائل برای حل: از کتاب سرگرمیهای جبر نوشته پرلمان

۱ـ در یکی از مؤسسات شوروی گاوصندوقی یافت گردید که از سالهای ماقبل انقلاب بجا مانده بود. کلید آن هم پیدا شد ولی برای باز کردن گاوصندوق بایستی رمز قفل کشف می‌شد. در گاوصندوق دارای پنج حلقه بوده و بدور هر حلقه حروف الفبا* (۳۶ حرف) حک گردیده بود. برای آنکه در گاوصندوق باز گردد باید حلقه‌ها در وضعی قرار داده می‌شد تا کلمهٔ معینی بدست آید. چون هیچ‌کس این کلمه را نمی‌دانست، برای اینکه گاوصندوق را خراب نکنند، تصمیم گرفتند تا کلیهٔ ترکیبات حروف حلقه‌ها آزمایش شوند. برای تشکیل دادن یک ترکیب مدت ۳ ثانیه لازم بود.

آیا می‌شد توقع داشت که گاوصندوق در ظرف ده روز آینده باز می‌گردید؟

۲ـ بیائید وضع هوا را برحسب اینکه آسمان ابری است یا نه، مشخص سازیم یعنی تنها بین روزهای صاف و ابرآلود فرق بگذاریم. شما چه فکر می‌کنید، آیا تحت چنین شرایطی تعداد هفته‌ها با تناوبهای گوناگون وضع هوا زیاد خواهد بود؟

به‌نظر میرسد که نه زیرا طی یکی دو ماه، تمامی ترکیبهای روزهای صاف و ابرآلود هفته بوقوع پیوسته و ناگزیر یکی از ترکیبهائی که قبلاً صورت گرفته بود تکرار خواهد شد.

کوشش می‌کنیم بطور دقیق محاسبه نمائیم که تحت همین شرایط چند ترکیب مختلف امکان‌پذیر است. این یکی از مسایلی است که بصورت غیر مترقبه ما را به‌طرف عمل پنجم ریاضی می‌کشاند.

روزهای صاف و ابری در هفته به چه صورتهای مختلفی ممکن است عوض شوند؟

بخش ۲ــ نماد علمی

جلسه ۸ــ نمادعلمی و محاسبات

فعالیت نماد علمی

اهداف فعالیت: کاربرد نمادعلمی، آشنایی با تقریب، آشنایی با خطا، تبدیل واحدها، درک ملموس از اعداد کوچک، توان صحیح، انتخاب واحد مناسب، کار با اعداد در صحنهٔ زندگی روزمره تخمین‌زدن، محاسبات نمادعلمی، اندازه‌گیری

سؤالهایی که می‌توان پرسید: آیا توانایی نمایش اعداد و اندازه‌گیری به رشد یک تمدن ارتباط دارد؟ آیا یک تمدن پیشرفته لزوماً در اندازه‌گیری نیز پیشرفته است؟ در زندگی روزمره چقدر اندازه‌گیری اهمیت دارد؟

روش اجرا: از آنجا که این فعالیت به ارتباط ریاضیات با زندگی روزمره تأکید دارد همه سطوح به یک اندازه با آن ناآشنا هستند. چون این بعد ریاضیات پیش از این کمتر مورد تأکید بوده است مطمئن شوید که دانش‌آموزان به درک ملموسی از اعداد بزرگ و کوچک خواهند رسید.

درمورد نقش گالیله و کپلر در ترجمه حرکت زمینی و حرکت آسمانی به زبان ریاضیات برای دانش‌آموزان صحبت کنید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با مثالهایی از نمایش طولها، جرمها و زمانها با اعداد علمی مراجعه کنید به کتاب «فیزیک» نوشته هالیدی و رزنیک.

زندگینامهٔ علمی کپلر

(ت. وایل در اشتات، آلمان، ۱۵۷۱/۹۵۰ ؛ و. رگنسبورک، آلمان، ۱۶۳۰/۱۰۰۹)، اخترشناسی، فیزیک.

اگرچه امروزه از کپلر بیشتر به مناسبت سه قانون وی دربارهٔ حرکت سیّاره‌ای یاد می‌شود، ولی آنها تنها سه جزء از پژوهش بسیار گسترده‌تر او دربارهٔ هماهنگیهای کیهانی و فیزیک سماوی بودند. کپلر، که هواخواه پرشور کوپرنیک بود، به اخترشناسی‌ای برخورد که سازوکارهای سیّاره‌ای خام‌آن که مبتنی بر مرکزیت زمین و ایستایی خورشید بود خطاهای متعدد داشت، و او به‌جای آن یک نظام وحدت یافتهٔ مبتنی بر خورشید مرکزی را گذاشت که تقریباً ۱۰۰ برابر دقیقتر بود.

کپلر، فرزند هاینریش، سرباز مزدبگیری که در ۹۶۷ خانواده‌اش را ترک کرد، و کاتارینا گولدنمان

بود. کپلر ابتدا به مدرسهٔ لئونبرک، که خانواده‌اش در ۹۵۵ به آنجا نقل مکان کرده بودند، رفت. در سیزده سالگی به مدرسهٔ ابتدایی محلی وارد شد. در ۹۶۶ در دانشگاه توبینگن نام‌نویسی کرد، ولی تا ۹۶۸ عملاً در آنجا حضور نیافت. در ۹۷۰ کپلر فوق‌لیسانس گرفت و از آن پس وارد رشتهٔ الهیات شد. لیکن، در نیمهٔ آخرین سالش، برای تدریس در دبیرستان گراتس در بخش جنوبی اتریش به آنجا اعزام شد.

در فروردین ۹۷۳ کپلر معلم و ریاضیدان استان گردید. اندک زمانی پس از رسیدن به‌آنجا، تخیّل پر بارش به‌جائی راه یافت که او آن را کلید اسرارآمیز جهان می‌انگاشت. تا آن زمان هواخواه جدّی نظریهٔ کوپرنیک بود، و دربارهٔ کیهان‌شناسی خورشید مرکز مطالبی در توبینگن از میشائل مستلین محتاط مطالبی آموخته بود. تعجب کپلر از این نکته آغاز شد که «چرا تعداد و ابعاد و حرکات کرات بدین‌گونه بوده و نه به‌گونهٔ دیگر.» خطوط اصلی راه‌حل در حین یکی از سخنرانیها در کلاس درس به او الهام شد. اختراع وی عبارت بود از قرار دادن پنج جسم افلاطونی (هشت وجهی، بیست وجهی، دوازده وجهی،چهار وجهی و مکعب) در میان کرههای متوالی عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل. تعجب‌آور این بود که نمودار کپلر فواصل میان سیّاره‌ها، به استثنای مشتری، را با تقریب پنج درصد پیش‌بینی می‌کرد.

کپلر این دریافتها را در Mysterium cosmographicum (۱۵۹۶) خود منتشر کرد. چند وجهیهای کپلر هرقدر هم که ممکن است امروز خیالبافانه به‌نظر رسند، ولی ما باید زمینهٔ موقعیت انقلابیشان را در یاد داشته باشیم: کتاب وی نخستین رسالهٔ بعد از کتاب کوپرنیک بود که موضوع خورشید مرکزی را بی‌شرم و واهمه مطرح می‌کرد. کپلر نسخه‌هائی از کتابش را برای دانشمندان مختلف، از جمله گالیله و توکوبرانه، فرستاد. اگرچه اندیشهٔ اصلی کتاب Mysterium cosmographicum آمیخته به خطا بود، ولی کپلر به‌عنوان نخستین دانشمند، و تا زمان دکارت به‌عنوان تنها دانشمندی، که خواستار توضیحات فیزیکی برای پدیده‌های سماوی بود، خود را در صف اول اخترشناسان قرار داد. در تاریخ بندرت کتابی چنین نادرست تا این حد در تعیین مسیر آیندهٔ علم تأثیرگذار بوده است.

در سال ۹۷۹ بر آن شد که توکوبرانه را، که بتازگی در خارج از پراگ اقامت گزیده بود، ببیند. کپلر بسرعت به کیفیت رصدهای توکو پی برد، و در بهار ۹۸۰، با بکار بردن مداری مستدیر با رُبعی که بدلخواه قرار داده شده بود، طولهای جغرافیایی مریخ را با دقّتی بمراتب بیشتر از همهٔ پیشینیانش حساب کرد. کپلر به تلاش خود در برابر رازپوشی حسودانه‌ای که توکو براساس آن رصدهایش را پنهان نگاه می‌داشت ادامه داد تا آن که اخترشناس دانمارکی ناگهان بیمار شد و درگذشت (در مهر ۹۸۰). کپلر جمعاً فقط ده ماه با توکو کار کرده بود. امپراتور رودولف کپلر را به جانشینی توکو در

شغل ریاضیدان سلطنتی منصوب کرد، ولی با حقوقی بسیار کمتر که غالباً هم با تأخیر پرداخت می‌شد.

به‌دنبال درگذشت توکو، کپلر به‌کار دربارهٔ مدار مریخ خود ادامه داد، ولی دیری نکشید که دریافت که نمودارش از پیش‌بینی درست عرضهای جغرافیایی ناتوان است. کپلر در پی یافتن نمونه‌ای وحدت یافته و قابل قبول از نظر فیزیکی بود که برای تعیین دقیق طولها و عرضهای سیّاره‌ای بکار برده شود، اما با بهترین محاسبات باز خطاهائی در حدود ۸ دقیقه پیش می‌آمد. کپلر، که عقیده داشت که رصدهای توکو بهتر از آن بوده‌اند، مسیر تازه‌ای پیش‌گرفت، یعنی در اندیشه‌های آغازینش دربارهٔ نیروی محرک سیارات ــ نیروئی شبیه به مغناطیس ــ که از خورشید صادر می‌شدند، تجدیدنظر کرد. در این جریان وی کشف کرد که بُردار شعاع از خورشید به سیّاره عرصه‌های برابر را در زمانهای برابر طی می‌کند. این را امروزه قانون دوم وی می‌نامند، اگرچه این موضوع در هیچ‌جای کتاب بزرگش دربارهٔ مریخ بوضوح بیان نشده است.

اندک زمانی بعد کپلر متوجه شد که مدار مریخ مستدیر نیست، هرچند تعیین شکل دقیق آن دشوار بود. سرانجام، در ۹۸۴، دریافت که بیضی برای رصدها رضایتبخش است، و نهایتاً راهی هندسی برای انطباق بیضی با فرضیهٔ مغناطیسی خود پیدا کرد، و بدین‌ترتیب به چیزی دست یافت که اکنون آن را قانون اول او می‌نامیم، یعنی که مدارهای سیّاره‌ای بیضیهائی هستند که خورشید در یکی از کانونهایشان قرار گرفته است. چاپ اثرش با کندی پیش‌رفت، و کتاب Astronomia nova تا سال ۹۸۸ توزیع نگردید.

کپلر، همزمان با تحلیلش از مریخ، به پژوهشهای دیگر پرداخت. نواختری درخشان در سال ۹۸۳ پیدا شد؛ مجموعهٔ وسیع رصدها و اظهار نظرهای کپلر در اثری مشروح به‌نام De stella nova در ۱۶۰۶/۹۸۵ منتشر شد. در همان دوره کپلر با انتشار کتاب خود به‌نام Astronomiae pars optica در ۹۸۳ نورشناسی هندسی را بنیاد نهاد.

در فروردین ۹۸۹ کپلر نسخه‌ای از Sidereus nuncius، اثر گالیله، را همراه با درخواستی برای اظهار نظر دربارهٔ اکتشافات جدید تلسکوپی دریافت کرد. کپلر کتاب Disseratio cum Nuncio sidereo را بسرعت منتشر کرد. گالیله بعدها نوشت که «از شما تشکر می‌کنم زیرا نخستین و عملاً تنها کسی بودید که به گفته‌های من اعتماد کامل داشتید.»

کارهای اولیهٔ کپلر در نورشناسی امکان کار دربارهٔ نظریهٔ تلسکوپ را برای وی فراهم آورد، و او اثرش به‌نام Dioptrice (۱۶۱۱) را چند ماه پس از دریافت کتاب گالیله کامل کرد. در مرداد ۹۸۹ کپلر سرانجام موقعیتی یافت که تلسکوپی قرض بگیرد. مشتری را حدود دو هفته رصد کرد، و نتایج را در Narratio de Jovis Satellitibus (۱۶۱۱) انتشار داد. دیگر آثار کوتاه کپلر در دورهٔ اقامت در

پراگ عبارتند از Phaenomenon singulare (۱۶۰۹)، که در آن عبور احتمالی عطارد در ۹۸۶ را بنادرست گزارش داده بود؛ Tertius interveniens (۱۶۱۰)، اثری اخترشناختی که در آن کپلر به زبان آلمانی استدلال می‌کرد که «اختران سرشت ویژه‌ای را بر روح تحمیل نمی‌کنند بلکه اثر آن را بر روح می‌گذارند»؛ و Strena (۱۶۱۱)، که در آن وی در اندیشه شده بود که چرا دانه‌های برف شش ضلعی هستند.

در سال ۹۹۰ کپلر در نقطهٔ اوج زندگی علمی خود بود که دنیایش بناگهان فروریخت. دامنهٔ کشاکش جنگ سی‌ساله پراگ را در نوردید، و امپراتور رودولف مجبور به استعفا شد. فرزندان کپلر دچار آبله شدند، و همسرش درگذشت. با این حال تا زمان درگذشت رودولف که در اواخر ۹۹۰ فرا رسید کپلر مجاز به ترک پراگ نبود، و از آن پس تا چهارده سال در لینتس اقامت گزید.

این که کپلر، به‌علت غوطه‌ور شدن در دریائی از مشکلات شخصی، در فاصله ۹۹۱ تا ۹۹۵ اثری در اخترشناسی منتشر نکرد مایهٔ شگفتی نیست. با این حال کتاب Stereometria doliorum vinariorum (۱۶۱۵) و ترجمهٔ روان و عامه فهم آن به آلمانی، به‌نام Messekunst Archimedis (۱۶۱۶)، به‌عنوان خدمات مهمی در دوران قبل از تاریخ حساب جامع و فاضل بشمار می‌آیند.

او، پس از کامل کردن اثرش به‌نام Ephemerides مربوط به سال ۹۹۶، بررسیهای کیهان شناختی نسبتاً راکدش را احیا کرد، که اندکی بعد در Harmonice mundi (۱۶۱۹) انتشار یافتند. Harmonice، کتاب محبوب کپلر، که به‌صورت یک دیدگاه بزرگ کیهانی جلوه‌ـمی‌کند، با تار و پود علم، شعر، فلسفه، الهیات، و عرفان بافته شده است. کپلر نظریهٔ هماهنگی (هارمونی) خود را در چهار زمینه پرورد: هندسه، موسیقی، نجوم، و اخترشناسی. کپلر جوان، در Mysterium cosmographicum، به فاصله گذاریهای نسبتاً تقریبی که به سبب چند وجهیها و کُره‌های تو در توی وی پیش‌بینی شده بود اکتفا کرده بود؛ اما دیگر نمی‌توانست خطای آن را نادیده بگیرد. در جلد پنجم کتاب اخترشناسی Harmonice او سؤال کرد: خداوند نمونهٔ اصلی و اولیهٔ مبتنی بر اجسام منتظم را با کدام اصول ثانوی سازگار کرد؟ و جواب مورد انتظار را در هماهنگیهای آرام متناظر با سرعت سیّارات در نقطهٔ حضیض و اوجشان یافت. درحین بررسیهایش به رابطه‌ای برخورد که اکنون قانون سوم یا قانون هماهنگی نامیده می‌شود: نسبتی که میان زمانهای تناوبی هر دو سیّاره‌ای وجود دارد دقیقاً نسبت توان ۳/۲ فاصله‌های متوسط آنها است.

کپلر، تقریباً در همان زمان، طولانی‌ترین و مؤثرترین اثرش، Epitome astronomiae Copernicanae، را نوشت. نخستین کتاب از مجموعه‌ای سه‌تایی سرانجام در سال ۹۹۶ منتشر شد. در آن هنگام مادر هفتاد ساله‌اش متّهم به جادوگری شده بود، و این اخترشناس احساس کرد ملزم

است برای کمک به دفاع قانونی از وی به وورتمبرک بشتابد. جلد دوّم در ۹۹۹ منتشر شد. آخرین بخش در سال ۱۰۰۰، همزمان با تبرئهٔ مادرش در ماجرای جادوگری، کامل گردید. کپلر در Epitome تصمیم گرفت که یک «فیزیک سماوی» بوجود آورد که در آن به «هرگونه بُعد، حرکت، و نسبت در آسمانها» عللی نسبت داده شود. در آن کتاب، وی گفته‌ای دقیق برای قانون سطوح خود بیان کرد، نتیجه‌ای جالب توجه (ولی کاملاً نادرست) از قانون هماهنگی خود بیرون کشید، و برای آنچه اکنون معادلهٔ کپلر برای حل حرکت در مدار بیضوی نامیده می‌شود و در تنگنای قانون سطوح قرار دارد مقدمه‌ای آورد.

کپلر از نظر خودش کیهان‌شناس بود؛ و از دید کارفرمایانش، در دستگاه امپراتوری، ریاضیدانی بود که وظیفهٔ تکمیل جداول سیارات توکو براَئه را بر عهده گرفته بود. این کار به‌عنوان باری گران، و نیز به‌عنوان نشانه‌ای از مبارزطلبی، به گردنش آویخته شده بود، اما سرانجام اثرش به‌نام Tabulae Rudolphinae (۱۶۲۷) وسیلهٔ عمده‌ای شد برای شناختن کارهای سترگی که وی در اخترشناسی انجام داده بود. کپلر، اندک‌زمانی بعد از آن که لگاریتمهای تازه کشف شدهٔ نیپیئر را دید، به امکانات بالقوهٔ آنها پی‌برد. او جداول خاص خود را با روش هندسی جدیدی بوجود آورد. این جداول در کتاب Chilias logarithmorum (۱۶۲۴) انتشار یافتند، و کتاب مربوط به جداول رودولفی نخستین اثر علمی‌ای شد که از این وسیلهٔ جدید محاسبه در آن استفاده شده بود. جداول وی اصلاحات اعجاب‌آوری در روشهای گذشته بوجود آورده بودند؛ به‌عنوان مثال، پیشبینیهای مربوط به مریخ قبلاً تا حدود ۵ درجه خطا داشتند، ولی جداول کپلر درجهٔ خطا را به حدود ۱۰± دقیقه نسبت به موقعیت واقعی رساندند.

کپلر در سال ۱۰۰۷ به استخدام آلبرشت فون والنشتاین، فرمانده کل امپراتوری، که امیری مشتاق داشتنِ دسترسی نزدیک به یک اخترببین بود، درآمد. به‌این ترتیب، کپلر به زاگان، نقل مکان کرد، و سرانجامِ به‌چاپ داستان تخیلی علمی پیشتازانه‌ای باعنوان Somnium seu astrono mialunari مبادرت ورزید. کپلر، در چهارچوب سودای سفر به کرهٔ ماه، بحثی هوشمندانه درمورد نظام کوپرنیکی بوجود آورد.

کپلر در زاگان برای دریافت حقوق عقب‌افتاده‌اش بیهوده انتظار می‌کشید، و سرانجام برای مشورت دربارهٔ محل اقامت جدید به کنگرهٔ نظارت بر انتخابات رگنسبورک عزیمت کرد. چند روز پس از رسیدن به رگنسبورک، با تب شدید بیمار شد و درگذشت. دامادش، یاکوپ بارچ، از خانوادهٔ تهیدست و بینوا حمایت می‌کرد، ولی نتوانست ۱۲۶۹۴ گولدنی را که کپلر از خزانهٔ دولت طلب داشت وصول کند.

مشخصهٔ اندیشهٔ علمی کپلر درک عمیق وی از نظم و هماهنگی بود، که با دیدگاه الهی او درمورد «خداوند خالق» پیوند نزدیک خورده بود. او بسیار نوشت، ولی کیهان‌شناسی شخصی وی برای خردگرایان نسلهای بعدی جاذبهٔ چندانی نداشت. حضّار خیلی بیشتری انتظار مرد جدلی با استعدادتری را می‌کشیدند؛ این مرد گالیله بود، که به‌صورت عامل مؤثری در رساندن آذوقه به اخترشناسی جدید درآمد. با این حال، درنظر حرفه‌ایها، اصلاح کپلر در مواضع سیّارات گواه محکمی بر شایستگی نظام کوپرنیکی بود، و Principia ی نیوتن، هنگامی که به انجمن سلطنتی معرفی شد، به منزلهٔ «اثبات ریاضی فرضیهٔ کوپرنیک به‌صورتی که کپلر مطرح کرده است» توصیف شد. ک. م.

اعداد نجومی

هیچ‌کس مانند منجمها عمل پنجم ریاضی را این‌قدر وسیع بکار نمی‌برد. محققین فضای خارجی در هر قدم به اعداد بزرگ که دارای یکی دو رقم با معنی و تعداد زیاد صفرها می‌باشند برخورد می‌کنند. نمایش این اعداد بزرگ که بحق «اعداد نجومی» نام دارد به شکل معمولی مخصوصاً در اثنای محاسبات، مناسب نیست. مثلا فاصله تا سحاب آندرومد را اگر به شکل معمولی بنویسیم با این تعداد کیلومتر بیان می‌شود :

۹۵ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

در انجام محاسبات نجومی اغلب لازم می‌آید فواصل سماوی نه به کیلومتر یا واحدهای بزرگتری بلکه برحسب سانتی‌متر بیان شود. در اینصورت فاصله فوق با عددی که دارای پنج صفر دیگر می‌باشد بیان می‌شود :

۹۵ ۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

جرم ستارگان با اعداد باز هم بزرگتر بیان می‌شود بخصوص اگر بطوریکه در اغلب محاسبات ضرور است آنرا برحسب گرم بیان کنیم. جرم خورشید به گرم مساوی است به

۱۹۸۳ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

به‌آسانی می‌توانیم تصور کنیم که محاسبه با اعدادی اینچنین بزرگ چقدر مشکل و مقرون به اشتباه است. و اما در اینجا اعداد بزرگتر نجومی مدنظر گرفته نشده است.

عمل پنجم ریاضی، راه ساده‌ای برای حل این مشکل به محاسبه‌گران نشان می‌دهد. عدد یک که در پهلوی آن صفرها قرار دارند، توانی معین از ده میباشد :

$۱۰۰=۱۰^۲, ۱۰۰۰=۱۰^۳, ۱۰۰۰۰=۱۰^۴$ و غیره

اعداد بزرگی که قبلا ذکر شد می‌توانند به شکل زیر ارائه شوند :

عدد اول ...... ۹۵×۱۰^{۲۳}

عدد دوم ...... ۱۹۸۳×۱۰^{۳۰}

این کار نه تنها به‌خاطر صرفه‌جوئی جا صورت می‌گیرد بلکه برای آسانی محاسبه نیز می‌باشد.

هر گاه ضرور باشد تا این دو عدد در هم ضرب شوند کافی است که حاصل ضرب $۹۵ \times ۱۹۸۳ = ۱۸۸۳۸۵$ را دریافت نموده و مابعد آن، ضریب $۱۰^{۲۳+۳۰} = ۱۰^{۵۳}$ را بنویسیم:

$$۹۵ \times ۱۰^{۲۳} \times ۱۹۸۳ \times ۱۰^{۳۰} = ۱۸۸۳۸۵ \times ۱۰^{۵۳}$$

البته این مناسبتر از آنست که ابتدا عددی با ۲۳ صفر، بعد با ۳۰ صفر، و بالاخره با ۵۳ صفر بنویسیم، نه تنها مناسب‌تر بلکه مطمئن‌تر هم هست زیرا با نوشتن چندین صفر ممکن است یکی دو صفر آن از چشم بازماند و باعث نتیجهٔ غلط شود.

تمامی هوا چقدر وزن دارد؟

برای آنکه مطمئن شویم که محاسبات عملی اعداد بزرگ تا چه اندازه با استفاده از نمایش توانی آسان می‌شود، محاسبه زیر را انجام می‌دهیم: جرم کرهٔ زمین چند مرتبه از جرم تمام هوای اطراف آن بیشتر می‌باشد؟

بطوریکه می‌دانیم هوا در هر سانتی‌متر مربع سطح زمین با قوهٔ تقریباً یک کیلوگرم فشار وارد می‌کند. این، چنین معنی می‌دهد که وزن ستونی از جو با قاعدهٔ یک سانتی‌متر مربع برابر یک کیلوگرم است. پوشش جوی زمین از چنین ستونهای هوا تشکیل گردیده و تعداد آنها برابر تعداد سانتی‌متر مربعهای سطح سیاره ما بوده و وزن تمامی جو نیز برابر همین تعداد است. کتابهای راهنما نشان می‌دهند که سطح کرهٔ زمین به اندازهٔ ۵۱۰ میلیون کیلومتر مربع یعنی ۵۱×۱۰^{۷} کیلومتر مربع می‌باشد.

حال محاسبه می‌کنیم یک کیلومتر مربع شامل چند سانتی‌متر مربع می‌باشد. یک کیلومتر خطی که شامل ۱۰۰۰ متر، و هر متر شامل ۱۰۰ سانتی‌متر می‌باشد معادل $۱۰^{۵}$ سانتی‌متر است و یک کیلومتر مربع شامل $(۱۰^{۵})^{۲} = ۱۰^{۱۰}$ سانتی‌متر مربع می‌باشد. بنابراین، تمامی سطح کرهٔ زمین شامل

$$۵۱ \times ۱۰^{۷} \times ۱۰^{۱۰} = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷}$$

سانتی‌متر مربع می‌باشد. وزن جو زمین به کیلوگرم برابر مقدار فوق می‌باشد. اگر این مقدار را به تن مبدل نمائیم بدست می‌آوریم:

$$۵۱ \times ۱۰^{۱۷} : ۱۰۰۰ = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷} : ۱۰^{۳} = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷-۳} =$$

$$= ۵۱ \times ۱۰^{۱۴}$$

جرم کرهٔ زمین توسط عدد ۶×۱۰^{۲۱} تن بیان می‌شود.

برای اینکه تعیین نمائیم که سیارهٔ ما چند مرتبه از پوشش هوائی آن سنگین‌تر است عمل تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$۶ \times ۱۰^{۲۱} : ۵۱ \times ۱۰^{۱۴} \approx ۱۰^{۶}$$

یعنی جرم جو تقریباً یک میلیونیم جرم کرهٔ زمین را تشکیل می‌دهد.

سوختن بودن شعله و گرما

هرگاه شما از شیمیدانی بپرسید که چرا چوب و ذغال تنها در درجهٔ حرارت بالا می‌سوزد، برایتان می‌گوید که ترکیب کربن با اکسیژن در هر درجهٔ حرارت صورت می‌گیرد منتها در درجهٔ حرارتهای پائین، این فرایند بسیار بطی بوده (یعنی در فعل و انفعال تعداد بسیار کم ملکول شرکت دارد) و بنابر این از نظرمان محو می‌شود. قانونی که سرعت فعل و انفعالات شیمیائی را مشخص می‌سازد چنین حکم می‌کند: در اثر پائین رفتن درجهٔ حرارت به اندازهٔ 10°، سرعت فعل و انفعال (تعداد ملکولهای شرکت کننده در آن) دو برابر کم می‌شود.

مراتب فوق را درمورد فعل و انفعال ترکیب شدن چوب با اکسیژن یعنی در مورد فرایند سوختن چوب بکار می‌بریم. فرض کنیم در حرارت 6000° در هر ثانیه یک گرم چوب بسوزد. در چه مدت زمانی یک گرم چوب در حرارت ۲۰ خواهد سوخت؟ ما حالا می‌دانیم که در درجهٔ حرارتی که $580 = 58\times 10$ درجه پائین‌تر باشد سرعت فعل و انفعال

2^{58} مرتبه

کم‌تر است یعنی یک گرم چوب در مدت 2^{58} ثانیه می‌سوزد.

این فاصلهٔ زمان برابر چند سال خواهد بود؟ ما می‌توانیم این را به‌صورت تقریبی بدون اینکه عمل ضرب در عدد ۲ را ۵۷ مرتبه انجام دهیم و بدون استفاده از جدول لگاریتم حساب کنیم. نظر به این که

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3$$

لذا

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4}\times 2^{60} = \frac{1}{4}\times (2^{10})^6 \approx$$

$$\approx \frac{1}{4}\times 10^{18}$$

یعنی تقریباً یک چهارم کوینتیلیون ثانیه. یک سال برابر ۳۰ میلیون یعنی 3×10^7 ثانیه می‌باشد

لذا
$$(\frac{1}{4}\times 10^{18}) : (3\times 10^7) = \frac{1}{12}\times 10^{11} \approx 10^{10}$$

ده میلیارد سال! یک گرم چوب بدون شعله و گرما طی این مدت زمان خواهد سوخت.

بدین‌ترتیب چوب و زغال در درجهٔ حرارت عادی نیز، بدون آنکه آنها را آتش بزنند، می‌سوزند. اختراع وسایل تولید آتش، این فرایند بسیار بطی را میلیاردها مرتبه سرعت بخشیده است.

بخش ۳ ــ نمایش اعشاری ساده و متناوب

جلسه ۹ ــ نمایش اعشاری اعداد گویا

فعالیت مرتب کردن اعداد گویا و فعالیت نمایش اعشاری

اهداف فعالیت: نمایش اعشاری ساده و متناوب، ترجمه از یک زبان نمادین به زبان دیگر، تقریب، مرتب کردن کسرها از روی نمایش اعشاری ساده‌تر است، تقسیم اعشاری.

سؤالهایی که می‌توانید پرسید: برای مرتب کردن ۳ عددگویا چند مقایسه لازم است؟ چرا برای چندین عددگویا تعداد مقایسه‌ها بسیار زیاد می‌شود؟ برای اعدادگویا چه نمایشهای مختلفی می‌شناسید؟ در کدامیک از این نمایشها مقایسه اعداد ساده‌تر است؟ آیا می‌توان هر کسر را به‌صورت اعشاری نمایش داد؟ آیا حاصل تقسیم دقیقاً برابر کسر است؟ چکار می‌توان کرد که نمایش اعشاری خطا نداشته باشد؟ از بین اعداد گویا کدامها نمایش اعشاری ساده دارند و کدامها نمایش اعشاری متناوب؟ آیا هر عددی که نمایش اعشاری ساده یا متناوب داشته باشد حتماً عددی گویاست؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف محاسبات را کاملاً به عهدهٔ دانش‌آموزان بگذارید اما آنان را هدایت کنید و به یافته‌های آنان نظم ببخشید. اگر کلاس نمی‌تواند یکی از مراحل را انجام دهد آنها را راهنمایی کنید.

در یک کلاس متوسط با پرسش سؤالات کلاس را به سوی مقصود راهنمایی کنید. ابتکار عمل را بدست دانش‌آموزان بدهید. به آنها بیاموزید که به نظرات یکدیگر احترام بگذارند تا نظم کلاس حفظ شود.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با مسئله تنها بگذارید و به آنها یاد بدهید تا برای فهم بهتر مسئله باید از یکدیگر کمک بگیرند. اینکه کدام اعداد نمایش اعشاری ساده و کدام اعداد نمایش اعشاری متناوب دارند را مورد سؤال قرار دهید. دانش‌آموزان برجسته را مدنظر قرار دهید و از شخصیت حل مسئله آنان یادداشت برداری کنید. جمع‌آوری این اطلاعات کمک می‌کند یک رده‌بندی بومی از سیستمهای یادگیری دانش‌آموزان بدست آورید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «اعداد گویا و گنگ» نوشته ایوان نیون

خود را بیازماییم

برای محاسبه با اعداد اعشاری با دورهٔ گردش اول آنها را به‌صورت نمایش گویا بنویسید و پس از انجام محاسبات دوباره عدد گویای حاصل را به نمایش اعشاری درآورید.

بخش ۳ـ نمایش اعشاری ساده و متناوب

جلسه ۱۰ـ نمایش اعشاری $\sqrt{2}$

فعالیت نمایش اعشاری $\sqrt{2}$ و فعالیت $\sqrt{2}$ گنگ است

اهداف فعالیت: خلاقیت در ترجمه از یک زبان نمادین به زبان دیگر، اعداد اعشاری که نه ساده هستند و نه متناوب کار با ماشین‌حساب، تقریب زدن، اعداد گنگ، اعداد مربع کامل، تجزیه به عوامل اوّل، برهان خلف شناخت اعداد گنگ در زبان نمایش اعشاری

سؤالهایی که می‌توان پرسید: از ماشین‌حساب کمک بگیرید. فکر می‌کنید ماشین حساب چگونه $\sqrt{2}$ را محاسبه می‌کند؟ آیا ماشین حساب مقدار $\sqrt{2}$ را تقریب می‌زند یا دقیقاً محاسبه می‌کند. آیا با رسم شکل می‌توانید $\sqrt{2}$ را تا یک رقم اعشار تقریب بزنید؟ اگر بخواهید تقریب بهتری داشته باشید چه باید بکنید؟ اگر $\sqrt{2}$ عدد گویا بود نمایش اعشاری ساده یا متناوب داشت. آیا چنین است؟ آیا می‌توان $\sqrt{2}$ را با اعداد گویا تقریب زد؟ اگر $\sqrt{2}$ گویا باشد با یک کسر به شکل $\frac{p}{q}$ که صورت و مخرج آن طبیعی هستند برابر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟ آیا این فرض مشکلی ایجاد می‌کند؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف قسمتی از مسئله را با پرسش و پاسخ و درگیر نگه داشتن دانش‌آموزان خودتان حل کنید و ادامه آن را به دانش‌آموزان واگذار نمایید. آنها را تشویق کنید که خلاقیت خود را در تقریب زدن به‌کار بیاندازند. فعالیت $\sqrt{2}$ گنگ است را خودتان با مشارکت دانش‌آموزان در کلاس پیاده کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بسپارید. اما وقت را از دست ندهید. اگر دیدید که به حل مسئله نزدیک نمی‌شوند آنها را راهنمایی کنید و با کمک دانش‌آموزان مسئله را حل کنید. امّا فرصت کلنجار رفتن با مسئله را از دانش‌آموزان نگیرید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان باید بتوانند خودشان یک تقریب اعشاری از $\sqrt{2}$ بدست دهند کلاس را با مسئله گنگ بودن $\sqrt{2}$ به حال خود بگذارید و به آنها فرهنگ نقد آراء یکدیگر را بیاموزید. اگر کلاس موفق به حل مسئله نشد خودتان آن را در پایان کلاس حل کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «آنالیز ریاضی» نوشته غلامحسین مصاحب

بخش ۴ـ اعداد گویا و گنگ

جلسه ۱۱ـ اعداد گنگ

فعالیت فراوانی اعداد گویا و فعالیت جمع با اعداد گنگ

اهداف فعالیت: درک فراوانی اعدادگویا، هر عدد را می‌توان با اعداد گویا تقریب زد، فراوانی اعداد گنگ، هر عدد را می‌توان با اعداد گنگ تقریب زد، مثال نقض، اعداد رادیکالی، بکاربردن یک استدلال در موقعیتهای مشابه، درک بهتر ساختار جبری اعداد حقیقی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ یک عدد گویا پیدا کنید. آیا می‌توانید فرمولی ارائه کنید که بین هر دو عدد گویا عددی گویا بسازد؟ مثال بزنید و با کمک آن حدس بزنید. آیا می‌توانید بین دو عدد گویا یک عدد گنگ پیدا کنید؟ آیا می‌توانید بین دو عدد گنگ یک عدد گویا پیدا کنید؟ آیا می‌توانید بین دو عدد گنگ یک عدد گنگ بیابید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت اعداد گویا را به دانش‌آموزان بسپارید و فعالیت جمع با اعداد گنگ را خودتان به‌همراهی دانش‌آموزان در کلاس انجام دهید. با پرسش سؤالات به‌جا ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به‌دست دانش‌آموزان بدهید. آنان را به بحث وادارید و خودتان درصورت لزوم آنها را راهنمایی کنید. سعی کنید دانش‌آموزان خودشان به اشتباهات خود پی‌ببرند. خلاقیت دانش‌آموزان را مورد تشویق قرار دهید.

در یک کلاس قوی هر دو فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و از آنها بخواهید به تمام سؤالات مطرح شده در بالا پاسخ دهند. این سؤال را که اعدادگویا بیشترند یا اعداد گنگ در کلاس به بحث بگذارید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «آنالیز ریاضی» نوشتهٔ غلامحسین مصاحب

بخش ۴ــ اعداد گویا و گنگ

جلسه ۱۲ــ اعداد رادیکالی

فعالیت محاسبه با اعداد رادیکالی و فعالیت مقایسهٔ اعداد رادیکالی

اهداف فعالیت: درک فراوانی اعداد رادیکالی، حساب اعداد رادیکالی، تقریب زدن به کمک ماشین‌حساب، مقایسه اعداد رادیکالی، کار با جبر نامساویها، طول ضلع مربع جذر مساحت آن است، محاسبه با اعداد رادیکالی در فضای اشکال هندسی.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: برای مقایسه اعداد رادیکالی آنها را با نماد اعشاری نمایش دهید. آیا می‌توان به روش دیگری اعداد رادیکالی را محاسبه نمود؟ اگر می‌توانید طولی برابر با حاصلضرب دو عدد رادیکالی پیدا کنید. همین کار را برای خارج‌قسمت آنها انجام دهید. می‌توانید از روشهای عددی یا هندسی کمک بگیرید. از ماشین‌حساب کمک بگیرید. آیا می‌توانید روش کار ماشین‌حساب را حدس بزنید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف هر دو فعالیت را با پرسش و پاسخ و درگیرکردن دانش‌آموزان خودتان انجام دهید. اشتباهات محاسباتی رایج را به دانش‌آموزان گوشزد کنید. برای دانش‌آموزان مثالهای زیادی حل کنید.

در یک کلاس متوسط متناسب با توانایی کلاس یکی از فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را با سؤالات راهنما هدایت کنید. فعالیت دیگر را خودتان اجرا کنید ولی به دانش‌آموزان اجازه بدهید ایده بدهند و نظرات خود را ابراز کنند.

در یک کلاس قوی هر دو فعالیت را به دانش‌آموزان واگذار کنید. زمان را از دست ندهید اگر نتوانستند در زمان لازم یک فعالیت را انجام دهند خودتان فعالیت را حل کنید. ولی نکاتی را که خود دانش‌آموزان به آن رسیده‌اند را به آنها گوشزد کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «آنالیز ریاضی» نوشته غلامحسین مصاحب

بخش ۵ـ محور اعداد حقیقی

جلسه ۱۳ـ مدلسازی اعداد حقیقی و کمیتهای برداری

فعالیت دونده، فعالیت مدلسازی اعداد و فعالیت کمیتهای برداری

اهداف فعالیت: پایه‌گذاری مفاهیم مدلسازی، آشنایی با کمیتهای عددی و برداری، جمع بردارها و تجزیه بردارها، تنوع مدلهای ریاضی برای یک پدیده یا محور اعداد و قرار دادن اعداد روی آن، ارتباط ریاضی با زندگی روزمره.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: محور اعداد را با نمایش اعشاری اعداد به‌عنوان دو مدل برای نمایش اعداد مقایسه نمایید. سرعت حرکت دونده با کدام مدل بهتر قابل نمایش است؟ جمع و تفریق اعداد با کمک کدام مدل بهتر قابل نمایش است؟ جمع و تفریق با کمک بردارها روی محور اعداد را درنظر بگیرید و با کمک آن مدلی برای اعداد حقیقی بسازید. چه کمیتهایی اندازه دارند ولی اندازهٔ آنها مستقیماً با هم جمع نمی‌شود؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت دونده را خودشان اجرا کنند. سپس با کمک چیزهایی که به‌دست آورده‌اند فعالیت مدلسازی اعداد و کمیتهای برداری را در سطح فهم آنان در کلاس اجرا کنید. مجبور نیستید همهٔ نکات را مطرح کنید. توجه داشته باشید که ذهن دانش‌آموزان را برای درک مفهوم مدلسازی آماده می‌کنید. اما برای درک این مفهوم دانش‌آموزان یک سال فرصت دارند.

در یک کلاس متوسط فعالیت دونده و فعالیت کمیتهای برداری را به دانش‌آموزان بسپارید ولی فعالیت مدل برداری برای اعداد حقیقی را خودتان انجام دهید. نکات مهم را به آنان گوشزد کنید. بین ریاضیات و زندگی روزمره ارتباط برقرار کنید.

در یک کلاس قوی فعالیت دونده را در خانه انجام دهند. فعالیت مدلسازی اعداد حقیقی و فعالیت کمیتهای برداری را در کلاس به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را با سؤالات هدایت‌کننده راهنمایی کنید و نکات مهم درس را در میان بحث به آنان گوشزد کنید. دانش‌آموزان را به بحث و اظهارنظر وادار کنید. زمان را از دست ندهید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «فیزیک» نوشته هالیدی ورزنیک

بخش ۵ ـ محور اعداد حقیقی

جلسه ۱۴ــ قدرمطلق

فعالیتهای قدرمطلق

اهداف فعالیت: آشنایی با استدلال مجرد جبری، آشنایی با ناوردای طول، آشنایی با استنتاج منطقی، حل معادلات قدرمطلقی، آشنایی با نامساویها، مفهوم اثبات، ورود به فضای جبر مجرد، کار با متغیرها به‌طور نمادین، استدلال نمادین، محاسبات نمادین.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: برای a مثبت |a| برابر با چیست؟ برای a منفی |a| برابر با چیست؟ حالتهای مختلف a را درنظر بگیرید و هر یک را جداگانه بررسی کنید. در هر استدلال مشخص کنید در هر یک از مراحل از چه دانسته‌هایی استفاده می‌کنید. صحت استدلال خود را برای حالت خاص یک مثال بررسی کنید. حکم موردنظر را در حالت خاص یک مثال بررسی کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف از بررسی حکم در حالت خاص یک عدد شروع کنید. چند مثال متنوع بزنید و بپرسید که چگونه می‌توان چندین مثال را با هم امتحان کرد. پابه‌پای دانش‌آموزان جلو بروید و به آنها کمک کنید تا مهارت استدلال کردن را بیاموزند.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بسپارید ولی خودتان با سؤالات راهنما کلاس را به سوی مقصود هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش آموزان را با فعالیتها به حال خود بگذارید. آنها را به بحث و نقد نظرات یکدیگر وادارید. در پایان اشتباهات آنها را به ایشان گوشزد کنید و نکات مهمی را که به آن رسیده‌اند جمع‌بندی کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «آنالیز ریاضی» نوشته غلامحسین مصاحب

بخش ۵ـ محور اعداد حقیقی

جلسه ۱۵ـ استدلال جبری

فعالیتهای نامساوی جبری

اهداف فعالیت: آشنایی با استدلال مجرد جبری، آشنایی با استنتاج منطقی، کار با نامساویها، استدلال نمادین، محاسبات نمادین، کار با متغیرها به‌طور نمادین، ورود به فضای جبر مجرد.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: آیا برای جمع و ضرب اعداد حقیقی قوانین دیگری می‌شناسید؟ برای نامساویها چطور؟ آیا می‌توانید این قوانین را با کمک قوانین ذکر شده در کتاب اثبات کنید؟ از محور اعداد استفاده کنید و شهود هندسی برای مسئله بسازید. حکم را در حالت خاص یک مثال بررسی کنید. استدلال را در حالت خاص یک مثال بررسی کنید. در هر یک از مراحل استنتاج بگویید از چه قانونی استفاده می‌کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف چون دومین جلسه‌ای است که با استدلال جبری کار می‌کنند ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بدهید. ولی این کار را با احتیاط انجام دهید. صحت استدلالهای آنها را نقد کنید ولی آنها را به اظهارنظر تشویق کنید.

در یک کلاس متوسط دانش‌آموزان را با فعالیتها به حال خود بگذارید. آنها را به بحث و نقد نظرات یکدیگر وادارید. ولی این کار را با احتیاط انجام دهید. در پایان اشتباهات آنها را به ایشان گوشزد کنید و نکات مهمی را که به آن رسیده‌اند جمع‌آوری کنید.

در یک کلاس قوی از دانش‌آموزان تنوع استدلال بخواهید. حکم را به زبان جبری، هندسی و عددی ترجمه کنید و آنها را با یکدیگر مقایسه کنید. به دانش‌آموزان با کمک تنوع استدلالها بیاموزید که استدلال برای رساندن ما به حقیقت است ولی خودش اصالت ذاتی ندارد.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «آنالیز ریاضی» نوشته غلامحسین مصاحب

بخش ۶ـ اعداد را بسازیم

جلسه ۱۶ـ رسم اعداد با خط‌کش و پرگار

فعالیت رسم اعداد روی محور اعداد

اهداف فعالیت: برقراری ارتباط بین x مجهول و x متغیر، مهارت در کاربرد پرگار، مهارت در ترسیمهای هندسی، آشنایی با ریاضیات ساختنی، مقدمات تفکر الگوریتمی، تنوع الگوریتمهای اجرا، درک مفهوم رسم با خط‌کش و پرگار.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: چرا به مشخص کردن واحد روی محور احتیاج داریم؟ اعداد حقیقی را که می‌شناسید نام ببرید. آیا می‌توانید پاره‌خطی به این طولها روی محور رسم کنید؟ از آن‌جا که لازم است رسم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار انجام شود به قضیه‌های هندسه‌ای که در راهنمایی خوانده‌اید فکر کنید. کدام‌یک به نسبت طولها مربوطند؟ از فیثاغورس کمک بگیرید و ببینید چه اعدادی را می‌توانید رسم کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف باید دقت و حوصله بسیاری به خرج داد تا دانش‌آموزان یاد بگیرند تک‌تک مراحل هر مسئله را با خط‌کش و پرگار انجام دهند. مثلاً اگر خطی موازی خطی داده شده از نقطه‌ای می‌گذرند این کار را با خط‌کش و پرگار دقیق انجام دهند. راه‌حل را خودتان پیاده کنید اما روش اجرا را به دانش‌آموزان واگذارید.

در یک کلاس متوسط ابتکار حل مسئله را به دانش‌آموزان بدهید و در صورت لزوم آنها را با سؤالات راهنما هدایت کنید. اما اشتباه دانش‌آموزان را شدیداً نقد کنید و بر انجام تمام مراحل مسئله با خط‌کش و پرگار تأکید کنید. تفکر الگوریتمی را رواج دهید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان قادرند مسئله را حل کنند اما نمی‌دانند رسم با خط‌کش و پرگار یعنی چه! با انجام یک مثال عملی دانش‌آموزان را با مسئله تنها بگذارید. پس از هر مرحله راه‌حلهای آنها را جمع‌بندی کنید و اشتباهات آنان را گوشزد کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به رسمهای هندسی کتابهای ریاضی دورهٔ راهنمایی.

زندگینامهٔ علمی ارشمیدس

(ت. سیراکوزه، حدود ۹۰۸ ق هـ / ۲۸۷ ق م ؛ و. سیراکوزه، ۸۳۳ ق هـ / ۲۱۲ ق م)، ریاضیّات، مکانیک.

جزئیات اندکی از زندگانی ارشمیدس برجای مانده است : پدرش فیدیاسِ اخترشناس بود ؛ شاید با شاه هیئِرون دوم فرمانروای سیراکوزه، که کتاب «ریگشماری» را به گلون، پسر او، اهدا کرد، خویشاوندی داشت ؛ تقریباً شکی نیست که از اسکندریه دیدار کرده، و بی‌تردید در آن‌جا نزد جانشینان اقلیدس به تحصیل پرداخته است ؛ و بیش‌تر آثارش را در سیراکوزه تألیف نمود و هم در آنجا، به‌هنگام تصرف شهر به‌دست رومیان، رخت از جهان بربست. تاریخ تولد ارشمیدس از نکته‌ای استنباط می‌شود که یوئانس تست‌سز [tsetsez]، شاعر و مورّخ بیزانسی سدهٔ دوازدهم میلادی، آورده و گفته است که ارشمیدس «تا پیرانه سر در هندسه کار می‌کرد، و بعد از هفتاد و پنج سالگی زنده بود». اکثر گزارشهای مربوط به مرگ ارشمیدس در این نکته همداستانند که او به‌دست سربازی رومی کشته شد و وی را چنان تصویر می‌کنند که در آن لحظه سرگرم ریاضیات بوده است.

شهرت ارشمیدس در دنیای باستان بر پایهٔ اختراع یک سلسله ابزارهای مکانیکی و نیز براساس آثار ریاضی او استوار بود. او حلزون آبی، یعنی ابزار مارپیچ مانندی اختراع کرد برای بالا کشیدن آب به منظور آبیاری ؛ پیچ بی‌انتهایی که برای به آب انداختن کشتی به‌کار برده می‌شد ؛ و قرقرهٔ مرکب. داستانی که در اصالتش تردید است و غالباً نقل می‌شود داستانی است منقول از ویتروویوس که می‌گوید هیئِرون از ارشمیدس خواست که تحقیق کند که آیا تاجی یا جقّه‌ای از زر ناب است، و ارشمیدس هنگامی به راه‌حلی دست یافت که در لگن گرمابه‌ای نشسته بود.

آثار ریاضی ارشمیدس را می‌توان با مسامحه به سه گروه تقسیم کرد. گروه نخست شامل آثاری است که هدف عمده‌شان اثبات قضایای مربوط به سطحها و حجمهای شکلهایی است که با خطوط و سطوح منحنی محصور می‌شوند : «دربارهٔ کُره و استوانه» ؛ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» ؛ «دربارهٔ شبه مخروطات و شبه کره‌ها» ؛ «دربارهٔ مارپیچها» ؛ و «دربارهٔ تربیع سهمی»، که، با توجّه به گزاره‌های ۱ تا ۱۷ آن، به آثار گروه دوم نیز تعلق دارد. دستهٔ دوم شامل آثاری است که به تحلیل هندسی مسائل مربوط به تعادل و تعادل آبگونه‌ها و استفاده از مبحث تعادل در هندسه می‌انجامند : «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها» ؛ «دربارهٔ اجسام شناور» ؛ «دربارهٔ روش قضایای مکانیکی» ؛ و گزاره‌های یاد شده از «دربارهٔ تربیع سهمی». گروه سوم را آثار متفرقهٔ ریاضی تشکیل می‌دهند : «ریگشماری» ؛ («مسألهٔ چهارپایان») ؛ و «استوماخیون») که به‌صورت قطعه‌قطعه است. نویسندگان یونانی به چندین اثر دیگر اشاره کرده‌اند که برجای نمانده‌اند. آثار دیگری از جانب مؤلفان عرب به ارشمیدس نسبت داده شده‌اند، و، اکثر آنها، به‌صورت نسخه‌های خطی عربی موجودند : «مفروضات» یا Liber assumptorum (که مسلماً به‌صورت کنونی متعلق به ارشمیدس نیست زیرا که در اثباتها به نام او اشاره می‌شود) ؛ «دربارهٔ ساعتهای آبی» ؛ «دربارهٔ دایره‌های مماس بر هم» ؛ «دربارهٔ خطهای موازی» ؛ («دربارهٔ مثلّثها» ؛ «دربارهٔ خواص مثلث

قائم‌الزّاویه»، «دربارهٔ داده‌ها» ؛ «دربارهٔ تقسیم دایره به هفت جزء برابر»).

ارشمیدس، در اثبات قضایای مربوط به سطح یا حجم شکلهای محصور به خطوط یا سطوح منحنی، از آن‌چه به لِم ارشمیدس معروف است یا لمی شبیه به آن استفاده می‌کند، همراه با شیوهٔ اثباتی که عموماً «روش افنا» نامیده می‌شود، و ابزار مخصوص یونانی دیگری مانند «نئوسیس»، و اصولی که از علم تعادل گرفته شده‌اند.

ارشمیدس به اثبات تعداد زیادی از قضیه‌هایی پرداخت که به‌صورت جزئی اساسی از هندسه درآمده‌اند. «مساحت کُره مساوی است با چهار برابر مساحت دایرهٔ عظیمهٔ آن»، که معادل است با فرمول جدید $S = ۴\pi r^۲$. «حجم کره برابر است با چهار برابر حجم مخروطی که قاعده‌اش برابر با دایرهٔ عظیمهٔ کره و ارتفاعش برابر با شعاع کره باشد». فرع این گزاره، که «حجم استوانه‌ای که قاعده‌اش دایرهٔ عظیمهٔ کره و ارتفاعش برابر با قطر کره باشد ۳/۲ حجم کره و سطح آن به‌علاوهٔ قاعده‌هایش ۳/۲ سطح کره است»، به گفتهٔ کیکرو (یا سیسرون)، بر سنگ گور ارشمیدس نقش شده است. معادل جدید گزارهٔ ۳۴ این فرمول است : $V = ۴ / ۳\pi r^۳$. «هر قطعهٔ قائم یا مایل از یک سهمیگون دوّار نیم برابر بزرگتر از مخروط یا قطعه‌ای از مخروطی است که بر همان قاعده و همان محور باشد.» او همچنین از طریق پژوهشهایش دربارهٔ آن‌چه امروزه به مارپیچ ارشمیدس معروف است توانست نه‌تنها تربیع آنها را تحقق بخشد بلکه مقدمات تبدیل قطعی محیط دایره به خط راست را نیز فراهم آورد. درنتیجهٔ این امر، ساختن مثلث قائم‌الزاویه‌ای میسر می‌شد برابر با دایره‌ای که موضوع کتاب «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» است.

ارشمیدس از شیوه‌هایی مربوط به علم تعادل (در حل مسائل هندسی و اثبات قضایا) استفاده می‌کرد که در «دربارهٔ تربیع سهمی» و نیز در «دربارهٔ روش» واضحند. او در اثر اخیر از فرض کاملاً تازه‌ای استفاده می‌کند، و آن این‌که هر شکل مسطّح را می‌توان به‌عنوان مجموع اجزای خطّی آن (که به احتمال زیاد از لحاظ تعداد نامتناهی است) انگاشت و هر شکل مجسّم (فضایی) را می‌توان به منزلهٔ مجموع اجزای مسطّح آن به‌شمار آورد. ارشمیدس در محاسبات عددی نیز گشت و گذارهای مهمی کرد، هر چند روشهای او به هیچ‌وجه روشن نیستند. در «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» نسبت محیط دایره به قطر را (که تا آغاز دوران جدید هنوز π نامیده نمی‌شد) حساب کرد که کوچک‌تر از $۳\frac{۱}{۷}$ و بزرگ‌تر از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ است. در جریان این اثبات ارشمیدس نشان داد که روش دقیقی برای تخمین ریشه‌های اعداد بزرگ دارد. این نکته نیز جالب توجه است که در این محاسبه مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$ را به‌دست داد. ارشمیدس، در رساله‌ای معروف به «ریگشماری»، دستگاهی برای نمایش عددهای بزرگ عرضه

کرد، دستگاهی که به او امکان می‌دهد که عدد p^{10^8} را بیان کند، که در آن خود P برابر است با $(10^8)^{10^8}$. او این دستگاه را بدان منظور اختراع کرد که اعداد را به نوعی بیان کند که، به گفتهٔ خودش، «نه‌تنها از تعداد ریگهای توده‌ای در ریگ به بزرگی زمین تجاوز کند...، بلکه از تودهٔ ریگی که از نظر بزرگی برابر با جهان باشد نیز بیشتر شود».

ارشمیدس به‌عنوان کسی شهره است که نخستین بار هندسه را با موفقیّت در علم تعادل و تعادل آبگونه‌ها به‌کار برد. در «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها»ی خود قانون اهرم را به شیوه‌ای صرفاً هندسی اثبات کرد. در اثبات گزارهٔ ۶، «مقدارهای اندازه‌پذیر در فاصله‌هائی که بر نسبت عکس وزنهایشان باشند درحال تعادلند»، منظور اصلی او عبارت بود از تحویل حالت کلیِ وزنهای نامساوی در فواصلی بر نسبت عکس به حالت خاصِ وزنهای مساوی در فواصل مساوی.

در کتاب «دربارهٔ اجسام شناور»، تأکید باز هم بر تحلیل هندسی است. در کتاب یکم، مفهوم تقریباً مبهمی از فشار آبگونه‌ها به منزلهٔ اصل موضوع بنیادی ارشمیدس ارائه شده است. ارشمیدس، با استفاده از روشهای خود، توانست دربارهٔ غوطه‌وری نسبی جسمهای کم‌تر چگال از، همان اندازه چگال که، و چگال‌تر از سیّالی که در آن قرار می‌گیرند گزارههایی تنظیم نماید. گزارهٔ ۷، مربوط به جسمهای چگال‌تر از سیّال، بیان‌کنندهٔ اصلی است که به‌اصطلاح اصل ارشمیدس گفته می‌شود. این نکته معمولاً با عباراتی مختصرتر این‌گونه بیان می‌شود: چنین اجسامی در سیّالها به اندازهٔ وزن سیّالی که جابه‌جا می‌شود سبک‌تر می‌گردند. در کتاب دوم، ارشمیدس به آن فرض بنیادینی بازمی‌گردد که در کتابهای «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها»، «دربارهٔ تربیع سهمی»، و «دربارهٔ روش» یافت می‌شود، یعنی به این فرض که وزنهای قائم را باید موازی انگاشت، نه به صورتی که در مرکز کرهٔ سیّال به یکدیگر می‌گرایند.

آثار ارشمیدس در دنیای قدیم چندان زیاد شناخته نبودند. شناخت کنونی ما از آثار او تا حد زیاد بستگی دارد به علاقه‌ای که از قرن ششم تا قرن دهم میلادی در قسطنطنیه نسبت به آنها ابراز شد. با همّت ائوتوکیوس آسکالونی، که در ربع سوّم سدهٔ دوّم ق هـ/اواخر قرن پنجم میلادی زاده شد و در اسکندریه تحصیل کرد، تاریخچهٔ چاپ مجموعه‌ای از آثار ارشمیدس آغاز شده است. ائوتوکیوس بر سه اثر ارشمیدس شرح نوشت: «دربارهٔ کُره و استوانه»، «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره»، و «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها». ایزیدوروس میلتوسی و آنتمیوس ترالسی، که معماران [امپراتور] یوستینیان در ساختن هاگیاسوفیا (ایاصوفیهٔ کنونی) قسطنطنیه بودند، آثار ارشمیدس و شروح ائوتوکیوس را هم تحصیل و هم تدریس کرده بودند. گویا ایزیدوروس بود که سبب چاپ نخستین مجموعهٔ دست‌کم سه اثری که ائوتوکیوس شرح کرده بود و نیز خود شروح شد. به‌نظر می‌رسد که بعدها مؤلفان بیزانسی

به‌تدریج آثار دیگری را بر این نخستین مجموعه افزوده باشند تا آن‌که در قرن نهم میلادی مصلح فرهنگی، لئون تسالونیکایی، تألیفی را که نمودگر آن نسخهٔ خطی یونانی است که (با پذیرفتن آن‌چه ی.ی. هایبرگ ناشر تعیین کرده است) نسخه خطّی A نامیده می‌شود پدید آورد. نسخهٔ خطی A همهٔ آن آثار یونانی را که اکنون می‌شناسیم دربر دارد جز «دربارهٔ اجسام شناور»، «دربارهٔ روش»، «استوماخیون»، و «مسألهٔ چهارپایان» را. این یکی از دو نسخهٔ خطی‌ای بود که در ۶۴۸ که ویلیام موربکه‌ای به ترجمه‌های لاتینی خود می‌پرداخت در دسترس وی قرار داشتند. این اثر، به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم منبع همهٔ نسخه‌های دورهٔ رنسانس کارهای ارشمیدس بود. نسخهٔ خطی بیزانسی دیگری که با B مشخص شده است فقط آثار مکانیکی: «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها»، «دربارهٔ تربیع سهمی»، و «دربارهٔ اجسام شناور» را شامل می‌شد. این نسخه نیز در دسترس موربکه‌ای قرار داشت. اما پس از اشاره‌ای که در مرجعی متعلق به اوایل قرن چهاردهم میلادی به آن شده ناپدید گردیده است. و بالاخره، می‌توانیم از نسخهٔ خطی بیزانسی سومی، با علامت C، یاد کنیم، نسخهٔ از نو نوشته شده‌ای که بخشهای ارشمیدسی آن با خطی مربوط به قرن دهم میلادی است. این نسخه مشتمل است بر بخشهای زیادی از «دربارهٔ کره و استوانه»، تقریباً همهٔ «دربارهٔ مارپیچها»، بخشهایی از «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» و «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها»، و بخشی از «استوماخیون». مهم‌تر از همه آن‌که این نسخه قسمت اعظم متن یونانی «دربارهٔ اجسام شناور» (متنی که پس از ناپدیدی نسخهٔ خطی B به زبان یونانی در دسترس نبود) و بخش زیادی از «دربارهٔ روش قضایای مکانیکی» را، که تا آن زمان فقط به‌طور افواهی شناخته شده بود، دربر دارد.

تقریباً در همان زمانی که آثار ارشمیدس در بیزانس قرن سوم/قرن نهم مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته بود، وی در میان اعراب نیز شأن و مقامی پیدا کرد. آثار ارشمیدس به زبان عربی مشتمل بود بر (۱) «دربارهٔ کره و استوانه» و دست‌کم بخشی از شرح اتوتوکیوس بر آن. به‌نظر می‌رسد که این اثر به‌صورت ترجمه‌ای ضعیف مربوط به اواخر قرن دوم / اوایل قرن نهم وجود داشته و در نیمه دوم قرن سوم، نخست به‌وسیلهٔ اسحاق‌بن حنین و سپس به توسط ثابت‌بن قرّه، مورد تجدیدنظر قرار گرفته است. نصیرالدین طوسی آن را بار دیگر در قرن هفتم ویراست و دیگر نویسندگان عرب گه گاه عیناً از آن نقل کرده‌اند و بر آن شرح نوشته‌اند. (۲) «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره»، که ثابت‌بن قرّه آن را ترجمه کرده و طوسی از نو ویراسته است. (۳) قطعه‌ای از «دربارهٔ اجسام شناور»، که مشتمل است بر تعریفی دربارهٔ وزن مخصوص که در متن یونانی وجود ندارد، ترجمه‌ای از اصل موضوع بنیادین به‌صورتی بهتر از آن‌چه در متن یونانی است، و بیان بی‌اثبات هفت گزاره از نُه گزارهٔ کتاب یکم و نخستین گزارهٔ

کتاب دوم. (۴) شاید «دربارهٔ تربیع سهمی» ـ دست‌کم این مسأله توجه ثابت‌بن قرّه را به خود جلب کرده بود. (۵) مطالبی از «دربارهٔ تعادل صفحه‌ها» که در کتابهای مکانیکی دیگری که به عربی ترجمه شده‌اند یافت می‌شود (از قبیل «مکـانیک» هـرون، رسالهٔ موسوم به «دربـارهٔ تـرازو»ی اقلیدس، Liber karastonis [«کتاب قرسطون»] و غیره). (۶) علاوه بر اینها، آثار دیگری که اعراب به ارشمیدس نسبت می‌دهند و برایشان متنی یونانی در دست نیست.

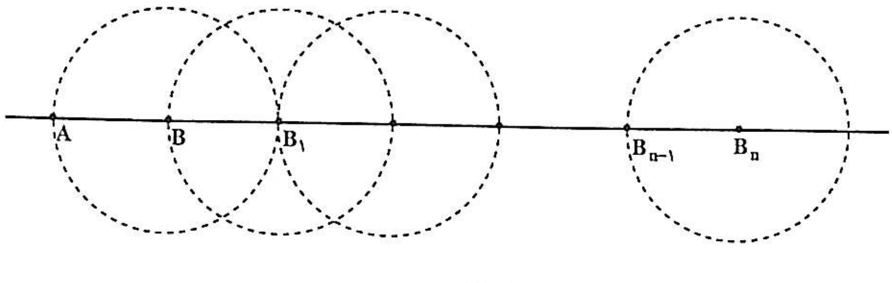
غرب لاتینی معرفت خود به ارشمیدس را از هر دو منبعی که قبلاً وصف کردیم به‌دست آورده است: بیزانس و اسلام. از ترجمه‌های قدیمی‌تری که کاسیدوروس آنها را به بوئتیوس نسبت می‌دهد هیچ نشانه‌ای باقی نمانده است. معرفتی از آن‌گونه که قبل از قرن دوازدهم میلادی در غرب وجود داشته عبارت بوده است از اطلاعی تقریباً کلی در زمینهٔ تعادل آبگونه‌ها که ممکن است منشأ آن به‌طور نامستقیم به ارشمیدس برسد.

در قرن پانزدهم، شناخت دربارهٔ ارشمیدس در اروپا رو به گسترش نهاد.

تا قرن هجدهم آثار ارشمیدس تقریباً به‌طور کامل در ریاضیات اروپایی جذب شده و تأثیر بنیادی و پایدار خود را بر علم اوایل دوران جدید برجای نهاده بودند.

اعداد ساختنی: فرض کنید پاره‌خطی به طول واحد در اختیار داشته باشیم منظور از ساختن یک عدد داده شده با خط‌کش و پرگار. یک سلسله اعمال متوالی ترسیم خط و ترسیم دایره است به‌گونه‌ای که درنهایت دو نقطه‌ای از تقاطع این دوایر و خطوط چنان حاصل شود که فاصله آنها برابر a باشد.

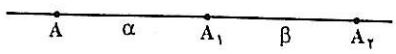
به عنوان مثال هرگاه پاره‌خط AB به طول ۱ در اختیار باشد می‌توان خط AB را رسم کرد و به مرکز B و شعاع BA دایره‌ای رسم کرد که خط را در دو نقطه یکی A و دیگری $B_۲$ قطع می‌کند در این‌صورت $AB = ۱$ و $AB_۲ = ۲$ و $BB_۲ = ۱$ و... به همین ترتیب می‌توان نقاطی مانند B_n رسم کرد که طول $AB_n = n$



اینک پاره‌خطی به طول n در اختیار ما است.

هرگاه پاره‌خطی به طول α,β در اختیار داشته باشیم می‌خواهیم پاره‌خطهایی به طول β و α و $\alpha-\beta$ و $\alpha\beta$ و α/β بسازیم.

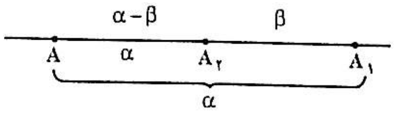
۱) $\alpha+\beta \qquad = AA_۲$



ابتدا به مرکز A کمانی به شعاع α و سپس به مرکز $A_۱$ کمانی به شعاع β می‌زنیم

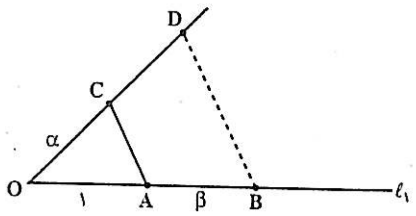
$\leftarrow AA_۲=\alpha+\beta$

۲) $(\alpha>\beta)\alpha-\beta$



ابتدا به مرکز A کمانی به شعاع α و سپس به مرکز $A_۱$ کمانی به شعاع β می‌زنیم $AA_۲=\alpha-\beta$

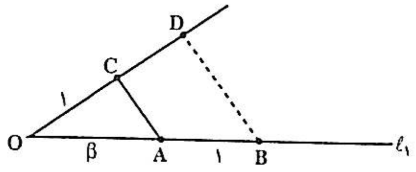
۳) $\alpha\beta$ از نقطه A دو نیم‌خط که زاویه آنها $۱۸۰\mp$ نباشد می‌گذرانیم (مثلاً زاویه ۹۰° ترسیم‌پذیر است)



بر نیم‌خط $l_۱$ نقطه A را به‌گونه‌ای که $OA=۱$ و نقطه B را بعد از آن به‌گونه‌ای که $AB=\beta$ اختیار می‌کنیم بر نیم خط $l_۲$ نقطه C را به‌گونه‌ای که $OC=\alpha$ اختیار می‌کنیم. پاره‌خط CA را رسم کرده و از نقطه B خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا $l_۲$ را در D قطع کند. بنابر قضیه تالس

$$\frac{\alpha}{۱}=\frac{|CD|}{\beta}\Rightarrow |CD|=\alpha\beta$$

۴) $O\alpha/\beta$. ابتدا گوییم هرگاه β داده شده باشد به روش مسئله قبل $\frac{۱}{\beta}=\frac{CD}{۱}\Rightarrow CD=\frac{۱}{\beta}$



سپس هرگاه β داده شده باشد $\frac{1}{\beta}$ ترسیم‌پذیر است و بنابر مسئله ۳ $\alpha(\frac{1}{\beta}) = \frac{\alpha}{\beta}$ ترسیم‌پذیر است.

مسئله اعداد ترسیم‌پذیر یک مسئله کهن از سلسله مسائل به‌جا مانده از ریاضی‌دانان یونان باستان است. بسیاری از این مسائل به ماهیتهای عمیق و متفاوت اعداد مربوط می‌شوند که در آن زمان شناخته نشده بود اما همین مسائل راه را برای کشف این ماهیات باز کرد. عمده این مسائل در قرون اخیر توسط گالوا و گوس حل شدند. مسائلی از جمله تضعیف مکعب (یعنی به‌دست آوردن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب داده شده باشد) تثلیث زاویه (یعنی تقسیم یک زاویه با خط‌کش و پرگار به سه قسمت مساوی) تربیع دایره (یعنی رسم مربعی با خط‌کش و دایره که مساحتی برابر با مساحت یک دایره به شعاع واحد داشته باشد) در زمره مسائل ساختنی قرار دارند. بعدها به‌تدریج ثابت شد که هیچ‌کدام از این مسائل امکان ندارد. همه این مسائل به نوعی به اعداد ساختنی برمی‌گردند و ثابت می‌شود که اعداد ساختنی از یک دنباله از میدانهایی تشکیل شده که $Q = F_{\circ} C F_{1} C F_{2} \dots C F_{n}$ یا که هر عنصر F_n روی F_{n-1} در یک معادله درجه اول یا درجه دوم صدق می‌کند و $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ مجموعه اعدادی است که می‌توان با خط‌کش و پرگار ساخت. مثلاً $\sqrt[3]{2} \notin F$ و $\pi \notin F$.

در واقع لیندمان ثابت کرد که عدد π غیرجبری است یعنی در هیچ معادله جبری با ضرایب در Q صدق نمی‌کند.

بنابر موارد فوق،اعداد زیر بالا ساختنی هستند

$$a_1 \mp \sqrt{a_2 \mp \sqrt{a_3 \mp \sqrt{a_4 \dots \mp \sqrt{a_n}}}}$$

می‌باشند که $a_j \in Q$ و زیر هیچ رادیکالی منفی نیست. به‌عنوان مثال:

$$21 + 3\sqrt{1 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 21 + \sqrt{9 + 18\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$
$$= 21 + \sqrt{9 + \sqrt{2 \times 18^2 - \sqrt{2 \times 18^4}}}$$

ساختنی است.

بخش ۶ـ اعداد را بسازیم

جلسه ۱۷ـ رسم $\sqrt{x}$ با خط‌کش و پرگار

فعالیت رسم جذر یک طول

اهداف فعالیت: برقراری ارتباط بین x مجهول و x متغیر، مهارت در کاربرد پرگار، مهارت در ترسیمهای هندسی، آشنایی با ریاضیات ساختنی، مقدمات تفکر الگوریتمی، تنوع الگوریتمهای اجرا.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: آیا می‌توانید از فیثاغورس کمک بگیرید؟ غیر از فیثاغورس قضیه‌ای به یاد دارید که در مورد مربع یک طول باشد؟ رسم مجذور یک عدد می‌تواند کمک کند؟ آیا به تشابه احتیاج دارید؟ آیا با کمک تشابه می‌توان حکمی را ثابت کرد که مربع یک طول در آن باشد؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف حل را خودتان در کلاس اجرا کنید ولی با پرسش ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید و به آنها اجازهٔ اظهارنظر بدهید. پس از ارائهٔ حل از دانش‌آموزان بخواهید که استدلال کنند که چرا شکلی که رسم کرده‌اید پاسخ مسئله را به‌دست می‌دهد.

در یک کلاس متوسط حل مسئله را به عهدهٔ دانش‌آموزان قرار دهید ولی چنان راهنمایی بدهید که به‌زودی به پاسخ مسئله برسند و بر استدلال صحت پاسخ بیش‌تر تأکید کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با مسئله تنها بگذارید. نکته‌هایی که به‌نظرشان می‌رسد و در حل مسئله می‌تواند راهگشا باشد را به ایشان گوشزد کنید. اگر در وقت موردنظر مسئله حل نشد خودتان مسئله را برایشان حل کنید و از آنها بخواهید استدلال برای صحت راه‌حل شما ارائه دهند.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به بخش تشابه در کتاب ریاضی سوم راهنمایی

مسائل برای حل

۱ـ یک مثلث حاده مثلثی است که همه زوایای داخلی آن حاده باشد. حداقل تعداد مثلثهای حاده‌ای که یک مثلث قائم‌الزاویه را فرش می‌کنند چند است؟

۲ـ زاویه ۷۵ درجه را توسط خط‌کش و پرگار ترسیم کنید.

۳ـ سه‌ضلعی، پنج ضلعی و منتظم را ترسیم نمایید. یک مسئله قدیمی از عهد یونانیان وجود دارد که چگونه می‌توان P- ضلعی منتظم را رسم کرد که P اول است. این مسئله توسط گاوس حل شده است. در دنباله $F_n = 2^{2^n} + 1$ کدام عدد اول است. آیا می‌توان ۷ ضلعی منتظم را ترسیم نمود؟ چرا؟

۴ـ هرگاه سه پاره‌خط به طولهای α, β, γ در دست باشند پاره‌خطهایی با طول $\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma}$ و $\sqrt{\alpha \mp \sqrt[\beta]{\gamma}}$ بسازید.

بخش ۶ـ اعداد را بسازیم

جلسه ۱۸ـ عدد π

فعالیت مساحت دایره و فعالیت تقریب زدن عدد π

اهداف فعالیت: ایده‌های اولیهٔ حد، تقریب زدن با اعداد اعشاری، تقریب با کمک ایده‌های هندسی، مقایسه اندازه مساحت و اندازهٔ طول، استدلال با کمک اشکال هندسی، استدلال با بی‌نهایت برش.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: با خط‌کش و پرگار شکل دیگری رسم کنید که مساحت آن π باشد. برای محاسبه عدد π به مصداقهای دایره در زندگی روزمره بیاندیشید. در مورد دایره چه می‌دانید؟ آیا می‌توانید با این روش مساحت همهٔ اشکال را محاسبه کنید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت مساحت دایره را با کمک دانش‌آموزان خودتان به اجرا بگذارید. در مورد زندگی علمی ارشمیدس برای دانش‌آموزان صحبت کنید. فعالیت محاسبهٔ π را به دانش‌آموزان بسپارید. ولی به آنها راهنماییهای بسیاری بکنید.

در یک کلاس متوسط هر دو فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید. بر صحت استدلالهای آنها تکید کنید و استدلالهای نادرست را با جدیّت نقد نمایید.

در یک کلاس قوی بحث و نقد آراء دیگران را دامن بزنید. از خلاقیت دانش‌آموزان شگفت‌زده خواهید شد! برای محاسبهٔ π بین دانش‌آموزان رقابت ایجاد کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به موضوع اعداد گنگ در کتاب آموزشی «هنر حل مسئله»

زندگینامهٔ علمی کاشانی

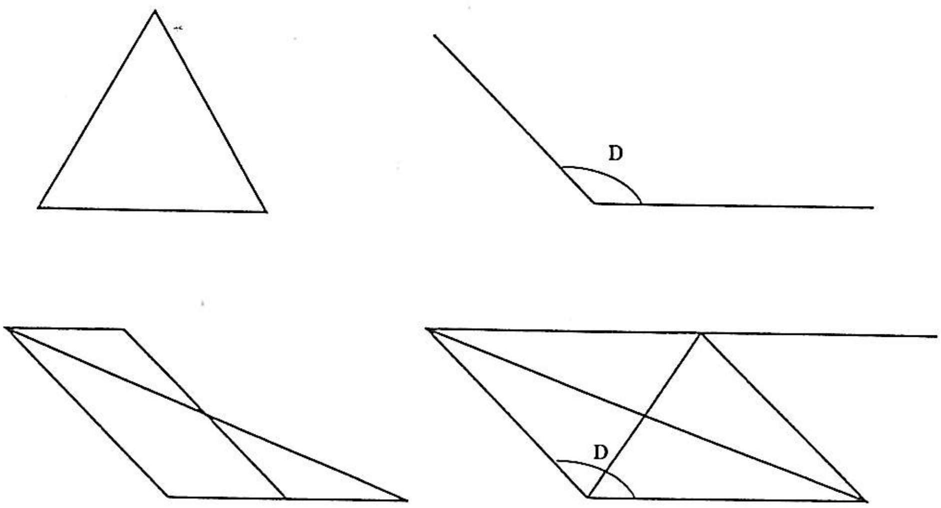
(ت. کاشان، ایران ؛ و. سمرقند [اکنون در اُوزبکستان]، ۸۰۸/۸۳۳، اخترشناسی، ریاضیات.

اگرچه فیزیکدان بود، ولی علاقهٔ اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود ؛ پس از دورهٔ طولانی بی‌نوایی و سرگردانی، سرانجام در سایهٔ حمایت سلطان اُلُغ‌بیگ، که خود دانشمند بزرگی بود، موقعیت شغلی مطمئنی در سمرقند احراز کرد. کاشی برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» ـ یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که در سال ۷۹۹ به همت الغ‌بیگ بنیاد نهاده شده بود ـ اشغال کرد ؛ تا هنگامی که الغ‌بیگ در ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهمترین مرکز علمی در خاور زمین بود ؛ کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ‌بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین

اثرش مفتاح‌الحساب (۸۰۶) می‌باشد، که دایرةالمعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به‌عنوان کتاب راهنما به‌کار رفت؛ روش ریشه‌گیری از اعداد درست را شرح می‌دهد، و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به‌دست می‌دهد (احتمالاً در اشاعهٔ کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است). بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارتند از رسالةالمحیطیه (۸۰۳) و رسالةالوتّر و الجَیب؛ در اثر اول، مقدار 2π را تا شانزده رقم اعشاری تعیین می‌کند. در دومین اثر، مقدار سینوس 1° را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. روش او در حل عددی معادلهٔ تثلیث یکی از بهترین روشهای جبر قرون وسطی است.

فقط سه اثر اخترشناسی کاشی مورد بررسی قرار گرفته است: زیج خاقانیِ وی تجدیدنظری در زیج ایلخانیِ نصیرالدین طوسی بود؛ رساله در شرح علت رصد نحوهٔ ساختن هشت ابزار اخترشناسی را شرح می‌دهد؛ کاشی، در نزهت‌الحدایق به شرح دو ابزاری که خود اختراع کرده بود، طولیاب سیّاره‌ای، و دستگاهی برای اجرای درونیابی خطی، می‌پردازد.

خود را بیازماییم



تمام مراحل رسم را با خط‌کش و پرگار انجام دهید.

فصل ۳ــ چگونه مسئله حل کنیم

بخش ۱ــ روشهای حل مسائل ترسیم هندسی

جلسه ۱۹ــ روشهای حل مسئله سجزی

فعالیت رسم پاره‌خطهایی متناسب با پاره‌خط مفروض

اهداف فعالیت: آشنایی با استراتژیهای حل مسئلهٔ سجزی، مهارت در حل مسئله، ترسیم هندسی با کمک شکلهای مقدماتی، یادداشت روز کشف در حل مسئله، یادداشت استدلال نهایی حل مسئله.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: شما چگونه مسئله حل می‌کنید؟ اگر بخواهید مسئله حل کردن را به برادر کوچکتان بیاموزید چه چیزهایی را مطرح می‌کنید؟ کدام استراتژیها مهم‌تر هستند؟ یک مسئله حل کنید و استراتژیهایی که در آن به‌کار برید بنویسید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف مشکل بتوان فعالیت کتاب را اجرا کرد. از کتاب هنر حل مسئله کمک بگیرید و با نمونه خلاصه‌ای از استراتژیهای حل مسئله را به دانش‌آموزان بیاموزید. بعد از آنها بخواهید مسئله‌ای مربوط به ترسیمهای هندسی حل کنند و استراتژیهایی را که به‌کار برده‌اند بنویسند. مسئله را خودتان مناسب با کلاس انتخاب کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیت رسم پاره‌خطهایی متناسب با پاره‌خطهای مفروض را خودتان در کلاس اجرا کنید و از دانش‌آموزان بخواهید استراتژیهای حل مسئله‌ای را که به‌کار برده‌اید نام ببرند. اگر موفق نشدند خودتان این کار را انجام دهید. سپس استراتژیهای حل مسئله سجزی را به آنها بیاموزید.

در یک کلاس قوی انجام فعالیت را به روش کتاب در کلاس پیاده کنید. دانش‌آموزان را از هدایت خود محروم نکنید. استراتژیهای حل مسئله را در حین انجام فعالیت به آنها آموزش دهید. آنان را به مطالعه و حل مسائل کتاب هنر حل مسئله تشویق کنید.

معرفی کتاب: مراجعه کنید به کتاب «رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسائل هندسی» نوشته عبدالجلیل سجزی ترجمهٔ محمد باقری

زندگینامهٔ علمی سجزی

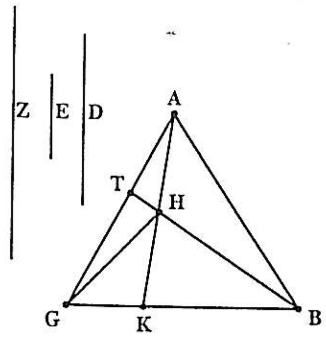
(ت. سجستان [سیستان]، ایران، حدود ۳۲۴/۳۳۴ ؛ و. حدود ۳۹۹/۴۱۱)، هندسه، اخترشناسی، اختربینی.

مدارک نشان می‌دهند که سِجزی هم‌عصر مسن‌تر بیرونی (۳۶۲ـ حدود ۴۲۹) بود ؛ در ۳۴۸ـ۳۴۹ در رصدهای عبور ستارگان از نصف‌النهار در شیراز که با هدایت صوفی صورت می‌گرفت حضور داشت. فعالیت علمی عمدهٔ او در اختربینی بود : او سه اثر از ابومعشر را خلاصه کرد و کتاب زرادشت صُوَر درجات الفَلَک («کتاب زرتُشت دربارهٔ صورتهای درجات منطقةالبروج») و زائرجات، کتابی دربارهٔ زایچه‌ها، را نوشت. مقالات ریاضی وی بیش‌تر قابل توجه‌اند و او به‌عنوان یک هندسه‌دان شهرت بیش‌تری دارد : رساله‌های بدیعی دربارهٔ کُرهها و مقاطع مخروطی، ساختن قطب‌نمایی مخروطی، و تقسیم یک زاویه به سه قسمت مساوی از راه تقطیع دایره با یک هذلولی متساوی‌الاضلاع نوشت.

ادامه رساله سجزی در روشهای حل مسائل

(مثال، دربارهٔ تحلیل)

اکنون مثال دیگری مربوط به مسئلهٔ دیگری می‌آوریم تا جویندهٔ این فن با آن تمرین کند و مسائلی که برایش مبهم است بر او روشن شود [مسئله] این است : چگونه مثلث مفروضی را به نسبت مفروضی به سه قسمت تقسیم کنیم؟



مثلث ABG و نسبت D به E به Z را درنظر می‌گیریم. تقسیم شکل باید با سه خط دیگر که در وسط مثلث به هم می‌رسند صورت گیرد. پس فرض می‌کنیم مثلث همان‌طور که خواسته‌ایم تقسیم شده است یعنی به مثلثهای ABH، AGH و BGH، چنان‌که نسبت مساحت مثلث ABH به AGH مثل نسبت D به E است و نسبت مثلث AGH به مثلث BGH مثل نسبت E به Z است.

سپس دربارهٔ جستجوی ترسیمی فکر می‌کنیم که در این مسئله مفید باشد. BH را تا T امتداد می‌دهیم چنان‌که بر ما روشن شود که نسبت مثلث ABH به مثلث BGH مثل نسبت AT به GT است. پس اگر ضلع AG را به نسبت D به Z تقسیم کنیم، تقسیم دو مثلث باید بر خط BT منطبق شود. پس AG را در T به نسبت D به Z تقسیم و BT را وصل می‌کنیم. پس لازم می‌آید که نقطهٔ تقسیم و ایجاد زاویهٔ مثلث مجاور به خط AG، بر خط BT باشد.

پس باید یک مثلث AHG از ضلع AG و دو خط خارج شده از نقاط A و G و رأس زاویه‌ای

که بر خط BT قرار می‌گیرد رسم کنیم، ولی نسبت آن به یکی از مثلثهای باقی‌مانده مثل نسبت E به D یا به Z است. ترسیم اول را به‌عنوان مقدمهٔ آن به‌کار می‌بریم زیرا روش درستی است. روی ضلع BG همان ترسیمی را که روی AG کردیم انجام می‌دهیم، یعنی ضلع BG را در نقطهٔ K به نسبت D به E تقسیم و AK را وصل می‌کنیم. پس روشن است که نسبت مثلث AHB به مثلث AGH مثل نسبت D به E است.

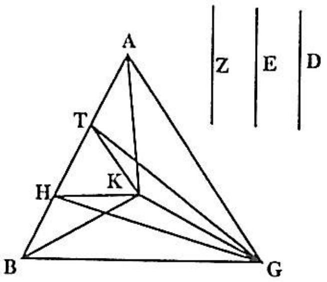
نشان داده‌ایم که نسبت هر دو مثلثی که دو ضلعشان از نقاط A و G خارج می‌شوند و روی BT به هم می‌رسند مثل نسبت مثلثهای ABT و BTG است. پس سه مثلث رسم شده در مثلث ABG به نسبت مفروض هستند. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

روش دیگر: فرض می‌کنیم که سه مثلث رسم شده اند و BH را تا T امتداد می‌دهیم. اکنون باید مثلث AHB را جستجو کنیم، اما چنان‌که در یافتن شکلها به روش تحلیل معمول است، فرض می‌کنیم که ترسیم شده است.

پس به شیوهٔ ریاضی در آن می‌اندیشیم و راهی برای آن جستجو می‌کنیم که شیوهٔ آن به شیوهٔ نخست نزدیک باشد، چنان‌که در پی می‌آید. اگر BT را در نقطهٔ H چنان تقسیم کنیم که نسبت مثلث ABH به مثلث AHT معلوم باشد، نسبت مثلث AHT به مثلث GTH بر ما معلوم است. اما کل مثلثهای AGB و AHB را نداریم. اگر بتوانیم نسبتها را معلوم کنیم، آن‌گاه چنان‌چه بعضی از آنها را ترکیب کنیم، مثلث ABG تقسیم شده به نسبتهای مفروض به‌دست می‌آید، پس از آن‌که نسبت هر دو مثلثی را که مثل مثلثهای ABH و GBH هستند دانستیم. پس با این روش جستجو می‌کنیم، تا ببینیم به جواب می‌رسیم یا نه، اگر به‌فرض نسبت BH به HT بر ما معلوم باشد و نسبت AT به TG معلوم باشد. پس از ترسیم مثلث، نسبت مثلثهای AGH و AHB معلوم است، زیرا فرض همین بود.

اما نسبت ضمن جستجو تقسیم شده است. پس باید یکی از خطهای متناسب را به همان نسبتهای تقسیم دو مثلث AHT و HTG تقسیم کنیم. پس E را به دو قسمت می‌کنیم چنان‌که نسبت یکی از آنها به دیگری مثل D به Z باشد. نسبت BH به HT را چون نسبت D به یکی از قسمتهای E قرار می‌دهیم. AH و GH را وصل می‌کنیم. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHT مثل نسبت D به یکی از اجزای E است، و نسبت مثلث AHT به مثلث HTG مثل نسبت یکی از اجزای E به جزء باقی‌ماندهٔ آن است. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHG مثل نسبت D به E است. اما نشان دادیم که نسبت مثلث ABH به باقی‌ماندهٔ مثلث BGH مثل نسبت D به Z است. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

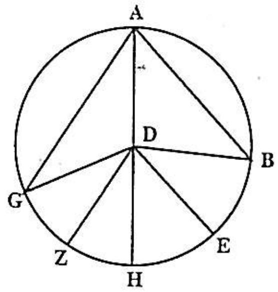
روش دیگری برای ترسیم این شکل وجود دارد که چنین است: ضلع AB را در نقاط H و T



به نسبتهای D، E و Z تقسیم می‌کنیم و خطهای GH و GT را می‌کشیم. روشن است که هر یک از مثلثهای مطلوب AGK، BGK و ABK در شکل با یکی از این سه مثلث TGH، AGT و HGB برابر است. در مرحلهٔ اول، این شیوه را در ذهن داشته‌ایم. سپس می‌اندیشیم و نقطه‌ای را که خطوط اضلاع سه مثلث (مطلوب) مساوی با این سه مثلث رسم شده به هم می‌رسند یعنی نقطهٔ K را جستجو می‌کنیم. پس TK را موازی با AG رسم می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که رأس هر مثلث مساوی با مثلث ATG و به قاعدهٔ AG بر خط موازی با AG قرار دارد. به همین ترتیب HK را موازی با BG می‌کشیم، بنا به دلیلی که قبلاً ذکر کردیم، در نقطهٔ K به هم می‌رسند، سپس AK، BK و GK را رسم می‌کنیم و می‌گوییم تقسیم به نسبتهای موردنظر انجام شده است. این روش یکی از راههای حل آن است ولی آن را به تمامی شرح نداده‌ایم.

روش دیگری برای این حکم وجود دارد ولی به این دو روشی که ذکر کردیم منتهی می‌شود بنابراین آن را حذف کرده‌ایم.

(مثال، دربارهٔ ساختار استنتاجی)



چنان‌که قبلاً گفتیم «اگر مقدمه یا قضیه‌ای از مقدمات و قضایا را داشته باشیم، و آن مقدمه یا قضیه هم مقدمه‌ای داشته باشد، و بر آن مقدمه هم مقدمه‌ای باشد، آن مقدمه یا قضیه را می‌توان به کمک مقدمهٔ مقدمه‌اش اثبات کرد»: دایرهٔ AB را به مرکز نقطهٔ D فرض می‌کنیم. زاویهٔ BAG بر کمان BAG واقع است. پاره‌خطهای BD و GD را رسم می‌کنیم. می‌گوییم که زاویهٔ BDG دو برابر زاویهٔ BAG است.

اقلیدس این را با استفاده از ویژگی خاص زاویهٔ خارجی مثلثی که یک ضلعش امتداد یافته باشد ثابت کرده است. پس لازم است بررسی شود که آیا این (ویژگی خاص دایره) را می‌توان از آن دو یا یکی از آنها به‌دست آورد یا نه. پس، از نقطهٔ D خط DE را موازی با BA و DZ را موازی با AG رسم می‌کنیم و AD را تا H امتداد می‌دهیم. که وی آن را مقدمه‌ای بر مقدمه‌اش قرار داده است. اما زاویهٔ خارجی EDH برابر است با زاویهٔ داخلی BAD، و زاویهٔ EDB برابر است با زاویهٔ متبادل DBA. اما زاویهٔ DBA با زاویهٔ BAD برابر است. تساوی دو ضلع که در این شکل ظاهر می‌شود مقدمه نیست بلکه ویژگی خاصی از شکل است که اقلیدس به این شکل اضافه کرده است، پس آن را

به همین صورت نگاه می‌داریم.

پس هر یک از دو زاویهٔ BDE و EDH با زاویهٔ BAD برابر است. بنابراین زاویهٔ BDH دو برابر زاویهٔ BAD است. همچنین روشن است که به همین ترتیب زاویهٔ HDG دو برابر زاویهٔ DAG است. بنابراین کل زاویهٔ BDG دو برابر کل زاویهٔ BAG است. این کاربرد قضیهٔ بیست‌ونهم است. پس ما مقدمات مقدمات آن را به‌کار برده‌ایم و توانسته‌ایم آن را ثابت کنیم. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

(مثال، دربارهٔ ویژگیهای مشترک شکلهای مختلف)

مثالی دربارهٔ وجوه مشترک شکلها می‌آوریم، با استفاده از شکلهای مرکب از تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین. به‌طور کلی حکمهایی که مرکب از آن تقسیم باشند متضمن عدد پنج هستند.

مثلاً ترسیم پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع شامل تقسیم خطی به نسبت ذات وسط و طرفین است. از کنار هم بر یک خط مستقیم گذاشتن شعاع دایره و ضلع ده ضلعی منتظم محاطی که به علّت دربر داشتن نصف کمان پنج‌ضلعی، با ضلع پنج ضلعی مرتبط است خطی حاصل می‌شود که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است.

دو وتری که در دایرهٔ پنج ضلعی واقع می‌شوند، یعنی وترهایی که از رأسهای پنج‌ضلعی محاط در دایره خارج می‌شوند، یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند.

<اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود> و به بخش بزرگ‌تر، نصف کل خط افزوده شود، مربع آن پنج برابر مربع نصف خط خواهد بود.

هرگاه خطی با این نسبت به دو بخش تقسیم شود، مربع کل خط، پنج برابر مربع بخش اول خواهد بود.

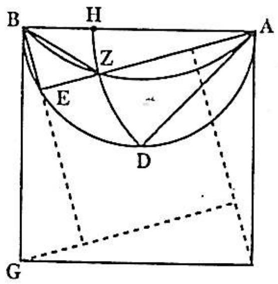
اگر خطی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و اگر به بخش کوتاه‌تر خطی برابر با نصف بخش بلندتر افزوده شود، مربع آن مجموع پنج برابر مربع نصف بخش بلندتر است.

از افزایش و کاهش ضلعهای یک شکل مربع که به پنج بخش مساوی تقسیم شده باشد می‌توان خطی تقسیم شده به نسبت ذات وسط و طرفین به‌دست آورد. منظورم از افزایش، افزایش قسمتهایی از خطوط به خطهای دیگر و وصل کردن آنهاست چنان‌که حاصل خطی راست باشد، و منظورم از کاهش این است که خط بلندتر به دو بخش تقسیم شود چنان‌که یکی از این بخشها با خط کوتاه‌تر برابر باشد.

مثال: مربع AG را درنظر می‌گیریم، ولی زاویهٔ E قائمه است پس (مجموع) مربعهای AE و EB

با مربع AB برابر است. خط دیگر AD را چنان می‌یابیم که دو برابر مربع آن مساوی با مربع AB و خود آن مساوی با AZ باشد. یافتن خط AD آسان است: نیمدایرهٔ ADB را می‌کشیم و آن را در D نصف می‌کنیم و AD را وصل می‌کنیم. حال دو برابر مربع AD با مربع AB برابر است. اکنون باید خط AE را چنان بیابیم که اگر EB رسم شود، EB با EZ مساوی باشد و ZA با AD، تا به مقصود خود برسیم.

برای یافتن آن، وضعیتی را تصور می‌کنیم که این خط به‌دست آمده است یعنی ZE برابر با EB است. روشن است که اگر AE را رسم کنیم و در نقطهٔ B از خط EB زاویهٔ نیم‌قائمه‌ای بسازیم و BZ را وصل کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی AZ و AD کنیم، خط ZE یا خط EB برابر خواهد بود. سپس باید درپی تساوی باشیم. باید خط AE را درحال حرکت حول نقطهٔ A تجسم کنیم، بنابراین به مرکز A و به شعاع AD دایرهٔ DZ را می‌کشیم. این خط الزاماً باید دایرهٔ DZ را قطع کند. پس باید کمانی درخور زاویهٔ یک و نیم برابر زاویهٔ قائمه مثل کمان AZB رسم کنیم، زیرا اگر دایرهٔ DZ آن را قطع کند و AZ تا E ادامه یابد و BZ وصل شود، زاویهٔ خارجی AZB برابر است با دو زاویهٔ داخلی E و B. اما بر ما روشن است که زاویهٔ E قائمه است، پس نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ B در مثلث BEZ با نصف زاویهٔ قائمه برابر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که در مثلث ZEB، زاویهٔ B و زاویهٔ Z با هم برابرند، پس خط EZ با خط EB برابر است و خط AZ با خط AD. پس AE چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. اما، براساس نقل، اگر ZH را موازی با EB رسم کنیم، AB چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. برهان آن آسان است. این چیزی بود که می خواستیم نشان دهیم.



(مثال. قضایایی دربارهٔ نسبت بین کمانها و وترها و سینوسهای آنها)

اکنون به بررسی اثبات این حکم که بطلمیوس در کتاب مجسطی آورده است می‌پردازیم: برای هر دو کمان مختلف در یک دایرهٔ مفروض، نسبت وتر بزرگ‌تر و به وتر کوچک‌تر، کم‌تر است از نسبت کمان بزرگ‌تر به کمان کوچک‌تر.

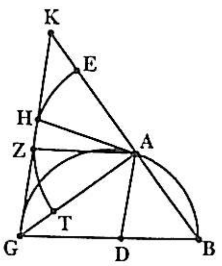
در این مسئله باید ذهن خود را برای تجسم ترسیمهای پیچیده به‌کار گیریم و شکلها را با هم ترکیب کنیم. اما این قضیه و نظایر آن آسان هستند بدین‌لحاظ که حقیقت سؤال بر ما روشن است و ترسیمهایی که وی با آنها به اثبات پرداخته، قبلاً صورت گرفته است. این مسئله و نظایر آن از این دو دیدگاه آسان هستند. چون اثبات این مسئله ناممکن است مگر آن‌که ترسیم دیگری به آن بیفزاییم، ترسیم

دیگری لازم داریم چنان‌که اگر آن را به راه‌حل بیفزاییم، اثبات آن با ترکیب این دو آسان شود. با استفاده از ترسیمی که بطلمیوس عرضه کرده است به‌راحتی می‌توانیم آن را ترسیم کنیم. با درنظر داشتن این‌که چگونه وی به حل مسئله پرداخته است و برای اثبات چه چیزی به آن افزوده است. زیرا او مثلثهایی متشکل از خطهای راست و کمانها بدان افزوده و سپس آن را با استفاده از آن مثلثها و زاویه‌ها، کمانها و وترهایشان ثابت کرده است.

در این‌جا چیزی می‌گوییم که به این سؤال مربوط نیست ولی اکنون به آن نیاز داریم. روش خود را در این شکل از روش گذشتگان اقتباس کرده‌ایم، به این معنی که شکلها تناسبها و خواصی دارند چنان‌که اگر ریاضیدان ماهری دربارهٔ آنها بیندیشد، بر وی روشن می‌شود که برخی از آنها با بقیه پیوند متقابل دارند و برخی با هم آمیخته‌اند، چنان‌که گویی دارای ماهیت واحد و وضعیت واحدی هستند. زیرا چنان پیوندها و رابطه‌های متقابلی دارند که اگر تصور کنیم که انواع مختلفی از یک جنس هستند، لازم است که ماهیت خواص مشترک آنها نیز متعلق به همان جنس باشد.

مثالی در این‌باره، تقاطع دو وتر در دایره است. بخشهایی از آنها با بخشهایی دیگر، از آنها متناسبند، پس این یک بیان مطلق مربوط به جنس آنهاست. نحوهٔ تعلق آنها به یک نوع و وضعیت قرار گرفتن دو وتر متقاطع در دایره مربوط است به ویژگی آن که با نسبت سروکار دارد. اگر کسی این وضع را به‌وسیلهٔ شکلهای میانجی بررسی کند، به ماهیت اصلی آن ویژگی می‌رسد. همچنین، لزوم متناسب بودن خطهای شامل مساحت به مساحتها و این نکته که هر کمان شامل زاویه‌های برابر است، و تساوی مثلثهای با قاعدهٔ متساوی که رأسهای آنها بر خط موازی با قاعده قرار دارند. اگر کسی این شکلها و نظایر آنها را بررسی کند، خواص و ماهیت آنها را ان‌شاءالله درمی‌یابد. به این سبب و بنا به دلایل مشابهی مربوط به ویژگیهای خاص و ترتیب شکلها، در آغاز بررسی تا حدی بر ماهیت آنها (شکلها) تکیه می‌کنیم، پیش از آن‌که شکلها را بیابیم.

اکنون بازمی‌گردیم به آن‌چه گفتیم : کمان BAG را درنظر می‌گیریم و آن را در A به دو بخش متفاوت تقسیم می‌کنیم چنان‌که بخش بزرگ‌تر AG باشد. وترهای AB و AG را می‌کشیم. می‌گوییم که نسبت کمان AG به کمان AB بزرگ‌تر است از نسبت وتر AG به وتر AB.



اثبات: BG را وصل می‌کنیم، BA را تا K امتداد می‌دهیم و AK را مساوی با AG جدا می‌کنیم. ترسیم را به این صورت انجام دادیم زیرا به این شکل ترسیمهای پیاپی برای این صورت می‌افزاییم راه دیگری برایمان وجود ندارد.

سپس GK را وصل می‌کنیم. اکنون دو مثلث به شکل مربوط به قضیهٔ اولیهٔ مطلوب ما افزوده شده‌اند. یکی از آنها مثلث ABG و دیگری مثلث AKG است. اما با استفاده از این مثلثها هنوز به مقصود نرسیده‌ایم. پس AD را موازی با KG رسم می‌کنیم. AD را به موازات KG می‌کشیم زیرا ترتیبی در آن هست: یا تساوی بین زاویه‌های DAG< و AGK> یا بین DAB و AKG. سپس مهارت خود را در این‌جا به‌کار می‌گیریم: AZ را موازی با BG می‌کشیم.

لازم است قطعه‌های مستدیری رسم کنیم تا زاویه‌ها را به کمک کمانهایشان معلوم کنیم و اندازهٔ تناسب ضلعهای مثلثها و زاویه‌های کمانها را به‌دست آوریم، سپس به جستجوی تناسب بین کمانهای BA و AG و زاویه‌های قطعه‌ها می‌پردازیم. بنابراین به مرکز A و به شعاع AZ کمان TZHE را رسم می‌کنیم. این دایره را به مرکز A کشیدیم زیرا چیزهای مطلوب که روی کمانهای TZHE واقعند متناسب با زاویه‌های به رأس A هستند.

سپس در پایان ترسیم، به جستجوی تناسب بین زاویه‌های به رأس A و زاویه‌های بین ضلعهای AB، AG و BG می‌پردازیم، به‌طوری که مقصودمان نتیجهٔ (منطقی) آن باشد.

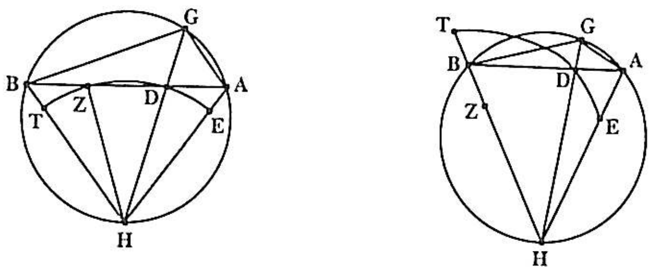
چون خط ZG از خط ZK کوچک‌تر است، کمان HE با کمان ZT برابر است. AH را وصل می‌کنیم. پس AH با AZ برابر است و قطعهٔ ZTG با قطعهٔ HEK برابر است.

سپس با استفاده از تناسب بین قطعه‌ها، کمانها، مثلثها و ضلعها به جستجوی مقصود خود یعنی قضیهٔ مطلوب می‌پردازیم. در این‌جا باید نتایج را (حاصل شده) تصور کنیم و آنها را از مقصد بعکس به سوی آغاز تحلیل کنیم، سپس از آغاز به سوی مقصد برویم.

در این‌جا باید از حدس کمک گرفت. چون قطعهٔ AZT با قطعهٔ AEH برابر است و قطعهٔ HEK با قطعهٔ ZTG برابر است، با درنظر گرفتن قطعهٔ مشترک HZA و مثلث AZH، نسبت مثلث AZG به مثلث AZK بزرگ‌تر است از نسبت قطعهٔ AZT به قطعهٔ AZE. پس نسبت خط ZG به خط ZK بزرگ‌تر است از نسبت زاویهٔ TAZ به زاویهٔ ZAK. اما نسبت خط ZG به خط ZK مثل نسبت خط BA به خط AG است، زیرا AG با AK برابر است.

پس نسبت زاویهٔ GAZ به زاویهٔ ZAK کوچک‌تر است از نسبت BA به AG. اما زاویهٔ GAZ با زاویهٔ AGD برابر است، و زاویهٔ KAZ با زاویهٔ ABG برابر است، پس نسبت زاویهٔ G به زاویهٔ B کوچک‌تر است از نسبت خط BA به خط AG. پس نسبت کمان AG به کمان AB بزرگ‌تر است از نسبت خط AG به خط AB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

این برهان را از راه دیگری جستجو می‌کنیم. دایرهٔ ABH و دو کمان متفاوت AG و GB را که GB کمان بزرگ‌تر است درنظر می‌گیریم و آن‌چه را گفتیم می‌گوییم.



AB را وصل می‌کنیم و زاویهٔ G را به‌وسیلهٔ خط GH نصف می‌کنیم. این زاویه را نصف می‌کنیم زیرا خط AB به‌وسیلهٔ GH در نقطهٔ D چنان تقسیم شده است که نسبت AD به DB مثل نسبت AG به GB است. پس خط AB مرحلهٔ واسطه‌ای می‌شود برای ترسیمی که نیاز داریم.

پس به ترسیمی درون این دایره یا بیرون آن نیاز داریم که دو زاویهٔ A و B را با هم به یک نقطه مرتبط کند. علت آن است که اگر آن نقطه را مرکز بگیریم و به شعاعی حول آن کمانی رسم کنیم برای مقصود ما مفید خواهد بود. این ترسیمها در آغاز کار برای ما مبهم هستند ولی این روش موفقیت‌آمیز است.

پس AH و BH را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌های AHG و BHG در نقطهٔ H به یکدیگر مرتبط می‌شوند و با زاویه‌های A و B برابرند. خطهای AH و BH را در نقطهٔ H به هم وصل کرده‌ایم و از نقاط A و G و B سه خط که در نقطهٔ دیگری از کمان AHB به هم برسند رسم نکرده‌ایم. زیرا اگر با این ترسیم به مقصود برسیم، آسان‌ترین راه عبارت خواهد بود از یافتن مقصود به‌وسیلهٔ ترسیم آنها به وسط کمان AHB، به علت تناسبی که بین خطهای AD و DB و خطهای AG و GB وجود دارد. آن‌چه به تناسب و ترتیب نزدیک‌تر باشد به یافتن جواب هم نزدیک‌تر است.

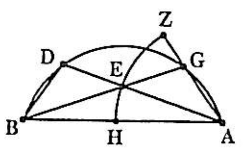
سپس باید کمانی به مرکز H و به شعاعی که هنوز مقدارش را نمی‌دانم پیدا کنیم چنان‌که فزونی تناسب کمان BG به کمان GA بر وتر BG به وتر GA به کمک قطعه‌ها، کمانها و زاویه‌های به رأس H، خطهای AD و DB و مثلثهای ADH و DHB حاصل شود.

در این‌جا مغالطهٔ زیر پیش می‌آید. اگر کسی بگوید: «به مرکز H و به شعاع HD کمان EDT را رسم می‌کنیم و مطابق این شکل HB را تا T امتداد می‌دهیم» و اگر این را به کمک آن شکل ثابت کند، آن‌گاه می‌گوییم: «این ممکن نیست: چون خط AH با خط BH برابر است و انتهای کمان روی نقطهٔ E قرار می‌گیرد، انتهای دیگر روی نقطهٔ Z روبروی نقطهٔ E واقع می‌شود.»

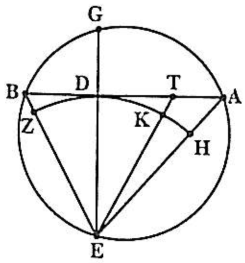
چون قطعه‌های دایره و مثلثها در این شکل از هر لحاظ به نقطهٔ D وصلند، مانند قبل به مرکز H و به شعاع HD کمان (۳۶۴)، EDZT را رسم می‌کنیم تا ببینیم آیا می‌توانیم مطلوب خود را بیابیم یا نه. (شکل ۱۲b) HZ را وصل می‌کنیم. <پس نسبت> قطعهٔ ZDH به قطعهٔ DEH بزرگ‌تر است از نسبت

مثلث ZDH به مثلث HDA. پس، براساس ترکیب، نسبت قطعهٔ DTH به قطعهٔ DHE بزرگ‌تر است از نسبت مثلث DHB به مثلث DHA. بنابراین نسبت کمان DT به کمان DE بزرگ‌تر از نسبت خط DB <به> خط DA اما نسبت کمان DT به کمان DE مثل نسبت <کمان BG به کمان GA است. پس نسبت کمان BG به کمان GA بزرگ‌تر است از نسبت> وتر BG به وتر GA. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

چون مقصود بطلمیوس (کمانهای) یک درجه و نیم درجه بود، لازم است (فرض کنیم) که کمانهایی که قضیه برایشان اثبات شده، کم‌تر از نیمدایره‌اند. در این مسئله باید دربارهٔ شرط <...> بحث کنیم که برهانی است متفاوت با برهانهای پیشین. این کار را به شیوهٔ دیگری چنان‌که دربی می‌آید دنبال می‌کنیم:



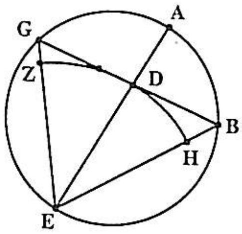
فرض می‌کنیم کمان AB کوچک‌تر از نیمدایره باشد و آن را در G به دو نیمهٔ نابرابر تقسیم می‌کنیم که GB بخش بزرگ‌تر باشد. AG و GB را رسم می‌کنیم و BD را مساوی AG اختیار می‌کنیم و AD را وصل می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع AE، کمان HEZ را رسم می‌کنیم و AG را تا Z امتداد می‌دهیم. روشن است که Z خارج از کمان واقع می‌شود و نیز روشن است که <AE> با EB برابر است. پس نسبت قطعهٔ AZE به قطعهٔ AEH بزرگ‌تر است از نسبت مثلث AGE به مثلث AEB. براساس ترکیب نسبت، قطعهٔ AZH به قطعهٔ AEH بزرگ‌تر است از نسبت مثلث AGB به مثلث AEB. اما نسبت کمان ZH به کمان EH مثل نسبت کمان GB به کمان DB است. بنابراین نسبت کمان GB به کمان DB بزرگ‌تر از نسبت خط GB به خط EB است. اما خط EB با خط AE برابر است و خط AE از خط AG بزرگ‌تر، زیرا فرض کردیم که AGB از نیمدایره کوچک‌تر است. پس نسبت کمان GB به کمان GA خیلی بزرگ‌تر است از نسبت وتر GB به وتر AG. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

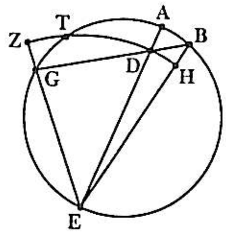


دایرهٔ ABG مفروض است، و کمانهای AG و GB نابرابرند و AG از GB بزرگ‌تر است. AB را می‌کشیم و از نقطهٔ G عمودی بر AB فرود می‌آوریم. می‌گوییم که نسبت خط AD به خط DB بزرگ‌تر است از نسبت کمان AG به کمان GB.

اثبات: عمود GD را تا E امتداد می‌دهیم و EB و EA را وصل می‌کنیم. ET را برابر با EB می‌کشیم. به مرکز E و به شعاع ED دایرهٔ ZDKH را رسم می‌کنیم. پس نسبت مثلث ADE به مثلث

DBE بزرگ‌تر است از نسبت کمان HKD به کمان ZD. زیرا مثلث ADE به اندازهٔ چهار پهلوی نامشخص ATKH از قطعهٔ نظیرش بزرگ‌تر است. کمان HD روبه‌روی زاویهٔ AED و کمان DZ روبه‌روی زاویهٔ DEZ است. به همین ترتیب، کمانهای AG و GB روبه‌روی آنها هستند، پس با هم متناسبند. بنابراین، نسبت AD به DB بزرگ‌تر است از نسبت کمان AG به کمان GB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.



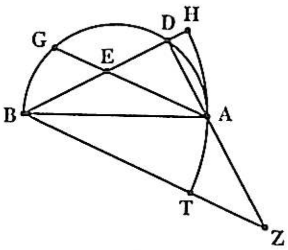


کمان AG از کمان AB بزرگ‌تر است. می‌گوییم که نسبت وتر دو برابر کمان بزرگ‌تر به وتر دو برابر کمان کوچک‌تر، بزرگ‌تر است از نسبت کمان بزرگ‌تر به کمان کوچک‌تر.

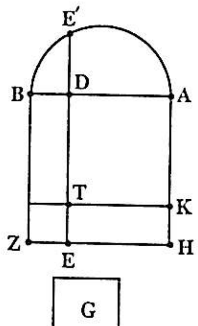
برهان: قطر AE را رسم می‌کنیم. EB و EG را می‌کشیم و به مرکز E و به شعاع ED کمان HDTZ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ Z ممکن است روی G واقع شود، ولی خارج از آن می‌افتد، زیرا اگر داخل خط GE قرار بگیرد، زاویهٔ ADG قائمه یا حاده خواهد بود. درحالی که چنین نیست. پس نسبت مثلث BDE به مثلث DGE بزرگ‌تر است از نسبت قطعهٔ HDE به قطعهٔ DZE. پس نسبت خط BD به خط DG بزرگ‌تر است از نسبت زاویهٔ HED به زاویهٔ DEZ و (بزرگ‌تر است) از نسبت کمان BA به کمان AG. اما نسبت BD به DG مثل نسبت وتر دو برابر کمان BA به وتر دو برابر کمان AG است. پس نسبت وتر دو برابر کمان AB به وتر دو برابر کمان AG بزرگ‌تر است از نسبت کمان BA به کمان AG. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

<نیم> دایرهٔ ABG را درنظر می‌گیریم. دو وتر AG و BD در آن واقعند و محل برخورد آنها نقطهٔ E است. می‌گوییم که نسبت خط DE به خط EB کوچک‌تر است از نسبت کمان AD به کمان GB.

اثبات: DA را تا Z امتداد می‌دهیم و به مرکز B و شعاع BA دایرهٔ HAT را رسم می‌کنیم. BD را تا H امتداد می‌دهیم و BZ را موازی با AG می‌کشیم. پس نسبت مثلث ADB به مثلث AZB کوچک‌تر است از نسبت قطعهٔ AHB به قطعهٔ ATB. به همین ترتیب، نسبت خط AD به خط AZ کوچک‌تر است از نسبت زاویهٔ DBA به زاویهٔ ABZ. اما زاویه ABZ با زاویهٔ GAB برابر است و



کمانهای AD و GB روبه‌روی آنها هستند. پس نسبت AD به AZ کوچک‌تر است از نسبت کمان AD به کمان GB. اما نسبت خط AD به خط AZ مثل نسبت خط DE به EB است. پس نسبت خط DE به خط EB کوچک‌تر است از نسبت کمان AD به کمان GB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

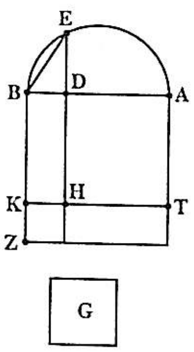


(مثال ۷. دو مسئله در «جبر هندسی»)

چگونه خط AB را به دو بخش چنان تقسیم کنیم که مجموع مساحت ایجاد شده از کل خط AB و یکی از بخشهای آن، بعلاوهٔ مربع بخش دوم، بعلاوهٔ مربع مفروض G، برابر با مربع AB باشد؟ پس باید روی AB مربعی بنا کنیم زیرا در آن صورت می‌توانیم آن را تجسم کنیم و به خاطر آن‌که نکتهٔ اصلی در پایان ترسیم است.

سپس فرض می‌کنیم AB در نقطهٔ D چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. در این‌صورت، باید DE را موازی با BZ رسم کنیم. پس می‌دانیم که مساحت DZ مساحت ایجاد شده به‌وسیلهٔ AB و DB است. پس باید مربعی بر خط AD رسم کنیم، که مربع AT را رسم می‌کنیم. اگر مربع AT بعلاوهٔ مساحت DZ بعلاوهٔ مربع G برابر باشد با مربع AB، لازم است مساحت KE با مربع G برابر باشد، اما مساحتهای هر دو متمم برابرند، پس مساحت KE با مساحت BT برابر است، زیرا متمم هستند. اما مساحت BT مساحتی است که به‌وسیلهٔ خطهای AD و DB ایجاد شده است.

پس اگر بر قطر AB نیمدایرهٔ AE′B را بنا کنیم، و اگر DE′ را عمود بر AB رسم کنیم، حاصلضرب خطهای AD و DB با مربع DE′ برابر می‌شود. بنابراین خط DE′ ضلع مربع G می‌شود. پس لازم است که ضلع G بزرگ‌تر از نصف خط AB نباشد، زیرا ترسیم آن ممکن نیست. پس شرط دیگری به شرط مسئله افزوده شده است.



ترکیب: بر AB نیمدایرهٔ AE′B را می‌کشیم و در آن عمودی بر AB مساوی با ضلع G، یعنی DE′ قرار می‌دهیم. آن را تا E امتداد می‌دهیم. روی AD مربع AT را بنا می‌کنیم. پس مساحت AB در BD با DZ برابر است و مربع G برابر است با AD ضرب در DB یعنی

مساحت KE. مربع AD، AT است. پس AB را در D به دو بخش تقسیم کرده‌ایم چنان‌که مساحت AB در BD بعلاوهٔ مربع DA بعلاوهٔ مربع G برابر است با مربع خط AB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

اگر بخواهیم AB را مثلاً در D به دو بخش تقسیم کنیم، چنان‌که مساحت AD در DB بعلاوهٔ مربع AD بعلاوهٔ مربع G برابر باشد با مربع AB، مربع AZ را بر AB بنا می‌کنیم.

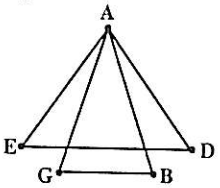
AD در BD را مساحتی مثلاً DK قرار می‌دهیم و KT را موازی با AD می‌کشیم. سپس نشان می‌دهیم که AH مربع AD است. از تفاضل نتیجه می‌شود که مساحت TZ با مساحت مربع G برابر است. اما مساحت TZ برابر است با AB در BD.

بنابراین، به روش ترکیب باید بر قطر AB نیمدایرهٔ AEB را بنا کنیم و درون آن، ضلع مربع G را به‌صورت وتری که یک سرش B است، یعنی BE را قرار دهیم. ED را عمود بر AB رسم می‌کنیم. روشن است که تقسیم چنان‌که می‌خواستیم انجام شده است، زیرا مربع خط EB با مساحت TZ برابر است. مساحت DK برابر است با AD در DB و مربع ضلع AD، مربع AH است. پس AB را در D چنان تقسیم کرده‌ایم که AD در DB بعلاوهٔ مربع AD بعلاوهٔ مربع G برابر است با مربع AB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

(۸. مسئله‌های گوناگون)

چون این چیزها را شرح دادیم، اکنون این کتاب را تمام می‌کنیم تا بحث آن زیاد به درازا نکشد و ذهن خواننده خسته نشود و از موضوع روی نگرداند.

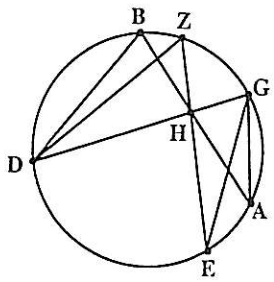
بررسی ماهیت شکلها و ویژگیهای خاص آنها براساس ذاتشان به دو صورت است: (۱) یا ضرورت ویژگیهای خاص آنها را با تغییر انواعشان چنان‌که ناشی از برداشت حسی باشد یا چنان‌که برداشت حسی در آن مؤثر باشد تجسم می‌کنیم؛ (۲) یا وجود این خواص را به‌عنوان فرض می‌پذیریم و آنها را به خواصی که پیش از آنها یعنی مقدمات می‌آیند یا به آنها یعنی به آن خواصی که پس از آنها می‌آیند، طبق ضرورت هندسی یعنی استدلال ریاضی مرتبط می‌کنیم ــ بنابراین اکنون مثالی از این قبیل عرضه می‌کنیم تا راهنمای کسی باشد که با این فن سروکار دارد.



در مورد تجسم ضرورت ویژگیهای خاص از طریق تغییر دادن انواع آنها، چنان‌که برداشت حسی در آن مؤثر باشد، موضوع چنان است که قبلاً ضمن یک مثال بیان کردیم، یعنی اینکه در هر مثلث مجموع زاویه‌ها ثابت است. یک مثال (دیگر)؛

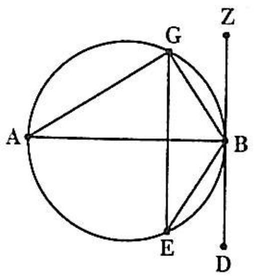
اگر دو مثلث ABG و ADE متساوی‌الساقین باشند، ولی ضلع AD با ضلع AB برابر باشد و زاویهٔ DAE از زاویهٔ BAG بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه قاعدهٔ DE بزرگ‌تر است از قاعدهٔ BG. این ویژگی خاص را نیز به کمک برداشت حسی می‌توان تجسم کرد. پژوهشگر جستجوی ویژگیهای خاص را به‌این صورت آغاز می‌کند.

دربارهٔ جنبهٔ دوم، که موجب می‌شود پژوهشگر آنها را عمیقاً به شیوهٔ هندسی جستجو کند، چنان‌که ذهنش برای آن تربیت شود، و تصور ویژگیهای خاص آن برایش روشن شود و در ذهنش جای بگیرد، مثالی در ذیل می‌آوریم:



دایرهٔ AGB را درنظر می‌گیریم و دو وتر AB و GD را در آن اختیار می‌کنیم که یکدیگر را در نقطهٔ H قطع می‌کنند. بررسی می‌کنیم که از چه لحاظ تساوی مساحت AH در HB با مساحت GH در HD لازم می‌آید.

پس GA و BD را وصل می‌کنیم. در این‌جا دو مثلث متشابه AGH و BHD داریم، زیرا زاویه‌های متساوی روی محیط دایره، روبه‌رو به کمانهای برابرند. پس نسبت GH به AH مثل نسبت BH به HD است. به همین ترتیب، اگر خط EHZ را بکشیم و GE و DZ را رسم کنیم، مثلثهای GEH و DHZ متشابهند، پس ضلعهای آنها متناسبند.



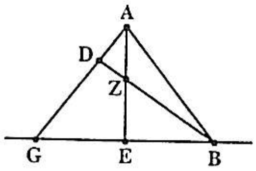
دربارهٔ بررسی این موضوع که هر قطعهٔ دایره شامل زاویه‌ای است برابر با زاویهٔ بین وتر آن قطعه و خط مماس [یعنی زاویهٔ ظلّی برابر زاویهٔ محاطی است]: دایرهٔ ABG را به قطر AB می‌کشیم. BD را مماس بر آن رسم می‌کنیم.

روشن است که نیمدایرهٔ AGB شامل زاویه‌ای برابر با زاویهٔ ABD است. پس BD را امتداد می‌دهیم. لازم است به شیوه‌ای طبیعی تغییر انواع این شکل و ضرورت ویژگیهای خاص آن را بررسی کنیم. بنابراین BG و AG و GE را وصل می‌کنیم. چون تغییر زاویهٔ B به‌طور اساسی بین محیط دایره و خطهای AB و DZ صورت می‌گیرد، این خاصیت در این‌جا ضروری است. چون مثلث ABG قائم‌الزاویه است و کمان GB روبه‌رو به زاویه‌های مساوی است، زاویهٔ E از مثلث GEB با زاویهٔ A از مثلث AGB برابر است.

اما به زاویهٔ B از مثلث AGB زاویه‌ای اضافه شده است، یعنی زاویهٔ ABE. پس بر این قیاس

لازم است از زاویهٔ AGB همان (مقدار) که به زاویهٔ B افزوده شد کاسته شود و آن زاویهٔ AGE است.

پس تغییر انواع این شکل و ضرورت ویژگیهای خاص آن براساس تساوی زاویهٔ EDB با زاویه‌های محاط در کمان EAGB طبق مشاهده و با استدلال هندسی روشن شد. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.



اکنون شکلی را به روش تحلیل آغاز می‌کنیم تا برای فرد مبتدی تمرینی باشد. موضوع چنین است: نقطهٔ A و خط BG مفروض‌اند می‌خواهیم از نقطهٔ A خطهای AB و AG را متوجه به خط BG چنان ترسیم کنیم که با یکدیگر زاویهٔ معلوم A بسازند، یعنی: زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ مفروض بسازند و چنان باشند که مساحت AB در AG مقدار معلوم باشد.

تحلیل: AB در AG را شامل مساحتی معلوم و زاویه‌ای معلوم، یعنی زاویهٔ A می‌گیریم. اکنون عمودهای AE و BD را رسم می‌کنیم.

چون AB در AG معلوم است و شکل مثلث ABD معلوم است ـ زیرا زاویه‌های A و B معلوم‌اند ـ نسبت AB به AD معلوم است. پس نسبت AB در AG به AD در AG معلوم است زیرا AG جملهٔ مشترک است. پس AD در AG معلوم است. اما AE در AZ با AD در AG برابر است زیرا دو مثلث AZD و AGE متشابه‌اند و AE معلوم است، پس AZ معلوم است.-بنابراین اگر روی AZ کمانی حاوی زاویه‌ای برابر با زاویهٔ ABD رسم کنیم، از محل برخورد آن با خط مفروض، AB را رسم می‌کنیم و AG با آن زاویهٔ معلوم را خواهد ساخت.

سپس ترکیب را انجام می‌دهیم و آن را به روش ترکیب اثبات می‌کنیم.

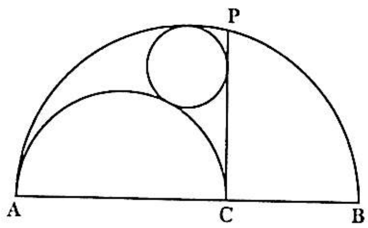
در این‌جا کتاب را تمام می‌کنیم، زیرا این مثالها برای کسانی که تمرین می‌کنند کافی است. این چیزها که می‌خواستیم برای آسان کردن راههای به‌دست آوردن شکلهای هندسی بیان کنیم برای کسی که به آنها توجه کند، آنها را وسیعاً مطالعه کند و با دنبال کردن آن‌چه به او نشان داده‌ایم و ذکر کرده‌ایم تمرین کند، کافی است.

توفیق ما با خدای تعالی است و به او توکل می‌کنیم. او برای ما کافی و یاری‌دهنده است.

کتاب تمام شد به حمد خدا و حسن توفیق او.

مسائل برای حل: از کتاب سوی‌نامه

۱ــ ترسیم: دوایر به قطر AC و AB داده شده‌اند همچنین عمود PC دایره‌ای رسم کنید که بر PC و نیم‌دایره AB و نیم‌دایره AC مماس باشد.



۲ــ سه برابر کردن زاویه و تثلیث زاویه: فرض کنید زاویه C داده شده باشد. به کمک خط‌کش و پرگار زاویه‌ای رسم کنید که سه برابر آن باشد. یا به‌عبارت دیگر کمانی از دایره داده شده است کمانی از دایره را بیابید که سه برابر آن باشد.

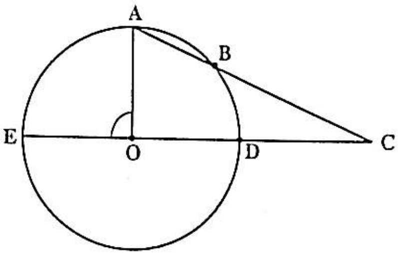
AB دلخواه

$BC = OD = R$

$\Rightarrow$ O مرکز دایره

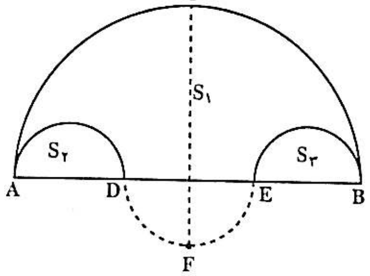
$\widehat{BD} = \frac{۱}{۳}\widehat{AE}$ یا

$\hat{O} = ۳\hat{C}$



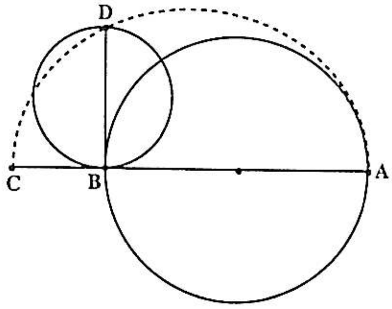
آیا عکس این عمل را می‌توان با خط‌کش و پرگار انجام داد.

۳ــ نیم‌دایره‌ای به قطر AB مفروض است. دو پاره‌خط AD و EB را مساوی با یکدیگر اختیار می‌کنیم که $AD < \frac{۱}{۲}AB$.



می‌خواهیم دایره‌ای را رسم کنیم که مساحت آن برابر است با $S_۱ - S_۲ - S_۳$. جواب دایره به قطر F.CF مرکز نیم‌دایره به قطر DE.

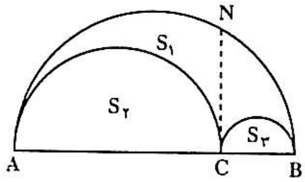
۴ــ یک دایره مفروض است به‌طور مستقیم با خط‌کش و پرگار دایره‌ای رسم کنید که مساحت آن $\frac{۱}{۵}$ دایره مفروض باشد.



رسم دایره‌ای که مساحت آن $\frac{۱}{۵}$ دایره مفروض باشد

$$BC = \frac{۱}{۵} AB$$

امتداد تا نقطه C نیم‌دایره‌ای به قطر AC رسم کرده از B عمودی اخراج می‌کنیم نقطه D به‌دست آمده پس BD قطر دایره مفروض است.



۵ــ نیم‌دایره‌ای به قطر AB در اختیار داریم دو نیم‌دایره به‌قطرهای AC و CB درنظر بگیرید دایره‌ای رسم کنید که مساحت آن برابر باشد با $S_۱ - S_۲ - S_۳$

جواب: دایره به قطر CN . (از کتاب ماخوزات ارشمیدس)

بخش ۱ــ روشهای حل مسائل ترسیم هندسی

جلسه ۲۰ــ ارزشیابی حل مسئله

فعالیت: از بچه‌ها بخواهید مسئله رسم پاره‌خطهایی متناسب با پاره‌خط مفروض را حل کنند و تمام اعمالی را که انجام داده‌اند را بنویسند. سپس چند نمونه از برگه‌های پاسخ کتبی دانش‌آموزان را با توجه به سند ارزشیابی حل مسئلهٔ راهنمای معلم ارزشیابی کنید. مراحل حل مسئله پولیا که در سند ارزشیابی آمده است را در کلاس درس تدریس نمایید.

معرفی کتاب: «چگونه مسئله حل کنیم» نوشته جورج پولیا ترجمه احمد آرام.

مسائل برای حل

مراجعه کنید به کتاب هنر حل مسئله

بخش ۱ـ روشهای حل مسائل ترسیم هندسی

جلسه ۲۱ـ استدلال با کمک تغییر پیوسته

فعالیت مجموع زوایای مثلث

اهداف فعالیت: تغییر در شکلهای هندسی، استدلال با کمک تغییر، استراتژیهای حل مسئله سجزی یادداشت روند کشف در حل مسئله، یادداشت استدلال نهایی حل مسئله.

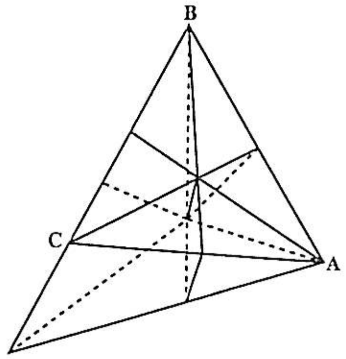
سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مسئله را در حالت خاص حل کنید. مثلاً برای دو مثلث با زوایایی که دوست دارید حکم را ثابت کنید. بین این مثلثها ارتباط برقرار کنید. اگر یک رأس مثلث روی یکی از ضلعها حرکت کند آیا مجموع زوایا ثابت می‌ماند؟ آیا با دانستن این نکته می‌توان ثابت کرد مجموع زوایای هر دو مثلث برابر است؟ آیا می‌توانید حکم را برای یک دسته از مثلثها یکجا ثابت کنید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف مراحل فعالیت را مطابق کتاب در کلاس اجرا کنید و با سؤالهای مناسب دانش‌آموزان را در روند حل مسئله درگیر نمایید.

در یک کلاس متوسط حل مسئله را به‌عهده دانش‌آموزان بگذارید. ولی در موقعیتهای مناسب به آنها کمک کنید تا در جهت درست حرکت کنند. بحث و نقد نظرات دیگران را مورد تشویق قرار دهید.

در یک کلاس قوی ابتکار عمل را کاملاً به دانش‌آموزان واگذارید. وادارشان کنید تا اشتباهاتشان را خودشان پیدا کنند. استراتژیهای حل مسئله را که به کار می‌برند به آنها گوشزد کنید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با استراتژیهای حل مسئله مراجعه کنید به کتاب «آموزش هنر حل مسئله»



خود را بیازماییم

بنابر قضیهٔ تالس با تغییر پیوسته یک رأس روی یک ضلع مجاور میانه‌های مثلث چنان تغییر می‌کنند که محل تلاقی آنان به سوی محل تلاقی جدیدی حرکت کند.

پس از مثلث متساوی‌الاضلاع که می‌دانیم در آن میانه‌ها متقاطعند شروع می‌کنیم و به مثلث دلخواه می‌رویم.

بخش ۲ـ حل معادله با ترسیمهای هندسی

جلسه ۲۲ـ ترسیمهای هندسی

فعالیت ترسیم مثلث

اهداف فعالیت: تغییر در شکلهای هندسی، استدلال با کمک تغییر، استراتژیهای حل مسئله سجزی یادداشت روند کشف در حل مسئله، یادداشت استدلال نهایی حل مسئله

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: چند مثلث رسم کنید که با مثلث داده شده مساحت برابر داشته باشند. برای رسم دقیق از خط‌کش و پرگار کمک بگیرید. چند مثلث رسم کنید که با مثلث داده شده در یک زاویه برابر باشند. آیا می‌توانید این مثلثها را به محل دیگری منتقل کنید؟ چند مثلث با مساحت برابر با مثلث داده شده وجود دارند؟ چند مثلث با یک زاویه داده شده وجود دارند؟ آیا می‌توان همهٔ آنها را بدست آورد؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف دانش‌آموزان را به‌بحث در مورد مسئله وادارید. با راهنماییهای مناسب به آنها کمک کنید خودشان مسئله را حل کنند. استراتژیهایی را که به‌کار می‌برند به آنها گوشزد کنید. پس از ارائه روش رسم از آنها بخواهید استدلالی برای صحت ادعای خود بیاورند.

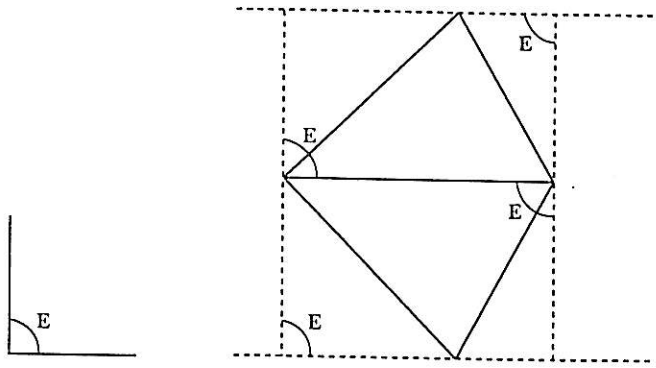
در یک کلاس متوسط دانش‌آموزان می‌توانند خودشان این مسئله را حل کنند. از آنها بخواهید خودشان استراتژیهایی را که به‌کار می‌برند نام ببرند. یافته‌های دانش‌آموزان را در پایان جمع‌آوری و خلاصه کنید.

در یک کلاس قوی یک ضلع مثلث خواسته شده را نیز مفروض بگیرید. آنها احساس خواهند کرد که با اضافه شدن شرایط مسئله مشکل‌تر می‌شود. خواسته‌های مسئله را به‌ترتیبهای متفاوتی برآورده کنید تا تنوع راه حل را ببینند. دانش‌آموزان را به بحث و نقد نظرات دیگران وادارید.

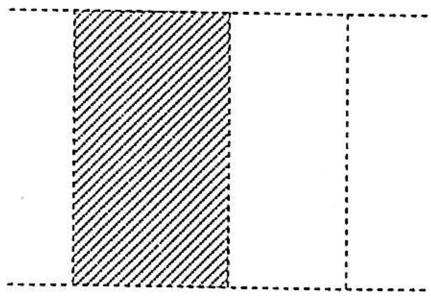
معرفی کتاب: برای مسائل ترسیم مراجعه کنید به «دایرةالمعارف هندسه» نوشته محمدهاشم رستمی

خود را بیازماییم

متوازی‌الاضلاعی با زاویهٔ E با دو برابر مساحت چهارضلعی داده شده



متوازی الاضلاع با زاویهٔ E با مساحتی برابر مساحت چهارضلعی داده شده



بخش ۲ـ حل معادله با ترسیمهای هندسی

جلسه ۲۳ـ حل معادله با ترسیمهای هندسی

فعالیت حل معادله به روش هندسی

اهداف فعالیت: تغییر در شکلهای هندسی، استدلال جبری در اشکال هندسی، استراتژیهای حل مسئله سجزی، یادداشت روند کشف در حل مسئله، یادداشت استدلال نهایی حل مسئله

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: از مقوا و قیچی برای اثبات حکم استفاده کنید. طولها را نامگذاری کنید. مسئله را به‌زبان جبری ترجمه کنید. مسئله را در حالت خاص بررسی کنید. چرا حکم در حالت خاص صحیح است؟ آیا می‌توانید این استدلال را در حالت کلی بکار ببرید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیتها را با کمک دانش‌آموزان خودتان در کلاس اجرا کنید. با پرسشهای مناسب ذهن ایشان را با مسئله درگیر کنید. اهداف فعالیت را برای ایشان روشن کنید.

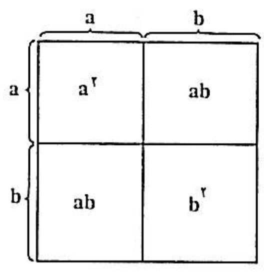
در یک کلاس متوسط حل مسئله را به دانش‌آموزان بسپارید اما در فرصتهای مناسب ایشان را راهنمایی کنید. استراتژیهایی را که بکار می‌برند به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را به بحث و نقد آراء یکدیگر تشویق کنید: آنها را با مسئله تنها بگذارید و به آموزشهای جنبی اکتفا کنید. اگر در مدت معین، مسئله در کلاس حل نشد مسئله را برای دانش‌آموزان همراه با نام بردن استراتژیها حل کنید.

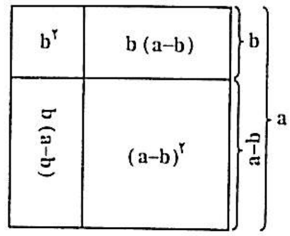
معرفی کتاب: برای حل معادلات درجه دوّم به روش هندسی مراجعه کنید به کتاب «اصول اقلیدس»

خود را بیازماییم

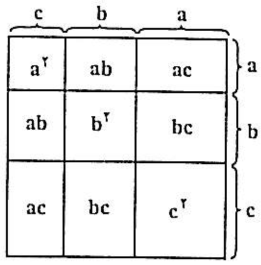
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$$



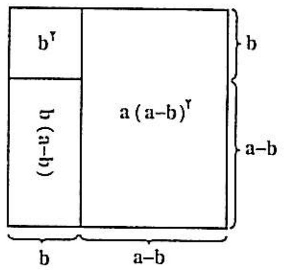
$$a^{۲} = (a-b)^{۲} + b^{۲} + ۲b(a-b)$$
$$\Rightarrow (a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$$



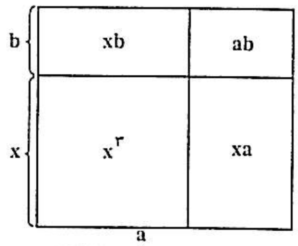
$$(a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$



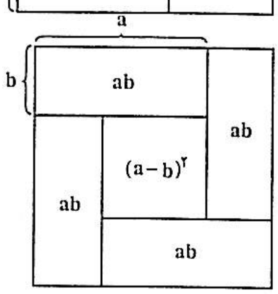
$$a^{۲} = b^{۲} + a(a-b) + b(a-b)$$
$$\Rightarrow a^{۲} - b^{۲} = (a-b)(a+b)$$



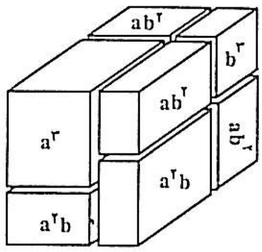
$$(x+a)(x+b) = x^{۲} + ax + bx + ab$$
$$= x^{۲} + (a+b)x + ab$$



$$(a+b)^{۲} = (a-b)^{۲} + ۴ab$$



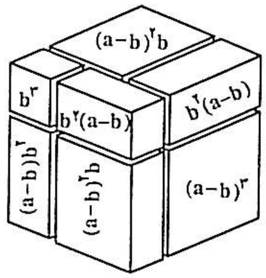
$$(a-b)^{۳} = a^{۳} - \left[۳(a-b)b^{۲} + ۳(a-b)^{۲}b + b^{۳} \right]$$
$$\Rightarrow (a-b)^{۳} = a^{۳} - ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} - b^{۳}$$



$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$



بخش ۲ـ حل معادله با ترسیمهای هندسی

جلسه ۲۴ـ محاسبات چندجمله‌ایها

فعالیتهای جمع و ضرب چندجمله‌ایها

اهداف فعالیت: محاسبات نمادین، الگوریتمهای محاسبه، پیدا کردن مصداق برای محاسبات نمادین مربع کامل کردن، آزمایش محاسبه، قرار دادن عدد در چندجمله‌ای.

سؤالهایی را که می‌توانید بپرسید: با جمع و ضرب چندجمله‌ایها، سیستمی مانند اعداد حقیقی بدست می‌آید. آیا جمع و ضرب چندجمله‌ایها نیز از قوانین جمع و ضرب اعداد حقیقی پیروی می‌کند. شما کدام روش را برای محاسبهٔ روانتر مناسب می‌دانید؟ در یک تساوی چندجمله‌ایها به‌جای متغیر عددگذاری کنید. آیا بازهم تساوی برقرار است؟ آیا می‌توانید از این نکته برای آزمایش محاسبات چندجمله‌ای استفاده کنید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف انجام محاسبات و خلاقیت در آن را برعهدهٔ دانش‌آموزان بگذارید ولی روشهای ارائه شده در کتاب را به آنها معرفی کنید و کار آمدی این روشها را در کلاس مقایسه نمایید.

در یک کلاس متوسط از دانش‌آموزان تنوع روشهای محاسباتی بخواهید. آنها خواهند توانست مدلهای نمادین متعددی برای جمع و ضرب چندجمله‌ایها ارائه دهند.

در یک کلاس قوی به کاربرد اتحادها در ضرب چندجمله‌ایها تأکید کنید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با حساب چندجمله‌ایها مراجعه کنید به کتاب «روشهای جبر» نوشته پرویز شهریاری

بخش ۳ـ خطا در حل مسائل واقعی

جلسه ۲۵ـ خطا در نقشه‌کشی

فعالیت نقشه‌کشی زمین کشاورزی

اهداف فعالیت: خطا، خطای منتشر شده، تقریب با اشکال هندسی، اندازه‌گیری، سطوح تراز خطای ابزار، خطای انسانی، روش ارشمیدس

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: چه ابزاری برای نقشه‌کشی لازم دارید؟ در کاربرد هریک از این ابزارها چه خطاهایی وارد می‌شوند؟ چه خطای انسانی در نقشه‌کشی و اندازه‌گیریهای آن وارد می‌شود؟ مساحت زمین را چگونه حساب می‌کنید؟ برای تقریب زدن مساحت آن را چگونه تقسیم می‌کنید؟ خطاهایی که در این تقریب زدن وارد می‌شوند چه خطاهایی هستند؟ چکار کنیم تا خطای وارد شده کم‌تر شود؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف دانش‌آموزان را به‌طور عملی درگیر اندازه‌گیری و نقشه‌کشی کنید. ابزارهای اندازه‌گیری را در اختیارشان بگذارید. همین که زمین مدرسه را به‌مستطیلهایی تقسیم کنند برای مطرح کردن نکات مربوط به خطا کافی است.

در یک کلاس متوسط ابزارهایی که می‌توان برای مساحی به‌کار برد را به دانش‌آموزان معرفی کنید بعد از آنها بخواهید روشی برای مساحی یک زمین ناهموار تعیین کنند.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان ابتکار عمل را در دست بگیرند. شما با پرسشهایی روشهایی که پیشنهاد می‌کنند نقد کنید تا مرحله به مرحله روشهای اندازه‌گیری و مساحی خود را دقیق‌تر کنند. همهٔ دانش‌آموزان را درگیر کنید. بعد از آنها بخواهید یک نقشهٔ واقعی از یک زمین ناهموار رسم کنند.

معرفی کتاب: «نقشه‌برداری کاربردی» نوشته احمد محبوب‌فر

زندگینامهٔ علمی بیرونی

(ت. خوارزم [اکنون جمهوری کاراکالپاکسکایا]، ۳۶۲ هـ ق/ ۳۵۲ ؛ و. غزنه [؟] [اکنون غزنه، افغانستان]، پس از ۴۴۲ هـ ق / ۴۲۹)، اخترشناسی، ریاضیات، جغرافیا، تاریخ.

هیچ اطّلاعی دربارهٔ اصل و نسب و دورهٔ کودکی بیرونی در دست نیست. نزد ابونصر منصور علم آموخت. در هفده سالگی از حلقه‌ای که نیم درجه به نیم درجه مدرّج شده بود استفاده کرد تا

ارتفاع خورشیدی نصف‌النهاری را در کاث رصد کند، و بدین‌ترتیب عرض جغرافیایی زمینی آن را استنتاج نماید. چهار سال بعد برای اجرای یک رشته از این تشخیصها نقشه‌هایی کشید و حلقه‌ای به قطر پانزده ذراع تهیه کرد.

در ۹ خرداد ۳۷۶، بیرونی ماه‌گرفتگی (خسوفی) را در کاث رصد کرد، و قبلاً با ابوالوفا ترتیبی داده شده بود که او نیز در همان زمان همین رویداد را از بغداد رصد کند. اختلافی زمانی که از این طریق حاصل شد به آنان امکان داد که اختلاف طول جغرافیایی میان دو ایستگاه را حساب کنند. وی همچنین با ابن‌سینا فیلسوف برجسته و پزشک بخارایی به مکاتبات تندی دربارهٔ ماهیّت و انتقال گرماو نور پرداخت. بیرونی به نقاط مختلف هندوستان سفر کرد و در آنها اقامت گزید و عرض جغرافیایی حدود یازده شهر هند را تعیین نمود. خود بیرونی می‌نویسد که در زمانی که قلعهٔ نندنه (nandana) بسر می‌برد از کوهی در مجاورت آن به‌منظور تخمین زدن قطر زمین استفاده کرد. نیز روشن است که او زمان زیادی را در غزنه گذرانده است. تعداد زیاد رصدهای ثبت شده‌ای که به توسّط او در آنجا صورت گرفته است با رشته‌ای از گذرهای خورشید بر نصف‌النّهار شامل انقلاب تابستانی سال ۳۹۸ آغاز می‌شود، و ماه گرفت روز ۳۰ شهریور همان سال را نیز دربر دارد. او به رصد اعتدالین و انقلابین در غزنه ادامه داد، که آخرین آنها انقلاب زمستانی سال ۴۰۰ بود.

بیرونی، هنگامی که شصت‌و سه ساله بود، کتابنامه‌ای از آثار محمدبن زکریای رازی پزشک تهیّه نمود و فهرستی از آثار خود را ضمیمهٔ آن کرد. این فهرست به ۱۱۳ عنوان سرمی‌زند که بعضی از آنها برحسب موضوع و گه‌گاه با اشارهٔ کوتاهی به فهرست مندرجات آنها تنظیم شده‌اند. این فهرست ناقص است، زیرا که بیرونی دست‌کم چهارده سال پس از تنظیم آن زنده بود و تا لحظهٔ مرگ نیز کار می‌کرد. به‌علاوه هفت اثر دیگر او موجود است و از تعداد فراوان دیگری هم نام برده شده است. تقریباً چهار پنجم آثار او از بین رفته‌اند بی‌آن که امیدی به بازیافت آنها باشد. از آنچه برجای مانده، در حدود نیمی به‌چاپ رسیده است. علایق بیرونی بسیار گسترده و ژرف بود، و او تقریباً در همهٔ شعبه‌های علومی که در زمان وی شناخته شده بودند، سخت کار می‌کرد. وی از فلسفه و رشته‌های نظری نیز بی‌اطلاع نبود اما گرایش او به‌شدت به‌سوی مطالعهٔ پدیده‌های قابل مشاهده، در طبیعت و در انسان، معطوف بود. در داخل خود علوم نیز بیش‌تر مجذوب آن رشته‌هایی بود که در آن زمان به تحلیل ریاضی درمی‌آمدند. در کانی‌شناسی، داروشناسی، و زبان‌شناسی، یعنی رشته‌هایی که در آنها اعداد نقش چندانی نداشتند، نیز کارهایی جدی انجام داد؛ اما در حدود نیمی ازکل محصول کار او در اخترشناسی، اختربینی و رشته‌های مربوط به آنها بود، که علوم دقیقهٔ به تمام معنی آن روزگاران به‌شمار

می‌رفتند. ریاضیات به سهم خود در مرتبهٔ بعدی جای می‌گرفت، اما آن هم همواره ریاضیات کار بسته بود. آثار بیرونی که هنوز در دسترس هستند بدین قرارند: آثارالباقیه؛ اسطرلاب؛ سدس؛ تحدید؛ چگالیها؛ سایه‌ها؛ وترها؛ پاتنجلی؛ التّفهیم؛ ماللهند؛ قرّة الزیجات؛ قانون؛ ممرها؛ الجماهر؛ و صیدنه. نظرپردازی نقش کوچکی در تفکر او ایفا می‌کرد؛ وی بر بهترین نظریّه‌های علمی زمان خود تسلّط کامل داشت؛ اما دارای ابتکار و اصالت زیادی نبود و نظریّه‌های تازه‌ای از خود نساخت.

چند نکته دربارهٔ خطاها

خطاهایی که در اندازه‌گیری فاصله وارد می‌شوند بستگی به روش اندازه‌گیری دارند. می‌توان یکدسته‌بندی کلی از این خطاها ارائه کرد.

۱ــ خطای دستگاهی که ناشی از ابزار اندازه‌گیری است.

۲ــ خطای اتفاقی که ناشی از نارسایی حواس انسان است.

اندازه‌گیری مساحت به روشهای زیر انجام می‌گیرد.

۱ــ اندازه‌گیری به روش مستقیم مانند اندازه‌گیری با قدم انسانی یا اندازه‌گیری با دوچرخه و اندازه‌گیری با زنجیرهای مسّاحی یا نوار فلزی.

۲ــ اندازه‌گیری به کمک فاصله‌یابهای الکترونیکی

در هریک از این روشها خطاهای خاصی وارد می‌شوند.

مثلاً در اندازه‌گیری با نوار، درست نبودن طول نوار، افقی نبودن نوار، خطای مربوط به تغییرات درجه حرارت، خطای کشش نامتناسب نوار، در امتداد نبودن نوار به اثر باد یا سایر شرایط نامساعد، خطای مربوط به شکم نوار و مانند آن.

خود را بیازماییم

خطاهایی که در ترازیابی وارد می‌شوند، کروی بودن زمین، عمودی نبودن یا افقی نبودن ابزارهایی که در ترازیابی استفاده می‌شوند، و مانند آن هستند.

بخش ۳ــ خطا در حل مسائل واقعی

جلسه ۲۶ــ خطای نسبی

فعالیت نقاشی و فعالیت خطای نسبی محیط و مساحت و فعالیت رشد سلول

اهداف فعالیت: خطا، خطای منتشر شده، خطای نسبی، تقریب محیط و مساحت و حجم، اندازه‌گیری، محاسبات چندجمله‌ای، رشد

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: محیط و مساحت مربع به ضلع ۴ cm چقدر است؟ اگر طول واقعی ۴+E cm باشد. محیط و مساحت واقعی چقدر است؟ اختلاف محیط و مساحت اندازه‌گیری شده با مقدار واقعی آن چقدر است؟ نسبت تغییرات محیط و مساحت را به کل محیط و مساحت حساب کنید و آنها را مقایسه کنید. همین محاسبات رابرای محیط و مساحت دایره انجام دهید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت نقاشی و فعالیت خطای نسبی را خودتان به اجرا بگذارید و با پرسش ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید. مفاهیم خطا و خطای نسبی را برایشان روشن کنید. فعالیت رشد سلول را با راهنمایی به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را تا پایان فعالیت هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیت نقاشی را به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را با سؤالات مناسب هدایت کنید. فعالیت خطای نسبی را خودتان به اجرا بگذارید. با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید. سپس فعالیت رشد سلول را به آنها بسپارید. یافته‌های آنان را خلاصه و منظم کنید.

در یک کلاس قوی فعالیت نقاشی و خطای نسبی محیط و مساحت را به عهده دانش‌آموزان بگذارید. بحث و نقد آراء دیگران را تشویق کنید. فعالیت رشد سلول را خودتان به اجرا بگذارید و خطای نسبی را با کمک آن جمع‌بندی کنید. نکاتی را که دانش‌آموزان به آن رسیده‌اند منظم و خلاصه کنید.

بخش ۴ـ کنترل خطا

جلسه ۲۷ـ کنترل خطا در محاسبه مساحت

فعالیت کنترل خطا

اهداف فعالیت: تنوع روشهای محاسبهٔ مساحت، خطا، خطای منتشرشده، خطای ابزار اندازه‌گیری محاسبات چندجمله‌ای، کنترل خطا

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مساحت یک متوازی‌الاضلاع را به چند روش می‌توان محاسبه کرد؟

اگر خطای ابزار اندازه‌گیری ما حداکثر E باشد، در محاسبه مساحت متوازی الاضلاع حداکثر چقدر خطا داشته‌ایم؟ مساحت مثلث را به چند روش می‌توان محاسبه کرد؟ خطای منتشر شده در محاسبهٔ مساحت مثلث با کدامیک از این روشها کم‌تر می‌شود؟ از جملات به شکل E^2 صرف‌نظر کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف حالت متوازی‌الاضلاع را خودتان در کلاس اجرا کنید و با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموز را درگیر محتوا نمایید. سپس همین محاسبات را در مورد مثلث به دانش‌آموزان واگذارید. اشتباهات دانش‌آموزان را به آنها گوشزد نمایید.

در یک کلاس متوسط پس از شرح کنترل خطا انجام محاسبات متوازی‌الاضلاع و مثلث را به دانش‌آموزان واگذارید. آنها را با سؤالات مناسب هدایت کنید ولی ابتکار عمل را به آنها بسپارید. پس از حل مسئله یافته‌های آنها را خلاصه و منظم کنید.

در یک کلاس قوی انتخاب اشکال را به دانش‌آموزان واگذارید. بحث و انتقادات آنان را به‌طور جدی نقد کنید. روحیهٔ تحقیق را در ایشان به‌وجود آورید. خلاقیت را مورد تشویق قرار دهید در پایان اگر فکر می‌کنید محاسباتی لازم است در کلاس مطرح شود آن را خودتان انجام دهید. دانش‌آموزان را در طرح این محاسبات شرکت بدهید.

بخش ۴ـ کنترل خطا

جلسه ۲۸ـ اندازه‌گیری در حال حرکت

فعالیت فاصلهٔ درخت از ریل راه‌آهن

اهداف فعالیت: خلاقیت در ارائه روشهای محاسبه، خطا، خطای منتشر شده، خطای ابزار اندازه‌گیری، خطای انسانی، کنترل خطا.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: چگونه می‌توان از روی ریل راه‌آهن فاصله یک درخت تا ریل را که در دسترس نیست محاسبه کرد؟ اگر در قطاری در حال حرکت باشیم چطور؟ از ابزاری مانند زاویه‌یاب چه استفاده‌ای می‌توان کرد؟ سرعت حرکت قطار را چگونه می‌توان حساب کرد؟ چه خطاهایی در محاسبات شما وارد می‌شوند؟ چگونه می‌توان آنها را کنترل کرد؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف با پرسش و پاسخ و بحث دسته‌جمعی دانش‌آموزان را به ایده‌های اساسی حل این مسئله رهنمون کنید بعد خودتان حل را پیاده نمایید و از دانش‌آموزان بخواهید که خطاهای وارد شده را پیدا کنند.

در یک کلاس متوسط اجزای فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید. در پایان بحث را جمع‌بندی کنید و نکاتی را که به آن توجه نکرده‌اند به آنان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از اجرای فعالیت از دانش‌آموزان بخواهید فعالیتهایی نظیر این دو مورد اندازه‌گیری در حال حرکت را طراحی کنند. سپس یکی از آنها را انتخاب کنید و از دانش‌آموزان بخواهید دربارهٔ آن بحث و بررسی کنند. بحث را بازی گذارید تا دانش‌آموزان خارج از کلاس هم به این مسئله فکر کنند.

معرفی کتاب: برای آشنایی مقدماتی با ایده‌های نسبیت انیشتین مراجعه کنید به کتاب «فیزیک» نوشته اگونسوفین

زندگینامه علمی خوارزمی

(ت. قبل از ۱۷۹/۱۸۵ ؛ و. بعد از ۲۲۶/۲۳۳)، ریاضیات، اخترشناسی، جغرافیا.

اجداد خوارزمی احتمالاً اهل خوارزم بودند، ولی خودش احتمالاً از قطر بولی ناحیه‌ای نزدیک بغداد بود ؛ به هنگام خلافت مأمون (از ۱۹۲ تا ۲۱۲) وی عضو «دارالحکمه»، که مجمعی از دانشمندان در بغداد به سرپرستی مأمون بود، گردید. الجبر والمقابله، که به مأمون تقدیم شده، کتابی است دربارهٔ ریاضیات مقدماتی و شاید نخستین کتاب جبری باشد که به عربی نوشته شده است ؛

دانش‌پژوهان بر سر این که چه مقدار از محتوای کتاب از منابع یونانی و هندی و عبری گرفته شده است اختلاف نظر دارند. اثر ریاضی دیگری که چندی بعد از جبر نوشته شد، رساله‌ای است مقدماتی در حساب که ارقام هندی (یا، به‌غلط، ارقام عربی) در آن به‌کار رفته بود، و نخستین کتابی بود که نظام ارزش مکانی دهدهی را (که آن نیز از هند بود) به نحوی اصولی و منظم شرح می‌داد. اثر دیگری که به مأمون تقدیم شد زیج‌السند هند بود، که نخستین اثر اخترشناسی عربی است که به‌صورت کامل برجای مانده و شکل جداول آن از جداول بطلمیوس تأثیر پذیرفته است. کتاب صورت الارض، که اثری است در زمینهٔ جغرافیا، اندک زمانی بعد از سال ۱۹۵ـ۱۹۶ نوشته شده است، و تقریباً فهرست طولها و عرضهای همهٔ شهرهای بزرگ و اماکن را شامل می‌شود. این اثر، که احتمالاً مبتنی بر نقشهٔ جهان‌نمای مأمون است (که شاید خود خوارزمی هم در تهیهٔ آن کار کرده بوده باشد)، به نوبهٔ خود مبتنی بر جغرافیای بطلمیوس بود ؛ این کتاب از بعضی جهات دقیقتر از اثر بطلمیوس بود، خاصه در قلمرو اسلام. تنها اثر دیگری که برجای مانده است رسالهٔ کوتاهی است دربارهٔ تقویم یهود (۲۰۲ـ۲۰۳). خوارزمی دو کتاب نیز دربارهٔ اسطرلاب نوشت. آثار علمی خوارزمی از حیث تعداد کم، ولی ازنفوذ بی‌بدیلی برخوردارند زیرا که مدخلی بر علوم یونانی و هندی فراهم آورده‌اند ؛ بخشی از جبر دوبار در قرن ششم / دهم به لاتین ترجمه شد و نفوذی عمده بر جبر قرون وسطایی داشت ؛ رسالهٔ خوارزمی دربارهٔ ارقام هندی، پس از آن که در قرن دوازدهم به لاتین ترجمه و منتشر شد، بزرگترین تأثیر را بخشید ؛ نام خوارزمی مرادف شد با هر کتابی که دربارهٔ «حساب جدید» نوشته می‌شد (و از اینجا است اصطلاح جدید «الگوریتم»[به معنی قاعدهٔ محاسبه]). نفوذ زیج چندان زیاد نبود، اما نخستین اثر از این گونه بود که به‌صورت ترجمهٔ لاتینی به همّت آدلاردباثی در قرن دوازدهم به غرب رسید. جداول اخترشناسی خوارزمی، پس از آن که همراه با جداول دیگر عربی در جداول طلیطلی (تولدویی) یکجا قرار گرفتند و به توسط ژرار کرمونایی در اواخر قرن یازدهم به لاتین ترجمه شدند، از مقبولیت گسترده‌تری در غرب برخوردار شدند و دست کم یکصد سال بسیار متداول بودند ؛ جغرافیای وی تا اواخر قرن نوزدهم در اروپا ناشناخته ماند.

فصل ۴ـ مدلسازی تغییر

بخش ۱ــ مدلسازی عددی، هندسی و جبری

جلسه ۲۹ــ مدلسازی هندسی

فعالیت دی‌اکسید کربن و فعالیت مصرف نفت خام

اهداف فعالیت: تقریب با خط، ارائه فرمول جبری، مدلسازی هندسی، پیشگویی براساس اطلاعات داده شده، تنوع روشهای پیشگویی، مدلسازی عددی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: برای داده‌ها یک نمودار رسم کنید. برای رشد اعداد می‌توانید الگویی تقریبی پیدا کنید؟ دی‌اکسید کربن بطور متوسط سالانه چقدر رشد دارد؟ الگوی رشد دی‌اکسیدکربن در نمودار را با خطی تقریب بزنید. آیا می‌توانید فرمولی تقریبی برای رشد مقدار دی‌اکسیدکربن ارائه دهید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت دی‌اکسیدکربن را خودتان به اجرا بگذارید. با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید. بعد از آنها بخواهید فعالیت مصرف نفت خام را انجام دهند. آنها را با سؤالات راهنما هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط به فعالیت دی‌اکسیدکربن قناعت کنید ولی انجام آن را به عهده دانش‌آموزان بگذارید. بعد اگر صلاح دانستید فعالیت مصرف نفت خام را خودتان اجرا کنید و در حین انجام این فعالیت نکات مهم درس را گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی در هر دو فعالیت ابتکار عمل را به‌دانش‌آموزان واگذارید. آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر وادارید. خودتان هم اشتباهات استدلالهایشان را نقد کنید. در پایان نکاتی را که به‌آن رسیده‌اند جمع‌بندی کنید.

زندگینامهٔ علمی داوینچی

(ت. وینچی، نزدیک امپولیا، ایتالیا، ۱۴۵۲/۸۳۱؛ و. آمبواز، فرانسه، ۱۵۱۹/۸۹۸)، کالبدشناسی، فنّاوری (تکنولوژی)، مکانیک، ریاضیات، زمین‌شناسی

فرزند نامشروع پیئروداوینچی، یکی از سردفتران فلورانسی، و دختر دهقانی به نام کاترینا بود. پدرش او را برای شاگردی نزد آندرئادل ورّوکیو فرستاد (حدود ۸۴۶) تا از او نقاشی، مجسمه‌سازی، و مکانیک بیاموزد. به استخدام لودوویکو اسفورتسا، دوک میلان، درآمد (۸۶۱ــ۸۷۸)؛ در طی آن

سالها در میلان، علاقه‌اش به مکانیک (از جمله مسائل مربوط به پرواز)، به فیزیک نور، به ریاضیات و به فیزیولوژی بینایی به‌سرعت رشد یافت؛ بازده هنری او با مجسمهٔ سوار بر اسب فرانچسکو اسفورتسا و نقاشی دیواری «آخرین شام» در اوج خود به ظهور رسید؛ با لوکاپاچولی ریاضیدان در اثرش به نام Divina proportione همکاری کرد و شکلهای کتاب اول آن را ترسیم نمود.

پس از آن که فرانسویان دوک میلان را دستگیر کردند، لئوناردو رهسپار ونیز شد؛ سرانجام به فلورانس بازگشت (۸۷۹_۸۸۵)؛ به‌عنوان سربازرس استحکامات و مهندس نظامی در رومانیا، به استخدام چزاره بورجا درآمد؛ از آن پس مسئول کوششی ناموفق برای منحرف کردن مسیر رود آرنو در نزدیکی پیسا بود. در آن سالها تصویر چهرهٔ «مونالیزا» و نقاشی دیواری بدفرجام «نبرد آنگیاری» را آغاز کرد؛ در کالبدشناسی پژوهشی منظم و اصولی انجام داد؛ بیش از پیش سرگرم ریاضیات و مکانیک بود؛ بررسی مسألهٔ پرواز انسان و پژوهش دربارهٔ پرواز پرندگان و هواشناسی را توأماً آغاز نمود؛ دربارهٔ حرکت آب بررسیهایی کرد، که بعداً آنها را در کتاب Treatise on the Movement and Measurment of Water (رساله دربارهٔ حرکت و اندازه‌گیری مقدار آب) گردآورد. به میلان بازگشت (۸۸۵)؛ از حمایت شارل دامبواز، حکمران فرانسوی، برخوردار شد؛ تصاویر کالبدشناختی درخشانی تهیه کرد؛ آنگاه احساس کرد که کلید «نیروها»ی طبیعت در دست ریاضیات است؛ «قواعد» مربوط به نیروها را از طریق تجربهٔ بصری، آزمایش، و عقل دریافت. پس از بیرون رانده شدن فرانسویها از میلان (۸۹۲)، به رم نقل مکان کرد؛ در ۸۹۵ با فرانسیس اول، پادشاه فرانسه، به آمبواز سفر کرد؛ بر اثر حمله‌ای قلبی در آنجا درگذشت. بخش اعظم نوشته‌ها و یادداشتهایش از میان رفته‌اند؛ علاوه بر «رساله دربارهٔ ... آب»، اثری به نام Treatise on Painting (رساله دربارهٔ نقاشی) پس از درگذشتش گردآوری شد.

در زمانی که الهیات ملکهٔ علوم بود، لئوناردو عقیده داشت که در طبیعت منطقی حاکم است که برای حواس قابل درک و برای ذهن قابل فهم است؛ از نظر وی، علم در اصل جنبهٔ بصری داشت: نقوش پدیده‌های طبیعی می‌توانند با نقوشی که در ذهن بوجود می‌آیند مطابقت داشته باشند؛ علل، آثار، و قوانین طبیعی را می‌توان از راه بصری در هندسه‌ای بیان کرد که حرکت اشیا و نیز شکلهای سکونشان را شامل گردد. بنابراین وی هندسه را به فیزیک ربط می‌داد، و اصطلاح «علم» را در مورد هر پژوهشی که به استدلال «ریاضی» درنیاید نفی می‌کرد. به عقیدهٔ او تجربهٔ انسانی می‌تواند طبیعت را از طریق هندسه تعبیر کند. در هندسهٔ بینایی، کار را با مفهوم پخش نور از منبعی قابل قیاس با پخش موج عرضی که بر اثر افتادن سنگی در آب راکد پدید می‌آید آغاز کرد: توان موج نور متناسب با نیروی ضربه تغییر می‌کند و شکل آن از تعداد نامحدودی هرم تشکیل شده است (همانند دورنما)، تناسب

معکوس با فاصلهٔ محل ضربه دارد، و آن هرمها با نزدیک شدن به چشم بتدریج محو می‌شوند : مردمک چشم پایهٔ مخروط یا هرم دیگری از پرتوهای نوری را تشکیل می‌دهد ؛ تصویر، از طریق عصبی، به بخش «اثرگذارندهٔ» مغز می‌رود، و در آنجا تأثرات حاصل از ضربه‌های اعصاب را که به کار حواس دیگر می‌آیند به هم می‌پیوندد ؛ همهٔ حواس در اثر سازوکارهای ضربه‌ای مشابهی به فعالیت درمی‌آیند و از قوانین هرمی مشابهی پیروی می‌کنند. او برای توضیح انتشار چهار «قدرت» طبیعت ـ یعنی حرکت، نیرو، وزن، و ضربه ـ نیز شکل هرمی را به‌کار برد مشخصهٔ بررسیهایش عبارت بود از اندازه‌گیری دقیق و به‌کاربردن نمونه‌ها (مثلاً قالبی شیشه‌ای از آئورت و دریچه‌هایش) و وسایل نشانه‌گذاری (مثلاً اجسام شناور در آب) ؛ مدافع تکرار آزمایشها و رد کردن «قواعد»ی بود که در آزمایشها تأیید نمی‌شدند ؛ خودش ناگزیر شد که این قاعدهٔ ارسطویی را که می‌گفت «هرگاه نیرویی جسمی حرکت دادنی را با سرعت معینی به حرکت درآورد، می‌تواند نصف آن جسم را با سرعتی دو برابر حرکت دهد» رد کند.

لئوناردو به چشم، اعصاب مربوط به بینایی، اعصاب جمجمه‌ای، مغز تیره، و دستگاه عصبی محیطی بدن توجه ویژه داشت ؛ در شکمچه‌های مغزی موم تزریق کرد و به این ترتیب به شکل، اندازه، و موقعیت تقریبی آنها پی‌برد ؛ نمونه‌ای شیشه‌ای از چشم و عدسیهایش ساخت، که در آن کلّه و چشمهای خودش را در موقعیت عصب بینایی قرار داده بود ؛ نتیجه گرفت که عصب بینایی عضو حساس دریافتهای بصری است ؛ در این مورد درخشانی تجربه‌اش فریبش داد. برخلاف ارسطو و جالینوس، (با بیرون آوردن مغز یک قورباغه) متوجه شد که ظاهراً مغز تیره شالودهٔ حرکت و زندگی است. احساس و حرکت را در وهلهٔ اول مکانیکی می‌دانست ؛ استخوانها را به‌عنوان اهرمها و عضلات پیوسته به آنها را به منزلهٔ خطوط نیرویی که بر آنها اثر می‌کنند می‌انگاشت نخستین توضیح شناخته شده دربارهٔ رودهٔ زاید (آپاندیس) را عرضه کرد ؛ فرض کرد که آن عضو گازهای زاید را جمع می‌کند. با بررسی قلب، متوجه شد که دهلیزها محفظه‌هایی منقبض شونده هستند که خون را به درون بطنها می‌رانند (این مطلب متناقض با فیزیولوژی جالینوسی بود) ؛ آزمایشهایش نشان دادند که نوک دریچه‌های آئورت به حالت عمودی بسته می‌شوند، نه به حالت افقی. ارتباط میان حرکت انقباضی قلب و نبض و ضربان نوک قلب را دریافت ؛ موضوع گردش خون را از یاد برد. در گیاه‌شناسی، شیرهٔ نباتی را مشابه خون می‌دانست ؛ به لزوم آفتاب برای دمیدن «روح و جان» معتقد بود ؛ حرکت روبه بالا و روبه پایین شیرهٔ نباتی را دریافت ؛ متوجه شد که تشکیل حلقه در تنهٔ درختان معرّف سنّ درخت، و مشخص کنندهٔ خشکسالیها و سالهای وفور آب می‌باشد.

فنّاوری (تکنولوژی) مهمترین علائق لئوناردو را تشکیل می‌داد ؛ اشتغالش به هنرهای فنّی در

میلان شکوفا شد؛ از آن پس توجهش از عمل به جنبه‌های نظری معطوف گردید. دربارهٔ هر دستگاه مکانیکی جالب توجهی که می‌دید یا درباره‌اش چیزی می‌شنید یادداشت برمی‌داشت، و اصلاحات و نوآوریهای متعدد پیشنهاد می‌کرد. محدودیتهای مهندس مکانیک آن زمان از نارساییهای ساخت (که موجب اصطکاک و استهلاک اضافی می‌گردید) و از درک ناقص امکانات دستگاههای مکانیکی سرچشمه می‌گرفت؛ لئوناردو نخستین کسی بود که برای غلبه بر این نارساییها به نحوی منظم کوشید؛ نخستین کسی بود که پی‌برد که هر ماشینی ترکیبی است ازچند سازوکار عام (در این مورد وی برلوپیولت سبقت جست). هم‌عصرانش معتقد بودند که بر کاری که به توسط محرک اولیه‌ای صورت گرفته است می‌توان تا بی‌نهایت افزود؛ لئوناردو این نظر را رد کرد (حدود ۸۷۱)؛ استدلال وی برعلیه ماشینهای با حرکت ابدی همان است که بعدها از سوی هویخنس و پاران مطرح شد؛ استنباط او در این مورد که ماشینها کار انجام نمی‌دهند بلکه فقط اجرای آن را تعدیل می‌کنند بعدها به‌صورت واضح توسط گالیله بیان شد. لئوناردو مفاهیم بنیادی آنچه را که امروزه به عنوان کار و توان شناخته شده است عرضه کرد؛ متغیّرهای وی در این موارد عبارتند از نیرو، زمان، مسافت، و وزن؛ نتیجه گرفت که «چنانچه مقدار نیرو و حرکت معیّن باشد، افزودن بر توان دستگاههایی که برای بالا بردن بار به‌کار برده می‌شوند غیرممکن است.» وی درکی شهودی از اصل بقای کارمایه داشت.

لئوناردو آگاه بود که مانع عمدهٔ تمام حرکات مکانیکی «اصطکاک» است، و دستگاه آزمایشی مبتکرانه‌ای ساخت که بسترهای اصطکاکی آن شبیه به آنهایی بود که ۳۰۰ سال بعد کولن به‌کار برد. برای کاهش اصطکاک غلتکی، استفاده از یاتاقانهای شکافدار و بوشنهای تبدیل از جنس فلز ضداصطکاک را توصیه کرد؛ همچنین نخستین کسی بود که یاتاقانهای ساچمه‌ای و فشنگی واقعی را پیشنهاد کرد؛ یاتاقانهای فشاری (کف‌گرد) با پاشنه‌هایی مخروطی را که روی مخروطها، قرقره‌ها، یا گویها می‌چرخیدند طراحی کرد. به‌منظور ساختن جعبه دنده برای غلبه بر مقاومت اصطکاکی، مجدّانه کوشید؛ برخی از دنده‌هایی که او ساخته است بوضوح چرخزادی (cycloidal) هستند؛ در میان انواع دنده‌های جدیدش دنده‌ای بود کروی، شامل چرخ‌دنده‌ای مارپیچی که طوری شکل گرفته بود که با انحنای چرخ‌دنده‌داری که توسط آن به گردش درمی‌آمد تناسب داشت (در حدود سال ۱۱۱۹ دوباره توسط هنری هیندلی کشف شد). صدها ترکیب دستهٔ محور و میله ابداع کرد؛ فن تسمه‌سازی شامل ابداع وسایل سفت کردن نیز می‌شد؛ هم زنجیرهای لولادار را توصیف کرد و هم محرکهای دارای زنجیر پیوسته با چرخهای زنجیر خور را. توجهی که به استفادهٔ مؤثر از دستگاههای راه‌انداز (استارت) داشت مربوط به علاقهٔ وی به ماشین پرنده‌ای بود که براساس قدرت عضلانی

استوار بود (از ۸۶۶) ؛ برای استفاده از وزن انسانها یا حیوانات برای بالا بردن وزنه، سکوهای پایین رونده را طراحی کرد. در مورد توان آب، نتیجه‌گیری کرد که وزن ضربه متناسب با ارتفاع، و بنابراین متناسب با شتاب گرانشی است ؛ در مرحلهٔ کمال عمر بار دیگر به طراحیهای افقی چرخابها پرداخت ؛ پیش طرحهای توربین واکنشی و چرخ پلتن را تهیه کرد ؛ چرخابهایی ساخت که کاملاً در محفظه قرار گرفته بودند. در مورد بخار به‌عنوان نیرو، به تخمین نزدیک به یقین دربارهٔ حجم بخار حاصل از تبخیر مقدار معیّنی آب، رسید ؛ فکر ساختن توپی جنگی را که با بخار به‌کار افتد عنوان کرد ؛ نخستین توربین ضربه‌ای را که با جهندگی بخار کار کند شرح داد. موتوری گرمایی پیشنهاد کرد که دارای پیستون و سیلندر و دریچه بود. رفتار و مقاومت مصالح را بررسی نمود ؛ ماشین ابزارهای متنوعی را شرح داد ؛ برای ماشین‌آلات کانال‌سازی نقشه‌های بسیار ابتکاری تهیه کرد ؛ روشی را برای کار سیاه‌قلم برجسته ابداع کرد که بعدها توسط ویلیام بلیک مجدداً اختراع شد ؛ به پژوهش دربارهٔ هواپیماهای بی‌موتور پرداخت ؛ طرحهایی برای دستگاههای تقطیر به اجرا درآورد ؛ مقدمات روشهای جدید فن پلاستیک‌سازی در آموزشهای مربوط به ساخت زینت‌آلات بدلی به‌جای عقیق، یشم، و غیره را فراهم آورد. چندین طرح را شرح داد که در آنها از مفهوم مهم انتقال نیرو به انواع مختلف ماشین‌آلات در حال کار بهره گرفته شده بود، از جمله یک کارخانهٔ روغن‌کشی بود که نیروی مورد نیازش را تنها یک منبع تأمین می‌کرد.

لئوناردو از ۸۸۷ بیش از پیش سرگرم مکانیک شد. در ایستایی‌شناسی (استاتیک)، منابع عمده‌اش عبارت بودند از Elementa de ponderbus ، اثر یوردانوس نموری و «دربارهٔ تعادل سطوح»، اثر ارشمیدس. اصیلترین کارش، کشف و کاربرد مفهومی بنیادی در تحلیل کششهای ریسمان بود، به این شرح : «نسبت کشش در قطعه‌ای از طناب با وزنی که به آن قطعه بسته شده است برابر است با معکوس نسبت بازوهای اهرم پتانسیلی که کشش و وزن از طریق آنها عمل می‌کنند، و نقطهٔ اتکای اهرم خمیده در نقطهٔ تکیهٔ قطعهٔ دیگر طناب قرار دارد.» (در مورد اهرمهای خمیده، بازوی پتانسیل عبارت است از فاصلهٔ افقی به عمودی از طریق مرکز حرکت.) وی در تعیین مراکز ثقل در جامدات از ارشمیدس نیز فراتر رفت ؛ دریافت که مرکز ثقل یک چهاروجهی در نقطهٔ تقاطع پاره‌خطهایی قرار دارد که نقطهٔ وسط هر یال را به نقطهٔ وسط یال مقابل وصل می‌کنند، و خود این پاره‌خطها را مرکز ثقل نصف می‌کند. در تعادل مایعات (ئیدروستاتیک) متوجه شد که مقدار معینی آب هرگز نمی‌تواند مقدار آب دیگری را تا سطحی بالاتر از خود برساند ؛ به‌نظر می‌رسد که در مشاهدات مربوط به حرکت سیّالات به اصول تداوم و گردش برابر پی‌برده باشد.

در پویایی شناسی و جنبش شناسی، هرگز به مفهومهایِ جرم و ماند (inertia) به‌عنوان

مفهوم‌مهایی در مقابل وزن، نرسید ؛ از مفهوم «نیمه‌راه» نیروی جنبشی استفاده کرد (همهٔ اجسام متحرک، تا زمانی به حرکتشان ادامه می‌دهند که اثر نیروهای محرکه‌شان در آنها باقی مانده باشد). با این که رابطهٔ ارسطویی میان نیرو، وزن، و سرعت را تأیید نکرد، با این حال به مفهوم شتاب، به‌عنوان پدیده‌ای که از اثر نیرو بر جسمی متحرک حاصل می‌گردد، نرسید ؛ با عنوان کردن این نکته که «مقاومت یک جسم در برابر هوا به همان اندازه است که هوا در برابر آن جسم مقاومت می‌کند»، و افزودن این مطلب که آب نیز همانند هوا عمل می‌کند، بر قانون سوم نیوتن پیشی جست ؛ ثقل را نیروی وزنی تعریف کرد که «در طول خطی مرکزی که امتداد فرضی آن از جسم به‌سوی مرکز جهان است» اثر می‌کند ؛ نتیجه گرفت که سرعت متناسب است با زمان سقوط، اما به‌غلط عنوان کرد که فاصلهٔ سقوط نیز با زمان نسبت مستقیم دارد، نه با مجذور زمان ؛ وزن را نیرویی عرضی می‌انگاشت که به‌وسیلهٔ عنصر جابه‌جا شده‌ای که «مایل است» به‌مکان طبیعی خود در عنصر خودش برگردد بوجود می‌آید ؛ نیرو در اثر حرکت شدیدی که در اجسام ذخیره می‌شود پدید می‌آید ؛ ضربه پایان حرکتی است که در دورهٔ تقسیم‌ناپذیری از زمان حادث می‌شود. وی در واقع بررسی ضربه را به‌عنوان شعبه‌ای از مکانیک بنیاد نهاد، و در تکاپوی یافتن قوانین کافی ضربه ؛ نتیجه گرفت که در یک واجهش (rebound) ، زاویهٔ برخورد با زاویهٔ واجهش برابر است.

ستایش لئوناردو از ریاضیات حدی نداشت و بویژه از «کشفها»یش در این زمینه، اگرچه بسیاری‌شان گمراه‌کننده بودند، برخود می‌بالید ؛ وی ریاضیدان، به معنی دقیق، نبود. «اصول» اقلیدس منبع عمدهٔ او بود و نسبتها و تناسب علاقهٔ اصلی وی به‌شمار می‌رفتند ؛ وی زوایای منحنی‌الخط، تربیع سطوح منحنی‌الخط، و چگونگی تبدیل متوازی‌السطوح به مکعب را پژوهید ؛ پیشنهاد کرد که یک یا چند سطح که مقدارشان یکسان است تا «بی‌نهایت» تغییر داده شوند. از روشن‌بینی عمیق او بود که می‌گفت شکلهای نامتناهی در طبیعت باید صورتهای متنوع یک «معادلهٔ» بنیادی باشند ؛ این نگرش شکل را به‌عنوان تابع می‌انگاشت و مفهوم قرون وسطایی مادّه را در مفهوم تابع جای می‌داد.

لئوناردو تشکیل پوستهٔ زمین را در نتیجهٔ فرایندهای عمدتاً سیلابی، که در طی زمانهای بسیار طولانی رخ داده‌اند، توصیف کرد، و این خود یک نظام زمین‌شناسی بود که دوئم آن را «شاید کامل‌ترین و دیرپاترین ابداع وی» وصف نمود. او عقیده داشت که در جهان کوچک، یعنی جسم آدمی، همان قوانینی حاکمند که در جهان بزرگ و جسم مرکب از اجزائی است که به اجزای موجود در زمین شباهت دارند. وی تصور می‌کرد که خشکیهای جهان برطبق فرایند رشد از عنصر آبی گرداگرد خود سربرآورده‌اند، و این مفهومی است که در زمینهٔ تصویر «مونالیزا»ی او

خلاصه شده است. طراحیهای وینزر از کوههای آلپ برفراز رود پوْ جلوهٔ نهایی درک بصری او از عوارض سطحی زمین است؛ وی تخمین زد که ۲۰۰۰۰۰ سال وقت لازم بوده است تا پوْ دشتش را بوجود آورده باشد (وی بوضوح مقیاس زمانی یهودی ـ مسیحی را کنار گذاشت). در دستگاه فکری او، مرتفع‌ترین قلّه‌های آلپ و آپنین قبلاً جزایری در دریایی قدیمی بوده‌اند؛ کوهها به‌طور مداوم بر اثر بادها و بارانها دچار فرسایش شده‌اند؛ هر درّه به توسط رودخانه‌اش حفر شده است؛ رسوبهای آبرفتی دائماً بر خشکی می‌افزایند و از دریا می‌کاهند؛ در نتیجهٔ فرسایش، کوهها سبک می‌شوند و برای آن که مرکز ثقل زمین را در مرکز جهان حفظ کنند به آهستگی بالا می‌آیند و با خود چینه‌های پوسیده شدهٔ دریایی را همراه با گل و لای زیادی آنها بالا می‌آورند. عقاید وی از مشاهدات وسواس‌آمیزی سرچشمه می‌گرفتند، بویژه در جریان ساختن کانالها، خندقها، و راهها برای آن که طبع خیالبافش را جلوه‌گر سازد، در تابلوی «باکرهٔ صخره‌ها» چینه‌های افقی و عمودی را یک در میان نشان داده است، که دارای غارهایی هستند که در داخل تونلها وسیع می‌شوند به‌طوری که بامهایشان پلهای طبیعی را تشکیل می‌دهند، و برخی از آنها فرومی‌ریزند؛ این‌گونه خالی شدن زیرزمین و فروریختگی سازوکاری است که نیکوْلائوس استنوْ برای تبیین زاویهٔ شیب چینه‌ها از آن استفاده کرد (۱۰۴۸). دوئم به‌نحوی متقاعد کننده استدلال کرده است که عقاید لئوْناردوْ از طریق کاردانوْ در پالیسی به جهان جدید انتقال یافته‌اند. همچنین ممکن است با کتاب مهم و مؤثر به نام Telliamed (۱۷۴۹) ارتباطی داشته باشد. بررسیهای ج.ب.ـ ونتوری دربارهٔ مطالب مربوط به زمین‌شناسی کتابچه‌های لئوْناردوْ در ۱۱۷۶ (هنگامی که عقاید مبتنی بر فاجعه‌گرایی دربارهٔ تاریخ زمین رواج داشتند) منتشر شدند؛ چارلزلایل، در چاپهای بعدی اثرش به نام Principles of Geology (اصول زمین‌شناسی، ۱۸۳۰)، متذکر می‌شود که هـ. هَلَم توجه او را به بخشهایی از کتاب ونتوری جلب کرده بود. لئوْناردوْ پژوهشهای زمین‌شناختی خود را جنبه‌ای لازم و حیاتی از علم خویش می‌دانست، و نوشت که «درک زمانهای گذشته و مکان جهان زینت و خوراک اندیشهٔ آدمی است.» ک.م.

بخش ۱ـ مدلسازی عددی، هندسی، جبری

جلسه ۳۰ ــ مدلسازی جبری

فعالیت استادکار و شاگرد

اهداف فعالیت: ثابت، متغیر، مدلسازی جبری، مدلسازی هندسی، ارایه فرمول جبری، پیشگویی براساس اطلاعات داده شده، مهارت در کاربرد مدلهای جبری.

سؤالهایی که می‌توان پرسید: در فعالیت مرحله به مرحله این سؤالات مطرح شده است.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف سؤالات را یکی یکی مطرح کنید و در مورد آن بحث کنید. از کلاس پاسخ بخواهید و دانش‌آموزان را وادار به محاسبه کنید. در هر مورد بحثها را جمع‌بندی کنید و پاسخ نهایی را تکرار کنید.

در یک کلاس متوسط سؤالات را یکی یکی مطرح کنید و نظر دانش‌آموزان را در مورد پاسخ آن بپرسید. ولی اشتباهات آنان را در پایان درس گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با فعالیت تنها بگذارید تا تمام مراحل را خودشان انجام دهند. بعد به‌طور دسته‌جمعی روی تک تک سؤالها بحث کنید. نکات مهم را به آنان گوشزد نمایید.

معرفی کتاب: برای دسترسی به مسائل مدلسازی جبری مراجعه کنید به کتاب «سرگرمیهای جبر» نوشتهٔ. پرلمان ترجمهٔ محمد یاسین.

بخش ۲ـ مدلسازی خطی

جلسه ۳۱ ــ نمودار خطی

فعالیت مسابقه دو و فعالیت پرواز هواپیما و فعالیت پیش‌بینی جمعیت

اهداف فعالیت: شیب، نرخ تغییر، معادلهٔ خط، مدلسازی خطی، پیشگویی براساس اطلاعات داده شده، تنوع روشهای پیشگویی، ثابت، متغیر.

سؤالهایی که می‌توان پرسید: در فعالیتها مرحله به مرحله سؤالات مطرح شده است.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف سؤالات را یکی یکی مطرح کنید و در مورد پاسخ آن در کلاس بحث کنید. از کلاس پاسخ بخواهید و دانش‌آموزان را وادار به محاسبه کنید. در هر مورد بحثها را جمع‌بندی کنید و پاسخ نهایی را تکرار کنید.

در یک کلاس متوسط با سؤالات راهنما دانش‌آموزان را به پاسخ صحیح هدایت کنید. ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بدهید و پس از انجام فعالیتها سؤالات را در کلاس مطرح کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را به گروههایی تقسیم کنید و آنان را به انجام فعالیتها بگمارید. بعد از انجام هر فعالیت از چند گروه بخواهید که نظرات مطرح شده در گروه را در کلاس مطرح کنند. خودتان در پایان درس را جمع‌بندی کنید.

معرفی کتاب: برای دسترسی به آمار واقعی برای پیشگویی مراجعه کنید به «سالنامهٔ آمار».

بخش ۲ـ مدلسازی خطی

جلسه ۳۲ ــ معادله خطی

فعالیت معادله خط با شیب m و فعالیت خط گذرنده از دو نقطه

اهداف فعالیت: محاسبات نمادین با معادله خط، کار را با متغیرها، شیب، ثابت، متغیر، خطوط موازی.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: یک خط در صفحه مختصات رسم کنید و معادلهٔ آن را بدست آورید. چند نقطه روی این خط معرفی کنید. شیب این خط چقدر است. خطی موازی با این خط رسم کنید و معادلهٔ آن را بدست آورید. شیب آن چقدر است؟ از مقایسه معادلهٔ این خطوط چه می‌فهمید؟ نقطه‌ای در صفحه مشخص کنید. چند خط گذرنده از این نقطه رسم کنید و معادلهٔ آنها را بدست آورید. بین این معادلات چه ارتباطی می‌بینید؟ معادله همه خطوطی که از این نقطه می‌گذرند چه شکلی دارند؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف هر دو فعالیت را خودتان در کلاس به اجرا بگذارید. با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموز را با محتوا درگیر کنید. مسئله را برای نقاط خاص مانند (۱,۲)، (۳,۴) حل کنید.

در یک کلاس متوسط هر دو فعالیت را برای اعداد خاص حل کنید سپس از دانش‌آموزان بخواهید مسئله را در حالت کلی همانطور که در کتاب آمده است حل نمایند. یافته‌های دانش‌آموزان را جمع‌بندی کنید.

در یک کلاس قوی ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بسپارید و با سؤالهای راهنما جهت‌گیری کلاس را هدایت کنید. در پایان یافته‌های آنان را جمع‌بندی کنید و نکات مهم را به ایشان گوشزد نمایید.

بخش ۳ــ مدلسازی مسائل با معادلات

جلسه ۳۳ ــ نمودار قدرمطلق

فعالیت دستگاه گیرنده و فعالیت نمودار قدرمطلق

اهداف فعالیت: قدرمطلق، نمودار قدرمطلق، اجتماع، اشتراک، بازهای باز و بسته، متمم مهارتهای رسم نمودار، مجموعه‌های عددی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: در فعالیت دستگاه گیرنده مرحله به مرحله سؤالات مطرح شده است. در فعالیت رسم نمودار معادله را حالت‌بندی کنید به‌طوری که در هر حالت یک معادلهٔ خطی داشته باشیم.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف سؤالات را یکی یکی مطرح کنید و در مورد پاسخ آن در کلاس بحث کنید. از کلاس پاسخ بخواهید و دانش‌آموزان را با نمادها آشنا کنید. فعالیت نمودار قدرمطلق را خودتان به اجرا بگذارید و از دانش‌آموزان بخواهید نمودار بعدی را خودشان رسم کنند.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را با پرسشهای راهنما هدایت کنید. در پایان نتایج بدست آمده را جمع‌بندی نمایید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با فعالیتها تنها بگذارید. بعد از انجام فعالیتها کوششهای آنها را نقد کنید. آنها را به سوی مهارت در رسم نمودارهای قدرمطلق سوق دهید.

معرفی کتاب: برای آشنایی با تعمیم مفهوم فاصله مراجعه کنید به «آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین» نوشته ج سیمونز ترجمه اسدالله نیکنام.

بخش ۳ــ مدلسازی مسائل با معادلات

جلسه ۳۴ ــ تبدیل مسئله به معادله

فعالیت قدرمطلق و فعالیت $x^2 = a^2$ و فعالیت تبدیل مسئله به معادله

اهداف فعالیت: استدلال جبری با کمک حالت‌گیری، تبدیل مسئله به زبان جبر، حل معادلهٔ درجهٔ دوم ساده، مدلسازی درجه یک، مدلسازی درجه ۲.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: با حالت‌گیری مسئله را تبدیل به یک مسئلهٔ بدون قدرمطلق کنید. داده‌های مسئله و خواسته‌های آن را لیست کنید. معلومها را مرتب کنید و نامگذاری نمایید.

مجهولها را نامگذاری کنید سپس معادله تشکیل دهید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت قدرمطلق و فعالیت $x^2 = a^2$ را خودتان به اجرا بگذارید. دانش‌آموزان را با پرسشهای مناسب با محتوا درگیر کنید. فعالیت تبدیل مسئله به معادله را به دانش‌آموزان بسپارید و با سؤالهای راهنما آنها را به پاسخ صحیح رهنمون کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیت قدرمطلق را خودتان اجرا کنید و فعالیت $x^2 = a^2$ و فعالیت تبدیل مسئله به معادله را به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را به بحث وادارید. نکاتی که دانش‌آموزان به آنها رسیده‌اند را مرتب کنید.

در یک کلاس قوی فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و از آنها تنوع روشهای حل بخواهید. فعالیت آخر را به صورت گروهی اجرا کنید و نظر گروههای مختلف را در معرض توجه کلاس قرار دهید.

بخش ۴ــ حل معادلات

جلسه ۳۵ ــ حل معادله درجه دوّم

فعالیت حل معادله درجه دوّم و حل دستگاه معادلات

اهداف فعالیت: ترجمه مسئله به زبان جبری، کار با معادلات به‌طور نمادین، ترجمه از یک زبان جبری به زبان دیگر، محاسبهٔ ریشه‌های معادله درجه دوّم، حل دستگاه معادلات.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مسئله را برای چند حالت خاص حل کنید. سعی کنید این حالات خاص را به حالت کلی تعمیم دهید. آیا می‌توان مسئله را به چند روش به زبان جبری برگرداند؟ متغیرها و مجهولها و معلومها را مشخص کنید. اطلاعات مسئله را به زبان جبری ترجمه کنید. متغیر را از دو معادله حذف کنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف مسئله را در یک حالت عددی به دانش‌آموزان بسپارید. بعد خودتان آن را در حالت کلی در کلاس اجرا کنید. با ارجاع به حالت خاص دانش‌آموزان را درگیر کنید. در مسئله مزرعه خودتان آن را به زبان جبری ترجمه کنید و از دانش‌آموزان بخواهید دستگاه را حل کنند.

در یک کلاس متوسط فعالیت حل معادله درجه دوّم را در حالت خاص و فعالیت دستگاه معادلات را به دانش‌آموزان بسپارید و ابتکار عمل را به آنان بسپارید. آنها را در فرصتهای مناسب راهنمایی کنید و به سمت پیشرفت مسئله هدایت کنید. حالت کلی حل معادله درجه دوم را خودتان اجرا کنید.

در یک کلاس قوی فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را به بحث و نقد نظرات دیگران تشویق کنید. در پایان نکات طرح شده را جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد نمایید.

بخش ۴ـ حل معادلات

جلسه ۳۶ ـ تقسیم چندجمله‌ایها

فعالیت دستگاه معادلات درجه دوم و فعالیت تقسیم چند جمله‌ایها

اهداف فعالیت: حل دستگاههای درجهٔ دوم مهارت در محاسبات چندجمله‌ایها، تنوع محاسبات جبری، باقیماندهٔ تقسیم حل معادلات چندجمله‌ای.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: یک متغیر را از یک معادله حساب کنید و در معادلهٔ دیگر قرار دهید. مسئله را برعکس کنید. کدام چندجمله‌ای در $x-2$ ضرب شود تا x^3-2x^2+x-1 بدست آید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف هر دو مسئله را به دانش‌آموزان بسپارید. آنها را با پرسشهای مناسب هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط دانش‌آموزان را با هر دو مسئله تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر تشویق کنید. در پایان نظرات دانش‌آموزان را جمع‌بندی کنید و اشتباهاتشان را گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی تقسیم چندجمله‌ایها را در حالت کلی به‌صورت الگوریتم تقسیم و یکتایی خارج قسمت و باقیمانده را مطرح کنید. دانش‌آموزان را با پرسشهای مناسب راهنمایی کنید و به‌سوی جواب هدایت کنید.

بخش ۵ ـ مدلسازی مسائل با نامعادلات

جلسه ۳۷ ـ تبدیل مسئله به نامعادله

فعالیت خودکار جبری و فعالیت خودکار هندسی

اهداف فعالیت: ترجمه مسئله به زبان جبری، کار با نامعادلات به‌طور نمادین، ترجمه از یک زبان جبری به زبان دیگر، حل دستگاه نامعادلات، ترجمه زبان جبر به زبان هندسه و برعکس.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: متغیرها کدامند؟ معلومها و مجهولها کدامند؟ اطلاعات

مسئله را چگونه می‌توان به زبان جبری ترجمه کرد؟ آیا می‌توان مانند نمودار معادلهٔ خط هر اطلاعات جبری را به زبان هندسی ترجمه کرد؟ مثلاً آیا می‌توان یک نامعادله را به زبان هندسی ترجمه کرد؟ تعبیر هندسی حل دستگاه معادلات چیست؟ تعبیر هندسی حل دستگاه نامعادلات چیست؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت خودکار به زبان جبری را به دانش‌آموزان بسپارید و با پرسشهای مناسب آنها را هدایت کنید. فعالیت خودکار به زبان هندسی را خودتان به اجرا بگذارید و با پرسیدن سؤالات مناسب ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیتها را به عهدهٔ دانش‌آموزان بگذارید و با پرسشهای مناسب دانش‌آموزان را هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با مسئله تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقد نظریات دیگران تشویق کنید. در پایان نکاتی را که دانش‌آموزان مطرح کردند. جمع‌بندی کنید و اشتباهاتشان را گوشزد کنید.

بخش ۵ ـ مدلسازی مسائل با نامعادلات

جلسه ۳۸ ـ دستگاه نامعادلات

فعالیت عرضه و تقاضا

اهداف فعالیت: برنامه‌ریزی خطی، حل دستگاه معادلات توسط نمودار، حل دستگاه نامعادلات توسط نمودار.

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: این سؤالات مرحله به مرحله در کتاب مطرح شده‌اند.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را مرحله به مرحله با هدایت دانش‌آموزان به دانش‌آموزان واگذار کنید.

در یک کلاس متوسط کل فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را به بحث و نقد آراء دیگران تشویق کنید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از انجام فعالیت از دانش‌آموزان بخواهید مسائل روزمره‌ای که به حل دستگاه نامعادلات منجر شود طراحی نمایند.

فصل ۵ــ تحلیل مدلهای ریاضی

بخش ۱ــ مدلسازی با استفاده از مدلهای داده شده

جلسه ۳۹ ــ مدلسازی تغییر

فعالیت اسکی‌باز

اهداف فعالیت: مدلسازی با نمودار، تحلیل نمودار، رسم نمودارهای جدید با کمک نمودار داده شده ترجمهٔ اطلاعات مسئله به زبان هندسی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: سؤالات مرحله به مرحله در کتاب مطرح شده‌اند.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را مرحله به مرحله با سؤالات مناسب به سوی پاسخ هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط کل فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را به بحث و نقد آراء دیگران تشویق کنید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از انجام فعالیت از دانش‌آموزان بخواهید مسائل روزمره‌ای را به زبان نمودار هندسی ترجمه کنند.

توجه کنید که در فعالیت اسکی‌باز مسیر منتهی به یک دره شده و اسکی‌باز درون دره گیر افتاده است. پس از چند بار حرکت رفت و برگشتی سرعت اسکی‌باز بسیار کم می‌شود.

زندگینامهٔ علمی ارسطو

(ت. استاگیرا، خالکیدیکه، ۱۰۰۵ ق هـ / ۳۸۴ ق م ؛ و. خالکیس، ۹۴۳ ق هـ / ۳۲۲ ق م)، فیزیک، اخترشناسی، هواشناسی، زیست‌شناسی، روان‌شناسی.

پدر ارسطو در سِمَت پزشک خصوصی آمونتاس دوّم مقدونی، پدربزرگ اسکندر بزرگ، خدمت می‌کرد. علاقهٔ ارسطو به زیست‌شناسی و کالبدشکافی را گاهی به نفوذ پدرش نسبت داده‌اند، اما پدر و مادر او هنگامی درگذشتند که وی کودک بود و دانش او از فیزیولوژی و ساختمان کالبد آدمی به‌عنوان نقطهٔ ضعفی در زیست‌شناسی او باقی ماند. در ۹۸۸ ق هـ به عضویّت آکادمی در آتن درآمد، و تا زمانی که افلاطون درگذشت (۹۶۸ ق هـ) در آنجا ماند. در ۹۶۳ ق هـ معلم خصوصی

شاهزادهٔ جوان، اسکندر، شد. در ۹۵۶ ق هـ به آتن بازگشت، اما با مرگ اسکندر بزرگ (۹۴۴ ق هـ) و رو به روشدن با اتّهام بی‌دینی و دوباره روی کارآمدن دشمنان مقدونیّه، او به جلای وطن داوطلبانه تن در داد. وی در ملک مادری خود درگذشت.

نقطهٔ آغاز در پیشرفت علمی ارسطو باید سالهایی باشد که او در آکادمی گذرانده است. در آکادمی، ارسطو اولویتهایی را که افلاطون بدانها معتقد بود، یعنی این که دیالکتیک را ــ بررسی سقراط‌وار فرضهایی را که در استدلال می‌شد ــ مقدمه‌ای کمکی برای ریاضیّات می‌دانست، معکوس ساخت. در نظر ارسطو، الگوی یک علم دستگاهی اصل موضوعی است که در آن قضایا به‌نحوی معتبر از اصول بنیادی ــ «فرضها»، «تعریفها»، و «اصول متعارف» ــ مشتق می‌گردند. نظریهٔ برهان که مشخّصهٔ ریاضیات یونانی است به عنوان هدف عمدهٔ هر علم پذیرفته می‌شود؛ هر علم باید نه تنها به ثبت بپردازد بلکه باید تبیین کند و بدین ترتیب، تعمیم دهد.

ارسطو نمونهٔ ریاضی را بزرگ می‌کند تا زمینه‌ای برای علوم فیزیکی تدارک ببیند، اما یک امر فیزیکی (یعنی هر چیز که دستخوش تغییر طبیعی دائمی است ــ آدمی، درخت، شعله) بیش‌تر نیازمند تبیین است تا مجرّداتی که ریاضیّات با آنها سر و کار دارد. و دیگر آن که فیزیک، برخلاف ریاضیّات، تعمیمهایی می‌دهد که در بیش‌تر موارد ــ اما نه لزوماً در همهٔ موارد ــ صادقند. به‌طورکلی به نظر می‌رسد که ارسطو بر این عقیده است که خود مستثنیات تبیین‌ناپذیر نیستند اما در برقرارکردن تمایزی قاطع میان قوانین شرطهای لازم و قوانین شرطهای کافی درمی‌مانند.

نخست پدیده‌ها، آنگاه نظریّهٔ برای تبیین آنها. ارسطو این فرمول بیکنی ــ آزمودن اندیشه‌ها با روشهای علمی و سنجیده ــ را نه فقط برای فیزیک، اخترشناسی، و زیست‌شناسی بلکه برای همهٔ هنرها و علوم توصیه می‌کند. اما «پدیده‌ها»، مانند بسیاری از اصطلاحات مفتاحی او، واژه‌ای است با کاربردهای گوناگون در زمینه‌های گوناگون. در زیست‌شناسی و علم آثار جوّی، و گاه در اخترشناسی، معنی آن «مشاهده»ها است، اما هنگامی که ارسطو به شرح اصول در «طبیعیات» می‌پردازد معنی آن باورهای مشترک و کاربرد لغوی معاصران او است که با نظرهای متفکران دیگر تکمیل می‌شود؛ و اما در «کتاب‌السّماء» یا «کتاب کون و فساد» معنی این واژه طبیعت و برهمکنش عنصرها است.

اما این نکته که او نه اصطلاح تازه‌ای اختراع می‌کند و نه معنی تازه‌ای به کلمات رایج می‌دهد باید هنگامی بر ذهن بگذرد که dunamis («قدرت» یا «قابلیت») و ischus («قوّت») هر دو به نیرو ترجمه می‌شوند. برای مثال، ارسطو در «طبیعیّات» پای تناسبها را به میان می‌آورد تا نشان دهد که قوّت لازم برای آن که همیشه آسمان را در حال دَوَران نگاه دارد قابل اندازه‌گیری نیست. او شاهدی تجربی نمی‌آورد و نمی‌توانست هم بیاورد. فقط می‌گوید که قواعد تناسب ایجاب می‌نمایند که این امر

صادق باشد. جهان ارسطو متناهی، کروی، و زمینمرکز است، و حرکات طبیعی برای کیهان شناسی او امری اساسی است. حرکات طبیعی عبارتند از حرکات بی مانع مستقیم‌الخطّ چهار عنصر تحت قمر: خاک، آب، آتش و هوا، که حرکت هریک از آنها، اگر به مانعی برنخورد، به آن بخش از جهان که جای طبیعی آن است ختم می‌شود. حرکت عنصر پنجم، یعنی «اثیر»، که جوهری است از افلاک که اجرام آسمانی را حمل می‌کند، مستدیر است و نمی‌توان راهش را سدّ کرد.

هنگامی که او به موضوع ولادت گیاهان و جانوران، یعنی پیدایش ظاهری چیزی از هیچ، می‌رسد عقیده دارد که حتی سربرآوردن فردی جدید لزوماً متضمن مایه‌ای، یعنی «مادّه»ای، است که بین دو حالت مخالف ــ «عدم» و «صورت» ــ سیر کند. اما این پرسش که «صفات ذاتی مادّه چیست؟» باید بی جواب گذاشته شود زیرا ارسطو به ردّ همهٔ نظریه‌هایی می‌پردازد که تغییر فیزیکی را برحسب آرایش دوبارهٔ جنس یا جنسهای بنیادینی وصف می‌کنند که از خصوصیتهای ثابتی برخوردارند. او بخصوص اتوْم‌گرایی را رد می‌کند. فیزیک نظمهای تغییر را بررسی می‌کند، و مادّه معلوم می‌دارد که واردشدن چه انواعی از تغییر بر چیز معینی امکان‌پذیر است. تأثیر عمدهٔ درک ارسطو از ماده بر مابعدالطّبیعه (متافیزیک) بود، اما درک او از «صورت»، یعنی آن عنصر همگانی در اشیا که شناخت و طبقه‌بندی و تعریف آنها را ممکن می‌سازد، به‌صورت تأثیر نیرومندی در علم باقی ماند. عنصر صوری از اشیایی که طبقه‌بندی شده‌اند جدایی‌ناپذیر است؛ چیزی جز جهان فیزیکی وجود ندارد.

هنگامی که ارسطو ریاضیّات و طبیعیّات را مقابله می‌کند می‌گوید که فیزیکدان باید با خواصّ هندسی اجسام مادّی چنان عمل کند ــ کاری که ریاضیدان نمی‌کند ــ که گویی صفات آنهایند ــ او باید آماده باشد که کاربرد الگوی خود را توضیح دهد. مکمّل این آمادگی برای واردکردن ریاضیات در طبیعیات تأکید بر این ضرورت است که هر گونه ریاضیات باید مستقیماً قابل اطلاق بر جهان باشد.

در آثاری که به علوم دقیق مربوط می‌شوند («آنالوطیقای ثانی» و «طوبیقا»، «طبیعیّات»، «کتاب‌السّماء»، و «درکوْن»)، علایق عمدهٔ او عبارت بود از روش‌شناسی علوم و اشتقاق بسیار دقیق وسایل فنی آنها از فرضهای مشترک. تأثیر ارسطو بر علم ناشی از ذکاوت و حساسیّت بی نظیر او در برابر دلایل مخالف بود نه ناشی از یافتن راههایی که با راهیابیهای ائودوکسوس یا ارشمیدس قابل قیاس باشد.

ارسطو احتمالاً رساله‌های جانورشناختی خود را در ۹۶۵ــ۹۶۳ ق هـ، که در لسبوس می‌زیست، و پس از آن که چارچوب فلسفیش تثبیت شد، آغاز نمود. رساله‌های جانورشناختی یک چهارم کلّ مجموعهٔ آثار او را تشکیل می‌دهند و هم اطلاعات و هم مباحث به‌اختصار عرضه شده‌اند. این که چه

مقدار از اینها کار خود او بوده روشن نیست. این رساله‌ها یک دورهٔ آموزش را تشکیل می‌دهند که در آن به «کتاب الحیوان»، که مجموعهٔ اصلی اطّلاعات را دربر دارد، به‌عنوان متن درسی توصیفی اشاره می‌شود.

در آکادمی دو موضوع مطرح بود: تعیین گروههای صوری جانوران و توصیف وظیفه و عمل آنها به‌عنوان جزیی از طبیعت؛ و ارسطو از این رهیافت پیروی کرد. قدیمی‌ترین زیست‌شناسی او در رساله‌های «دربارهٔ اعضای جانوران» (عنوان لاتینی، De partibus animalium)، «دربارهٔ حرکت جانوران» (عنوان لاتینی، De incesso animalium)، و یک رشته از رساله‌های کوتاه روان‌شناختی و زیست‌شناختی او (عنوان لاتینی، Parva naturalia) مندرج است که در آنها او «علل» وجود بافت و ساختارها و علل اعمال مهمّی چون حرکت کردن، دم‌زدن، پیرشدن، و مرگ را بیان می‌کند. در اینجا در نظریهٔ او عنصر پیشین (apriori) به‌شدت خودنمایی می‌کند: مثلاً، راست برتر از چپ است.

اما توضیح غایت‌شناختی به طرز پخته‌ای با اتکا بر شواهد استدلال شده است. در رسالهٔ بزرگ بعدی، «کُون الحیوان»، او مفاهیم خود از صورت و ماده، و فعل و قوّه، را بر مسائل تولیدمثل، وراثت، و رشد صفاتی غیراساسی چون رنگ به‌کار می‌بندد. غایت‌شناسی ارسطو با دیگران فرق دارد زیرا او غایت‌شناسی را بر پایهٔ وجود صورتها قرار می‌دهد. برای تبیین یک اندام باید نخست صورت کامل و اعمال وظایف جانور را درک کنیم ـ یعنی بفهمیم که منظور از این جانور بخصوص بودن چیست. توضیح ما هم شامل علّتهای «لازم» و هم شامل «غایتی» خواهد بود که رشد و نمو به سوی آن می‌گراید ـ یعنی وضع کامل کلّ جانور، «که به‌خاطر آن» هر جزئی رشد می‌کند.

در زیست‌شناسی ارسطو و نیز در کتابهای «مابعدالطبیعه» و «دربارهٔ روح»، روح جوهر مستقلی نیست بلکه هم صورت تن و هم منبع حرکت است. روح موجب رشد و تولیدمثل و احساس می‌شود و در انسان قوّهٔ سوّمی نیز دارد، و آن عقل است، یعنی تنها قوّه‌ای که صورت تن نیست و بنابراین می‌تواند مفارق باشد. بنابر «مابعدالطّبیعه»، صورتی که جانوران به سوی آن رشد و نمو می کنند نوع آنها است: تفاوتهای فردی از مادّه سرچشمه می‌گیرند و درنتیجه برای علم قابل شناخته‌شدن نیستند. ارسطو در «کُون‌الحیوان» به‌طور ضمنی می‌گوید که افراد ممکن است از حیث صورت متفاوت باشند. اگر جنین به‌طور منظّم رشد کند، صورت پدر فعلیّت خواهد یافت. اگر نکند، صورت مادر؛ اگر باز هم نکند، پیاپی صورت نیاکان دورتری پدید خواهد آمد، تا آنجا که صورت ممکن است صرفاً صورت نوع، یا حتی درست جنس «حیوان»، باشد (یعنی نوزادی عجیب‌الخلقه).

ارسطو عناصر چهارگانهٔ افلاطون ـ آتش، هوا، آب، و خاک ـ را می‌پذیرد و آنها را در

فرمولی تنظیم می‌کند که در سراسر قرون وسطیٰ باقی ماند. او عناصر چهارگانه را ترکیبهایی از گرمی، سردی، تری، و خشکی می‌انگارد. این که آیا ارسطو واقعاً عنصر پنجمی را به نام pneuma(نفس، روح، روان) در نظر داشته یا نه جای بحث است. او «اثیر»، یعنی عنصر پنجم در عالم علوی، را با pneumaی جسمانی، یعنی مادهٔ نطفهٔ جانور که روح و گرمی زاینده را منتقل می‌کند، مقایسه می‌نماید.

رده‌بندی جانوران همچنان مشکلی باقی مانده بود، و ارسطو پیشنهاد کرد که گرمای حیاتی هر جانور به منزلهٔ شاخص برتری آن جانور تلقی شود، اما او طرحی عملی به‌وجود نمی‌آورد. برای منظورهای عملی، او جانوران را برحسب گروههای عمده، «خون‌داران» و «بی‌خونان» (تقریباً مُهره‌داران و بی‌مُهرگان)، مورد بحث قرار می‌دهد.

«تاریخ جانوران» به‌صورت یک بررسی تطبیقی خصوصیات زیر عنوانهای «اندامها»، «فعالیتها»، «زندگانی»، و «حالتها» آغاز گردید؛ تقریباً به جانورشناسی توصیفی شبیه است. این اثر یک پژوهش نظری است، و آن‌قدر که مربوط به مطلق «حیوان» است دربارهٔ حیوانات نیست. معیار قضاوت او بیش‌تر وظیفه یا عمل اندامها است تا ریخت‌شناسی آنها. ارسطو تقریباً از ۵۰۰ «نوع» جانور نام می‌بَرَد؛ بین ۵۵۰ و ۶۰۰ گونه را می‌توان از یکدیگر تمیز داد، و از این تعداد تا ۲۰۰ گونه در ارتباط با فقط یک خصوصیت ذکر شده‌اند. اکثریت عظیم آنها جانوران بومی یونان و مستعمرات آن در آسیای صغیر است. برخی از یافته‌های او نتیجهٔ کالبدشکافی عمدی است، و اطلاعات دیگر از مشاهده‌های اتفاقی در آشپزخانه یا در فالگیرخانه گردآوری شده‌اند. فرض شده است که بسیاری ازمشاهدات بیرونی نتیجهٔ مطالعهٔ ممتد در عادات پرندگان، حشرات، و جانورانی دریایی است. منابع عمدهٔ اطلاعات او ماهیگیران، کشاورزان، و شکارچیانند. او در اصل از شیوه‌های بررسی مبتنی بر مشاهده، که یا در مورد همان نوع جانور یا در مورد انواع «مشابه» صورت گرفته باشد، استفاده می‌کند. روش محبوب او ارائهٔ شاهد متقابل است. آنجا که بررسیهای مبتنی بر مشاهده فراهم نباشد ارسطو موضوع را برحسب احتمال ذاتی ـ یعنی، با اشاره به نظریه ـ می‌آزماید. اما او این نکته را روشن می‌کند که نظریه باید همیشه تسلیم مشاهدات معتبر باشد. بسیاری از اشتباهات از مشاهدهٔ معیوبی سرچشمه می‌گیرند که با نظریه توافق داشته است.

ارسطو، در بحث از جانوران، اهمیّت بسیار به قلب، رگهای ناقل خون، و خون می‌دهد ـ و بدین نحو از عقاید فیزیولوژیک نویسندگان بقراطی جدا می‌شود. او یکی از قدیمی‌ترین توصیفهای دقیق را دربارهٔ دستگاه مربوط به قلب و رگهای خونی عرضه داشت، و بر روی قلب به‌عنوان مرکز این دستگاه تأکید نهاد. موفّقیّت او در تشریح رگها در روشی بود که به کار می‌بست، یعنی به‌جای

بی‌هوش‌کردن و سپس ریختن خون جانور، نخست او را از فرط گرسنگی دادن نحیف می‌کرد و آنگاه گلویش را می‌فشرد، و به این ترتیب همهٔ خون را در رگهای جانور مرده نگاه می‌داشت. خفگی موجب انقباض سرخرگهای کوچک در شُشها می‌شود، و جلو جاری‌شدن خون به سمت چپ قلب را می‌گیرد. تقریباً همهٔ خون بدن در دستگاه سیاهرگی جمع می‌شود و طرف راست قلب انباشته از خون شده به‌سختی باد می‌کند. چنین به نظر می‌آید که قلب، به‌جای چهار حفره، فقط سه حفره دارد: دهلیز و بطن راست که یکی شده، و بزرگتر از همه به‌نظر می‌رسد؛ بطن چپ؛ و دهلیز چپ. این مشاهدهٔ معیوب پیامدهای فجیعی برای کالبدشناسی بعدی داشت. ارسطو میان سرخرگها و سیاهرگها فرق نمی‌گذاشت و واژهٔ واحدی، phelps، را بر هر دو اطلاق می‌کرد. وی انشعابهای عمدهٔ دستگاه سرخرگها و دستگاه سیاهرگها، هر دو، را ردیابی کرد و رگها را دستگاهی توصیف نمود که با رشد و توسعهٔ بدن توسعه می‌یابند. او دم‌زدن را برای خنک‌کردن و متعادل نمودن گرمای خون و قلب توصیف می‌کرد. ارسطو مغز را سرد و قلب را گرم می‌دانست. او از وجود دستگاه عصبی آگاهی نداشت و به نقش مرکزی مغز پی نبرد.

مسائل برای حل: از کتاب سرگرمیهای جبر نوشته، پرلمان

۱ــ چهار برادر جمعاً ۴۵۰۰۰ تومان داشتند. هرگاه به پول اوّلی ۲۰۰۰ تومان اضافه از پول دوّمی ۲۰۰۰ تومان کم و پول سوّمی دو برابر زیاد و پول چهارمی دو برابر کم شود، در این صورت پولهای آنها با هم برابر می‌شود. هرکدام از آنها چه مقدار پول داشتند؟

۲ــ در دو طرف رودخانه‌ای دو درخت نخل روبروی هم روئیده‌اند. ارتفاع یکی ۱۵ متر و ارتفاع دیگری ۱۰ متر و فاصله بین آنها ۲۵ متر است. در بالای هر نخل پرنده‌ای نشسته است. دفعتاً هر دو پرنده ماهی‌ای را می‌بینند که روی آب آمده است. اگر پرندگان با هم به طرف ماهی بپرند هم‌زمان به آن می‌رسند. ماهی در چه فاصله‌ای از تنه نخل بلندتر روی آب آمده است؟

۳ــ دسته دروگرها باید دو گندم‌زار را که یکی از دیگری دو برابر بزرگ‌تر بود درو می‌کردند. دستهٔ دروگران نیمی از روز را بر روی گندم‌زار پرداختند. بعد از این، دسته به دو گروه تقسیم شد. نیمهٔ اول در گندم‌زار بزرگ مانده و با فرارسیدن شب گندم‌زار را به‌کلی درو کرد. نیمهٔ دوم دسته گندم‌زار کوچک را چنان درو نمودند که با فرارسیدن شب قسمتی از گندم‌زار باقی ماند که فردای آن روز یک دروگر آن را در یک روز تمام کرد. دسته از چند نفر دروگر تشکیل شده بود؟

۴ــ سبزه‌ها در تمامی مرغزار با سرعت و انبوهی یکنواخت می‌روید. می‌دانیم که ۷۰ گاو در ۲۴ روز و ۳۰ گاو در ۶۰ روز این سبزه‌ها را می‌خورند. چند گاو سبزه‌های مرغزار را در ۹۶ روز خواهند خورد؟

۵ــ سه مرغزاری که به‌طور یک‌نواخت از سبزه پوشیده شده و سرعت نمو سبزه‌ها نیز یکی است، دارای مساحتهای $۳\frac{۱}{۳}$ هکتار و ۱۰ هکتار و ۲۴ هکتار می‌باشند. مرغزار اولی برای تغذیهٔ ۱۲ گاو در مدت ۴ هفته کافی بوده است. مرغزار دومی برای تغذیهٔ ۲۱ گاو در مدت ۹ هفته کافی بوده است. مرغزار سومی در مدت ۱۸ هفته برای تغذیهٔ چند گاو کفایت می‌نماید؟

۶ــ فرض کنیم عقربه‌ها ساعت ۱۲ را نشان می‌دهند. اگر در این موقعیت عقربه‌های کوچک و بزرگ جاهای خود را عوض می‌کردند باز هم وقت صحیح را نشان می‌دادند. چه وقت و چقدر زود به‌زود عقربه‌های ساعت در موقعیتهایی قرار می‌گیرند که با تعویض این عقربه‌ها موقعیتی بدست آید که در یک ساعت سالم نیز امکان‌پذیر است؟

۷ــ در یک ساعت سالم در چه موقعیتهایی عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم منطبق می‌شوند؟

۸ــ پدر ۳۲ سال و پسر ۵ سال دارد. بعد از چند سال سن پدر ۱۰ برابر سن پسر می‌شود؟

۹ــ دو قوطی حلبی پر از چای دارای شکل یکسان هستند و از یک نوع حلبی ساخته شده‌اند. وزن قوطی اوّل ۲ کیلوگرم و ارتفاع آن ۱۲ سانتی‌متر و وزن قوطی دوم ۱ کیلوگرم و ارتفاع آن ۹/۵ سانتی‌متر می‌باشد.

وزن خالص چای در قوطیها چقدر است؟

۱۰ــ در راه دایره‌ای میدان دوچرخه‌سواری، دو دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. وقتی در جهات مخالف حرکت نمایند هر ۱۰ ثانیه با هم ملاقات می‌کنند اما زمانی‌که در یک جهت حرکت کنند هر ۱۷۰ ثانیه یکی به دیگری می‌رسد. درصورتی که طول راه دایره‌ای ۱۷۰ متر باشد سرعت هر دوچرخه‌سوار چقدر است؟

۱۱ــ لازم است با ۱۰۰ تومان، ۴۰ عدد تمبر یک‌تومانی، چهار تومانی و دوازده تومانی بخرید. تعداد تمبر از هر نوع چند خواهد بود؟

۱۲ــ دو زن روستایی با هم ۱۰۰ عدد تخم‌مرغ به بازار بردند. یک زن نسبت به دیگری تعداد بیش‌تری تخم‌مرغ داشت. آنها مبالغ مساوی حاصل نمودند. اوّلی به دوّمی گفت که: «اگر تخم‌مرغهای تو مال من بود من ۱۵ تومان بدست می‌آوردم». دوّمی جواب داد که «اگر تخم‌مرغهای تو مال من بود در برابر آنها $۶\frac{۲}{۳}$ تومان حاصل می‌کردم» هرکدام چند عدد تخم‌مرغ داشتند؟

بخش ۱ــ مدلسازی با استفاده از مدلهای داده شده

جلسه ۴۰ ــ نمودار مساحت مربع

فعالیت نمودار مساحت مربع

اهداف فعالیت: رسم نمودار $y = x^2$ ، تقریب زدن، تقریب بهترزدن، مقایسهٔ مدلها

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: برای طول ضلعهای نزدیک به هم مساحت مربع را مقایسه کنید. آیا می‌توانید مساحت مربع را روی نمودار برحسب ضلع مربع نمایش دهید؟

آیا رشد مساحت مربع نسبت به رشد ضلع مربع خطی است؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و آنان را با پرسشهای مناسب راهنمایی کنید.

در یک کلاس متوسط دانش‌آموزان را با فعالیت تنها بگذارید و آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر تشویق کنید. در پایان نکات مطرح شده را جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی از دانش‌آموزان پس از انجام فعالیت بخواهید به‌دنبال پدیده‌های شبیه این مدل در اطراف خود جستجو کنند.

بخش ۲ــ ماشین ورودی ــ خروجی و ارائه فرمول جبری

جلسه ۴۱ــ ارائه فرمول جبری برای تابع

فعالیت ماشین‌حساب و فعالیت ماشین ورودی ــ خروجی

اهداف فعالیت: مقایسه مدلها، دو مسئله متفاوت با یک مدل یکسان، ماشین ورودی ــ خروجی تابع، تابع معکوس با عوض‌کردن نقش متغیرها بدون اشاره به یک به یک بودن

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مدلی که ساختید قبلا کجا دیده بودید؟ آیا هر مدلی را می‌توان به‌عنوان یک ماشین ورودی خروجی در نظر گرفت؟ سؤالاتی در متن کتاب مطرح شده‌اند.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را مرحله به مرحله با هدایت به آنها واگذار کنید.

در یک کلاس متوسط کل فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را به بحث و نقد آراء دیگران تشویق کنید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از انجام فعالیت از دانش‌آموزان بخواهید مسائل روزمره‌ای پیدا کنند که بتوان با ماشین ورودی ــ خروجی مدلسازی کرد.

بخش ۲ـ ماشین ورودی ـ خروجی و ارائه فرمول جبری

جلسه ۴۲ ــ مدلسازی جبری مسئله

فعالیت ارائه فرمول جبری و فعالیت کتابخانه

اهداف فعالیت: ترجمه مسئله به زبان جبری، ارائه فرمول جبری برای ماشین ورودی ــ خروجی

رسم نمودار تابع به کمک فرمول جبری، تحلیل تابع با کمک رسم نمودار

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مسئله را مرحله به مرحله در نظر بگیرید. پس از معلوم‌کردن و نامگذاری متغیرها هر مرحله را به زبان جبری ترجمه کنید، آیا می‌توانید فرمولی ارائه کنید؟ اگر نه با یک فرمول تقریب بزنید.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف یکی از فعالیتهای ترجمه به زبان جبری را به دانش‌آموزان بسپارید و فعالیت کتابخانه را خودتان در کلاس اجرا کنید. با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموزان را با محتوا درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل در انجام فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و با پرسشهای مناسب آنان را هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با مسئله تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر وادارید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد نمایید.

بخش ۳ـ مهارتهای رسم و تحلیل نمودارهای درجه دوّم

جلسه ۴۳ ــ رسم نمودارهای درجه دوم

فعالیت $y = ax^2$ و فعالیت $y = x^2 + a$ و فعالیت ریشه به کمک نمودار

اهداف فعالیت: رسم نمودار، مقایسهٔ نمودارها، نمودار درجه دوّم

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: مسئله را در حالتهای خاص حل کنید. حالتهای خاص را با هم مقایسه کنید و الگویی بیابید. آیا می‌توانید از این اطلاعات کمک بگیرید و برای یک نمودار سهمی فرمول جبری بدهید؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت $y = ax^2$ را خودتان به اجرا بگذارید و $y = x^2 + a$

را به دانش‌آموزان واگذار کنید. ذهن آنها را با پرسشهای مناسب درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و با پرسشهای راهنما دانش‌آموزان را هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با فعالیتها تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر وادارید. در پایان نظرات مطرح‌شده را جمع بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد کنید.

بخش ۳ــ مهارتهای رسم و تحلیل نمودارهای درجه دوّم

جلسه ۴۴ ــ سهمی

فعالیت سهمی

اهداف فعالیت: درک هندسی از نمودار $y = x^2$ ، ترجمه اطلاعات هندسی به زبان جبر، ارائه فرمول جبری برای نمودار داده شده، مکان هندسی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: اطلاعات مسئله را به زبان جبری ترجمه کنید. محدودیتهایی که قائل می‌شوید کدامند؟ این محدودیتها را به زبان جبری ترجمه کنید. آیا می‌توانید معادله‌ای بدهید که جوابهای آن مکان هندسی مشخص شده باشد؟

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را خودتان اجرا کنید. با پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموزان را درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان واگذارید. با پرسشهای راهنما آنان را هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با فعالیت تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقد آراء یکدیگر تشویق کنید. در پایان مطالب مطرح‌شده را جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد نمایید.

بخش ۴ـ مهارتهای رسم و تحلیل توابع متناوب

جلسه ۴۵ ـ مدلسازی سینوسی

فعالیت چرخ و فلک و فعالیت نقطه متحرک

اهداف فعالیت: تابع سینوسی، توابع متناوب، درک هندسی از نمودار متناوب، طول موج فرکانس، ارائه فرمول جبری برای نمودار سینوسی،

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: سؤالات مرحله به مرحله در فعالیتها مطرح شده است.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید. مرحله به مرحله با سؤالات مناسب آنان را به سوی پاسخ هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید و آنها را به بحث و نقد آراء دیگران تشویق کنید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات آنها را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از انجام فعالیتها از دانش‌آموزان بخواهید پدیده‌های متناوب در محیط اطرافشان را شناسایی و مدلسازی کنند.

معرفی کتاب: «روشهای مثلثات» نوشته پرویز شهریاری

بخش ۴ـ مهارتهای رسم و تحلیل توابع متناوب

جلسه ۴۶ ـ تبدیل نمودار سینوسی به فرمول جبری

فعالیت دامنهٔ نوسان و فرکانس و فعالیت رادیان

اهداف فعالیت: تابع سینوسی، دامنهٔ نوسان، فرکانس، رادیان، ترجمه اطلاعات هندسی به عددی، رسم نمودار سینوسی

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: سؤالات مرحله به مرحله در فعالیتها مطرح شده است.

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیتها را به دانش‌آموزان بسپارید. مرحله به مرحله با سؤالات مناسب آنان را به سوی پاسخ هدایت کنید.

در یک کلاس متوسط ابتکار عمل را به دانش‌آموزان بدهید. آنها را به بحث و نقد آراء دیگران تشویق کنید. در پایان جمع‌بندی کنید و اشتباهات آنها را به ایشان گوشزد کنید.

در یک کلاس قوی پس از انجام فعالیتها از دانش‌آموزان بخواهید تعبیرهایی روزمره از دامنهٔ

نوسان و فرکانس موج ارائه دهند.

بخش ۵ــ کاربرد مدلهای ریاضی در توسعه ریاضیات

جلسه ۴۷ ــ سینوس و قضیه فیثاغورث

فعالیت قضیه فیثاغورث

اهداف فعالیت: تابع کسینوسی، توابع متناوب، قضیه فیثاغورث، آغاز مثلثات

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: صورتهای معادل مختلفی برای قضیه فیثاغورث پیدا کنید. آیا می‌توان احکامی در یکی از این زبانها را به احکامی در زبانهای دیگر ترجمه کرد؟

روش اجرا: در هر کلاسی می‌توانید فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید. اگر در فهم مسئله مشکل داشتند به آنها کمک کنید.

بخش ۵ــ کاربرد مدلهای ریاضی در توسعه ریاضیات

جلسه ۴۸ ــ حل مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت نسبتهای مثلثاتی

اهداف فعالیت: دایرهٔ مثلثاتی، نسبتهای مثلثاتی زوایای حاده و منفرجه

سؤالهایی که می‌توانید بپرسید: آیا می‌توان برای زوایای منفرجه α سینوس و کسینوس را چنان تعریف کرد که داشته باشیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

روش اجرا: در یک کلاس ضعیف فعالیت را خودتان به اجرا بگذارید و با طرح پرسشهای مناسب ذهن دانش‌آموز را با محتوا درگیر کنید.

در یک کلاس متوسط فعالیت را به دانش‌آموزان بسپارید و با پرسشهای مناسب آنان را راهنمایی و هدایت کنید.

در یک کلاس قوی دانش‌آموزان را با فعالیت تنها بگذارید. آنها را به بحث و نقدآراء یکدیگر وادارید. در پایان نکات مهم مطرح شده را جمع‌بندی کنید و اشتباهات دانش‌آموزان را به ایشان گوشزد نمایید.

فصل ۶ــ آشنایی با کامپیوتر

جلسه ۴۹ ــ سیستم عامل Dos

مطالب این قسمت عموماً برای رجوع کردن می‌باشند. اگر در مدرسه امکانات کامپیوتری دارید می‌توانید خلاصه‌ای از روش کاربرد این سیستم عامل را تا حدی که برای استفاده از نرم‌افزار Derive لازم است در کلاس مطرح کنید.

جلسه ۵۰ــ آشنایی با نرم افزار Derive

اگر در مدرسه امکانات کامپیوتری دارید می‌توانید از امکانات این نرم‌افزار برای بهتر فهماندن درس به دانش‌آموزان استفاده‌ای بسیار قوی کنید.

حساب دیفرانسیل و انتگرال با کمک نرم‌افزار Derive

نرم‌افزار Derive اعمالی نظیر مشتقگیری، انتگرالگیری و پیدا کردن حد توابع را در حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دستور Calculus در اختیار استفاده کننده قرار می‌دهد. این دستور شامل دستورات زیر می‌باشد که در حد نیاز برخی از آنها را شرح می‌دهیم.

CALCULUS: Differentiate Integrate Limit product Sum Taylor

ــ **زیر دستور Diffrentiate**: با انتخاب این دستور می‌توانید مشتق عبارت مورد نظر خود را نسبت به متغیر مقدار دلخواه از مرتبه n با وارد کردن اطلاعات موردنیاز به طریق زیر ملاحظه کنید. ابتدا در مقابل دستور CALCUIUS DIFFRENTIAL expression عبارت موردنظر را تایپ نموده و با زدن کلید Enter آن را وارد نمایید و سپس در مقابل دستور بعدی که در صفحهٔ کامپیوتر ظاهر می‌شود نام متغیری که مایلید عمل مشتق نسبت به آن انجام گیرد تایپ و وارد کنید. در مرحلهٔ سوم کافی است در مقابل دستور CALCULUS DIFFERENTIAL: Order: مرتبه مشتق را مشخص نمائید پس از وارد کردن عدد موردنظر شکل صوری دیفرانسیل از عبارت انتخابی خود را در پنجره اصلی مشاهده خواهید کرد که پس از انتخاب دستور Simplify صورت نهایی مشتق عبارت موردنظر خود را می‌بینید.

مثال: مشتق عبارت ln(cos(x)) نسبت به متغیر x از مرتبهٔ ۲ به صورت زیر انجام گرفته و

نمایش داده می‌شود.

کلید C

کلید D

CALCULUS DIFFERENTIAL expression: ln(cos(x))

کلید Enter

CALCULUS DIFFERENTIAL variable: x

کلید Enter

CALCULUS DIFFERENTIAL Order: ۲

کلید Enter

$۱:[\frac{d}{dx}]^{۲} \ln(\cos(x))$

کلید S

SIMPLIFY expression :# ۱

کلید Enter

$۲: - TAN(x)^{۲} - ۱$

زیر دستور Integrate: توسط این دستور انتگرال عبارتی که در مقابل دستور CALCULUS INTERGRATE expression: تایپ می‌شود نسبت به متغیرانتخابی در **دستور**: CALCULUS INTERGRATE variable: در صورتی‌که انتگرال معین باشد در فاصله $[a,b]$ که در دستور زیر وارد می‌گردد.

CALCULUS INTERGRATE Lower Limit : a Upper Limit : b

در پنجره اصلی مشاهده می‌کنید و سپس وارد کردن عبارت انتگرالی فوق به دستور Simplify جواب نهایی انتگرال را دریافت خواهید کرد.

مثال: برای محاسبهٔ انتگرال نامعین $\int \frac{۱}{x} dx$ به طریق زیر عمل کنید.

کلید C

کلید I

CALCULUS INTERGRATE expression : ۱/ x

کلید Enter

CALCULUS INTERGRATE variable: x

Enter کلید

CALCULUS INTERGRATE Lower Limit : Upper Limit :

Enter کلید

$۱ : \int \frac{۱}{x} dx$

S کلید

SIMPLIFY expression : #۱

Enter کلید

$۲ : \ln(x)$

ــ زیر دستور Limit: به کمک دستور فوق می‌توانید حد عبارت مورد نظرتان را نسبت به متغیر انتخابی وقتی به سمت a میل می‌کند در پنجرهٔ اصلی مشاهده کرده و با انتخاب دستور Simplify مقدار آن را به‌دست آورید.

مثال: حد عبارت $\frac{ax}{۱+x}$ نسبت به متغیر x وقتی که به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به صورت زیر انجام می‌شود.

C کلید

L کلید

CALCULUS LIMIT expression : ax / (۱ + x)

Enter کلید

CALCULUS LIMIT variable: x

Enter کلید

CALCULUS LIMIT Point: inf

Enter کلید

$۱ : \lim_{x \to \infty} \frac{ax}{۱ + x}$

S کلید

SIMPLIFY expression : #۱

۲ : a

ــ زیر دشتور Sum: برای محاسبهٔ مجموعها و سریها به‌کار می‌رود.

مثال: مجموع $\sum_{n=۰}^{m} \frac{۱}{۲^n}$ را می‌توانید به طریق زیر به‌دست آورید.

کلید C

کلید S

CALCULUS SUM expression : ۱/۲^n

کلید Enter

CALCULUS SUM variable: n

کلید Enter

CALCULUS SUM: Lower Limit: o   Upper limite: m

کلید Enter

$۱ : \sum_{n=۰}^{m} \frac{۱}{۲^n}$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

$۲ : ۱ - ۲^m$

عملیات مشتق، انتگرال، حد و مجموع به طریق دیگری نیز توسط نرم‌افزار Derive قابل اجراست. به این ترتیب که پس از وارد شدن به دستور Author با تایپ جملهٔ DIF(u,x,n) مشتق عبارت u را برحسب متغیر x از درجهٔ n، با تایپ جملهٔ INT(u, x, a, b) انتگرال عبارت u نسبت به متغیر x در فاصلهٔ [a, b] با تایپ جملهٔ LIM(u, x, a) حد عبارت u را وقتی x به سمت a میل می‌کند و با تایپ SUM(u,n,k,m) مجموع عبارت u با اندیس جمع n از k تا m در پنجرهٔ اصلی مشاهده می‌شود و با انتخاب دستور Simplify جواب ساده شده در صفحهٔ کامپیوتر ظاهر می‌گردد.

حد توابع

از جمله مفاهیمی که با استفاده از عملکرد گرافیکی این نرم‌افزار به‌طور شهودی قابل بررسی است مفهوم حد می‌باشد. برای آشنایی با نحوهٔ کاربرد آن حدود زیر را به‌طور تقریبی محاسبه می‌کنیم.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin(۳x)}{۷x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \sin\left(\frac{۱}{۱-x}\right)$

ج) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^۲ + x + ۱} - x\right)$

حل الف)

با وارد کردن عبارت sin(۳x) / (۷x) در دستور Author و سپس انتخاب دستور Plot نمودار تابع به صورت زیر در صفحهٔ کامپیوتر ظاهر می‌شود.

کلید A

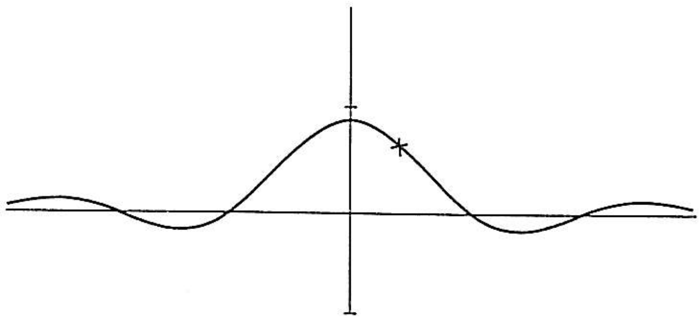
AUTHOR expression: sin(۳x) / (۷x)

کلید Enter

$$\frac{\sin ۳x}{۷x}$$

کلید P

کلید P



با توجه به اینکه مقدار تابع در نزدیکی نقطهٔ x = ۰ یعنی جایی که نمودار به محور yها نزدیک می‌شود، علاقه‌مندیم کافی است نشانگر کامپیوتر را به روی نمودار نزدیکی محور yها حرکت داده و مقدار تابع را که جلوی کلمهٔ Cross به ازای مقادیر کوچک x ظاهر می‌شود، بخوانید. به‌عنوان مثال در شکل بالا نشانگر کامپیوتر در محل فوق مقدار تابع را ۰/۳۹۰۶ نشان می‌دهد. به همین ترتیب مقدار تابع به ازای مقادیر مثبت و منفی x که در جداول زیر می‌بینید.

x	−۰/۵	−۰/۴	−۰/۳	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱
f(x)	−۰/۲۸	−۰/۳۲	−۰/۳۵	−۰/۴	−۰/۴۲	−۰/۴۲۱۸

x	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰/۰۱
f(x)	۰/۲۸	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۴	۰/۴۲	۰/۴۲۱۸

نشان می‌دهند که حد تابع وقتی x به صفر نزدیک می‌شود به‌طور تقریبی ۰/۴۲۱۸ می‌باشد. محاسبهٔ دقیق مقدار حد فوق را می‌توانید از طریق دستور Limit به نحو زیر نیز انجام دهید.

کلید A

AUTHOR expression: Lim(Sin(۳x) / (۷x), x, o)

کلید Enter

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x^{۳}}{۷x}$$

کلید Enter

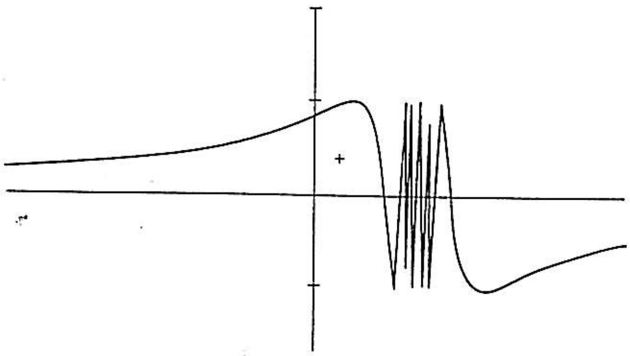
کلید S

SIMPLIFY expression: # ۱

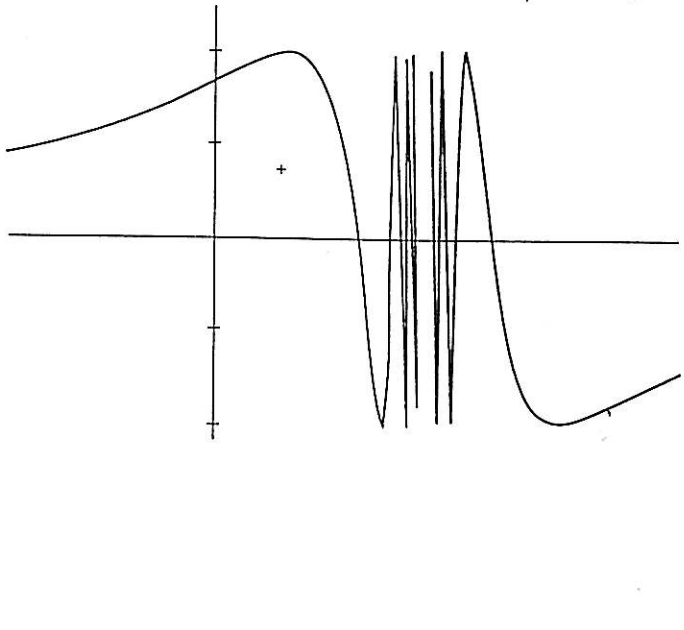
$$۲:\ \frac{۳}{۷}$$

حل ب)

با Plot کردن عبارت sin(۱/(۱ − x)) نمودار تابع فوق را به صورت زیر خواهید دید.



که با Zoom کردن نمودار فوق نسبت به هر دو محور برای بهتر دیدن رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ x = ۱ نمودار زیر را خواهیم داشت:



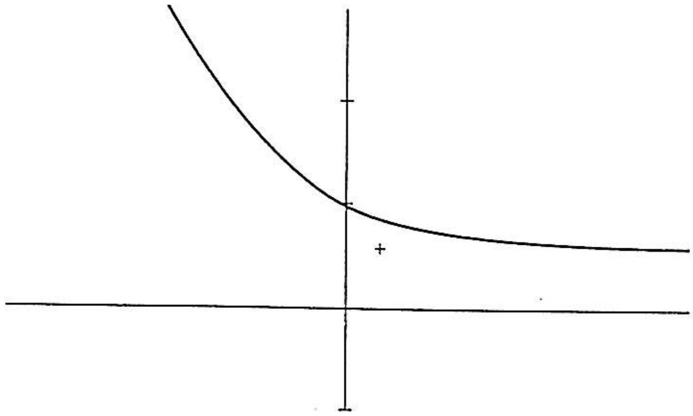
همانطور که در شکل صفحه قبل مشاهده می‌کنید به ازای xهای حول نقطهٔ $x = ۱$ مقدار تابع بین ۱ و ۱- در نوسان است که نشان‌دهندهٔ عدم وجود حد در نقطهٔ مزبور می‌باشد.

حل ج)

پس از Plot کردن عبارت

$$\text{sqrt}(x\wedge ۲ + x + ۱) - x \left(\sqrt{x^{۲} + x + ۱} - x\right)$$

با توجه به این که رفتار تابع به‌ازای مقادیر بزرگ x موردنظر می‌باشد، می‌توانید با استفاده از زیر دستور Center قسمت سمت راست نمودار را ملاحظه کنید.



که با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودار به ازای مقادیر بزرگ x در جدول زیر

x	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰/۰۱
f(x)	۰/۲۸	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۴	۰/۴۲	۰/۴۲۱۸

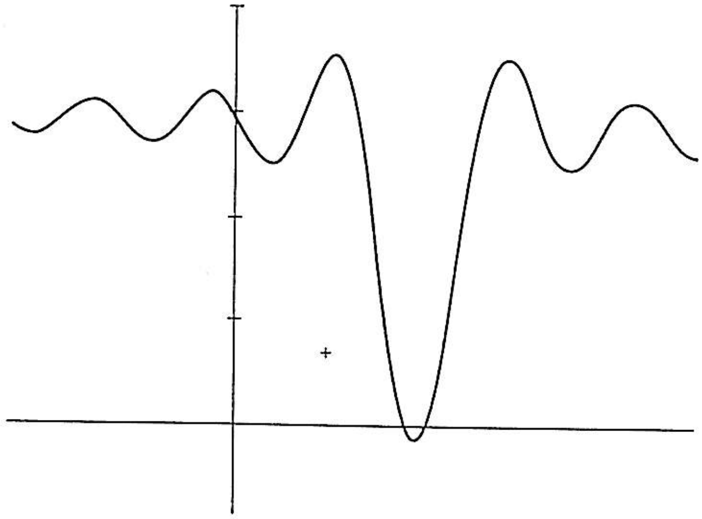
به‌راحتی دیده می‌شود که مقدار تابع به سمت ۰/۵ نزدیک شده و چنانچه از دستور Limit استفاده کنید مقدار حد فوق $\frac{۱}{۲}$ ظاهر می‌شود.

بررسی تعریف حد به کمک $\varepsilon - \delta$

اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یعنی برای هر $\varepsilon > ۰$ باید بتوانیم $\delta > ۰$ ای پیدا کنیم که $|f(x) - l| < \varepsilon$ برای $۰ < |x - a| < \delta$ پیدا کردن δ برای هر ε مفروض نیز به کمک Derive امکان‌پذیر است. در این رابطه به مثال زیر توجه کنید.

برای حد $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin ۳x}{\pi - x} = ۳$ مقادیر δ را طوری تعیین می‌کنیم که اگر $۰ < |x - \pi| < \delta$ آنگاه $\left|\frac{\sin ۳x}{\pi - x} - ۳\right| < ۰/۱$ باشد.

حل: نمودار تابع $|\frac{\sin 3x}{\pi - x} - 3| - 0/1$ که در زیر با استفاده از دستور Plot رسم شده در نظر بگیرید.



پیدا کردن مقادیر δ با استفاده از نمودار فوق به این معنی است که می‌خواهیم بزرگترین بازهٔ ممکن حول $x = \pi$ را پیدا کنیم به‌طوری‌که به‌ازای xهای واقع در آن، نمودار تابع فوق زیر محور xها قرار گیرد. لذا در این مسئله δ های کوچک‌تر از ۰/۱ برای ما کار خواهند کرد.

تمرین

۱ـ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$

ب) $\lim_{x \to 0} \left((x^3 + x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x \right)$

پ) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{|x^2 - 1|}$

۲ـ مقادیر δ را طوری بیابید که اگر $0 < |x+1| < \delta$ آنگاه $|\frac{2x^4 - 2x^3 + x - 1}{x^3 + 7x - 8} - \frac{3}{10}| < 0/1$ گردد.

۳ـ نامعادلهٔ $|\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} - 3| < 0/1$ را حل کنید.

مشتق و کاربردهای آن

در این قسمت با محاسبه مشتق و کاربردهایش از طریق نرم‌افزار Derive آشنا می‌شویم. در مثال زیر طریقهٔ محاسبهٔ مشتق یک تابع در نقطه‌ای معین را با استفاده از تعریف به روشهای متفاوت می‌بینیم. برای این منظور مشتق تابع $f(x) = \cos x$ را در نقطهٔ $x = ۲$ به دو راه محاسبه می‌کنیم:

راه اوّل: مطابق تعریف مشتق

$$f'(۲) = \lim_{h \to ۰} \frac{\cos(۲+h) - \cos ۲}{h}$$

پس با توجه به مطالبی که در قسمتهای پیش دیدیم چنانچه عبارت $(\cos(۲+h) - \cos ۲)/h$ را وارد دستور Author کنید با انتخاب زیر دستور Limit از دستور Calculus نسبت به متغیر h وقتی که به سمت صفر نزدیک می‌شود حد فوق که همان مقدار مشتق تابع در نقطهٔ $x = ۲$ می‌باشد برابر $-۰/۹$ حاصل می‌شود.

راه دوّم: مشتق تابع فوق در نقطهٔ $x = ۲$ به‌طریق زیر نیز قابل محاسبه است:

کلید A

AUTHOR expression:cosx

کلید Enter

کلید C

کلید D

$۱ : \frac{d}{dx} \cos x$

کلید S

$۲ : -\sin x$

کلید A

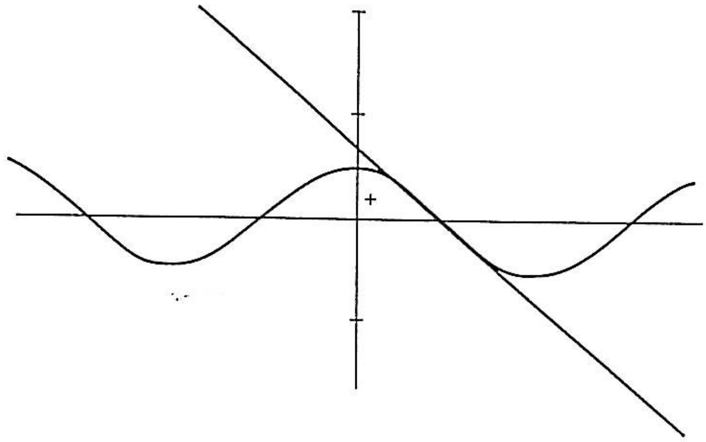
AUTHOR expression: sin ۲

کلید Enter

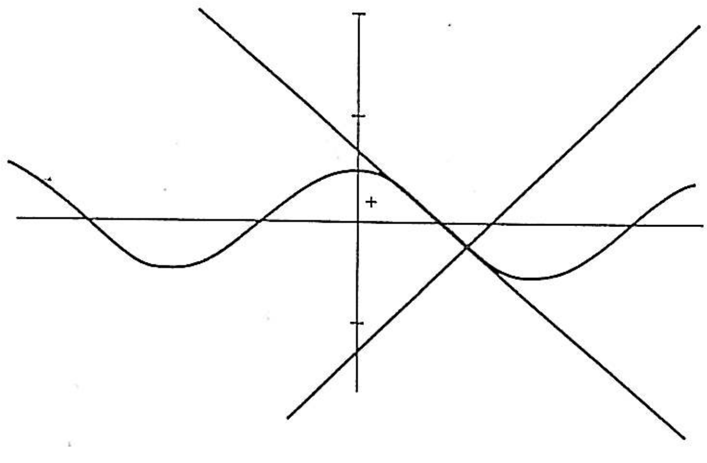
کلید S

$۳ : -۰/۹$

چنانچه مایل باشید مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ را به‌عنوان شیب خط مماس بر این نقطه مشاهده کنید. کافی است نمودار cosx و خط $(۲-x)\sin ۲ + \cos ۲$ را در یک صفحه Plot کنید. به این ترتیب شکل زیر را خواهید داشت.



با Plot خط $\frac{1}{\sin 2}(x-2)+\cos 2$ را در همین صفحه خط قائم بر نمودار cosx در نقطهٔ $x=2$ را به صورت زیر ملاحظه می‌کنید.



کاربردهای مشتق در زمینهٔ تعیین فواصلی که تابع صعودی یا نزولی است، تعیین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، جهت تقعر و نقطهٔ عطف تابع می‌باشد که در این رابطه با حل مثالهای زیر طرز استفاده نرم‌افزار Derive را در موارد فوق می‌بینید.

توابع زیر را در نظر می‌گیریم و موارد فوق را برای آنها بررسی می‌کنیم :

الف) $f(x)=2\sqrt{x^4+1}-2x^2+x$

ب) $f(x)=3x^5+x^3$

حل الف) محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ اول تابع فوق همانطور که می‌دانید به طریق زیرانجام می‌گیرد.

کلید C

کلید D

CALCULUS DIFFERENTIATE expression : ۲ Sqrt(x^۴+۱) – ۲x^۲ + x

کلید Enter

CALCULUS DIFFERENTIATE variable: X

کلید Enter

CALCULUS DIFFERENTIATE : order :۱

کلید Enter

$۱: \frac{d}{dx}(۲\checkmark(x^{۴}+۱)-۲x^{۲}+x)$

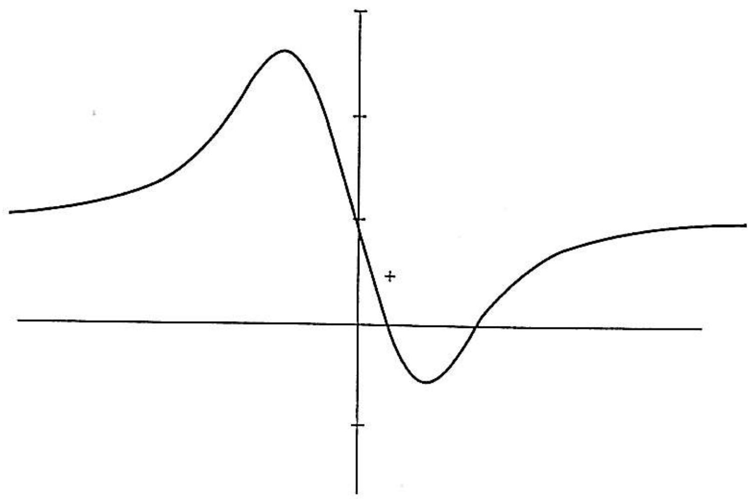
کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

$۲: \lim_{x \to \infty}(۱+\frac{۴}{x})^{x}:$

حال اگر عبارت Simplify شدهٔ مشتق را وارد دستور Author کرده و آن را Plot کنید شکل زیر را در صفحهٔ کامپیوتر خواهید دید.



به این ترتیب شکلی که پیش روی شماست نمودار مشتق تابع f می‌باشد. با توجه به این که تابع f در فواصلی که مشتق مثبت باشد صعودی است همانطور که در شکل دیده می‌شود نمودار فوق در فواصل $(-\infty, ۰/۲۸)$ و $(۱/۱, \infty)$ بالای محور xها واقع بوده و در نتیجه تابع f در این فواصل صعودی است. چنانچه به صفرهای نمودار فوق توجه کنید از آنجایی که در نقطهٔ $x = ۰/۲۸$ مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد پس f در این نقطه دارای ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x = ۱/۱$ با توجه به این که مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد دارای می‌نیمم نسبی می‌باشد.

حل ب)

برای تعیین جهت تقعر و نقطهٔ عطف تابع فوق با محاسبهٔ مشتق دوم به صورت زیر

کلید A

AUTHOR expression : Dif (۳x^۵+x^۳, x, ۲)

کلید Enter

$۱ : [\frac{d}{dx}]^{۲} (۳x^{۵} + x^{۳})$

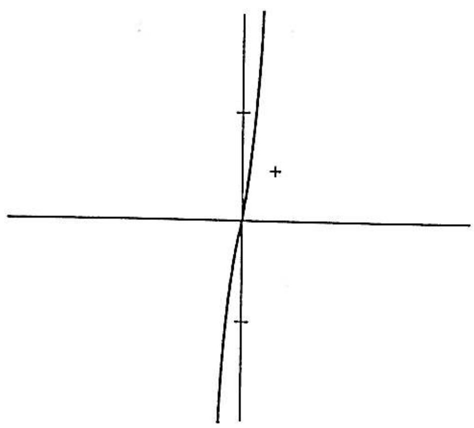
کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

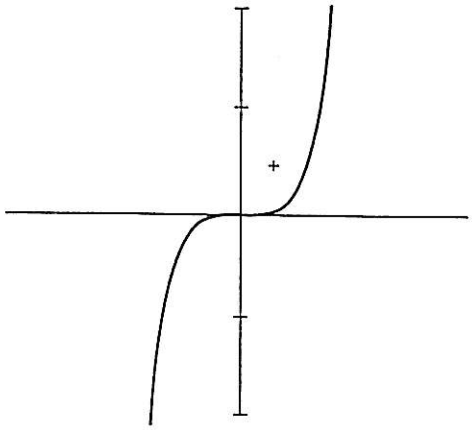
$۲ : ۶۰x^{۳} + ۶x$

و سپس Plot آن شکل زیرحاصل می‌شود.



با توجه به این که در فاصلهٔ $(-\infty, ۰)$ مقدار مشتق دوم منفی است تابع تقعر رو به پایین و درفاصلهٔ $(۰, +\infty)$ تقعر روبه بالا داشته و از آنجایی که در نقطهٔ $(۰, ۰)$ مشتق دوم تغییرعلامت

می‌دهد نقطهٔ فوق، نقطهٔ عطف تابع می‌باشد نتایج به‌دست آمده در مورد تابع فوق را می‌توانید با Plot آن در شکل زیر ملاحظه کنید.



تمرین

۱ــ مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{1+x^2} \qquad x=2$

ب) $g(x)=|x^2-\cos x|-x \qquad x=0$

پ) $h(x)=x^6-x^4 \qquad x=0$

۲ــ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x^3-x^2+1$

ب) $g(x)=x^3-\sin x$

پ) $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+x+1}$

۳ــ بررسی کنید تابع $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است.

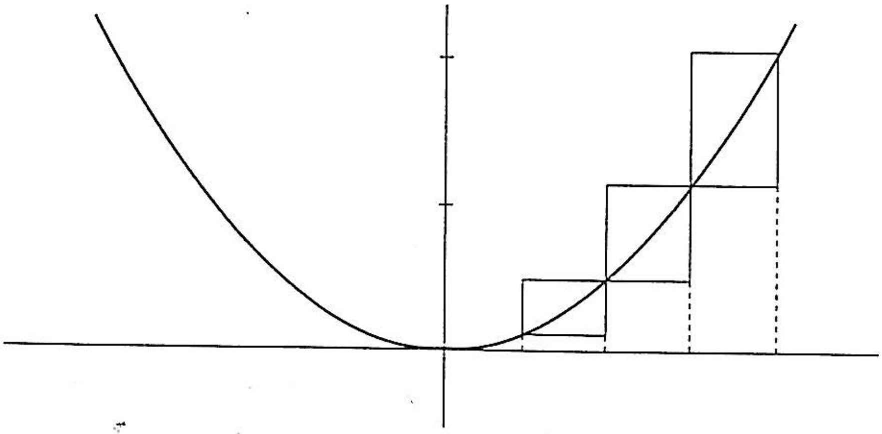
۴ــ تعیین کنید توابع زیر در چه فواصلی تقعر رو به پایین و در چه فواصلی تقعر روبه بالا دارند.

الف) $f(x)=\sqrt{x}-\sin x$

ب) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^6}$

انتگرال و کاربردهای آن

در این قسمت ابتدا با مفهوم انتگرال و روش تخمین مقدار انتگرال معین توابع و سپس موارد کاربردی آن به کمک نرم‌افزار فوق آشنا می‌شویم. همانطور که می‌دانید منظوراز انتگرال یک تابع $f(x) \geq ۰$ در بازهٔ $[a , b]$ مساحت سطح زیر نمودار تابع دراین بازه می‌باشد به‌طور طبیعی برای محاسبهٔ آن کافی است سطح را با مستطیلهایی بپوشانیم و مجموع مساحتهای این مستطیلها را حساب کنیم. بدیهی است که به این ترتیب مانند شکلهای زیر یا قسمتی از سطح باقی می‌ماند و یا مجبور می‌شویم سطح بیش‌تری را بپوشانیم.



در این روش در واقع بازهٔ $[a , b]$ را به بازه‌های $[x_۰ , x_۱],[x_۱ , x_۲],\dots,[x_{n-۱} , x_n]$ که در آن

$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \dots < x_n = b$$

تقسیم می‌کنیم و اگر چه لزومی ندارد که فاصله‌های $x_i - x_{i-۱}$ مساوی باشند ولی برای سادگی معمولاً آنها را مساوی می‌گیریم.

در این صورت برای هر $i = ۱, ۲, ۳,\dots, n$ داریم: $x_i - x_{i-۱} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ و مجموعهای زیر

$$f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + \dots + f(a+(n-۱)\Delta x)\Delta x$$

$$= \sum_{i=۰}^{n=۱} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

$$f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+۲\Delta x)\Delta x + \dots + f(a+n\Delta x)\Delta x$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

مجموع مساحت مستطیلهایی که در قبل مشاهده کردیم به ترتیب با تقریبهای نقصانی یا اضافی می‌باشند. بنابراین اگر تابع f در بازهٔ [a , b] صعودی باشد رابطهٔ

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} f(a+i\Delta x)\Delta x \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=۱}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

برقرار بوده و در صورتی‌که f در بازهٔ [a , b] نزولی باشد عکس رابطهٔ فوق برقرار است و واضح است که با افزایش n مقدار مجموعها به هم نزدیک شده و به یک عدد میل کرده و تخمین بهتری برای مقدار انتگرال به‌دست می‌دهند. به‌عنوان مثال به‌ازای n=۱۰ و n=۱۰۰ حدود انتگرال $\int_۱^۳ \frac{۱}{۱+x^۳}dx$ را تخمین می‌زنیم.

حل: برای محاسبهٔ مجموعها به‌ازای n=۱۰ از دستور Sum به طریق زیر استفاده می‌کنیم.

کلید A

AUTHOR expression: Sum ۱/(۱+(۱+۰/۲i)^۳))۰/۲ , i, ۰, ۹)

کلید Enter

$۱ : \Sigma_{i=۰}^{۹} \frac{۱}{۱+(۱+۰/۲i)^۳}۰/۲$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

۰/۳۶۷۶۱۷

کلید A

AUTHOR expression :Sum((۱/(۱+(۱+۰/۲i)^۳))۰/۲ , i, ۱, ۱۰)

کلید Enter

$۱ : \Sigma_{i=۰}^{۱۰} \frac{۱}{۱+(۱+۰/۲i)^۳}۰/۲$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

۰/۲۷۴۷۶

با توجه به این که تابع $\frac{۱}{۱+x^۳}$ در بازهٔ $[۱,۳]$ نزولی است $۰/۲۷۴۷۶ \le \int_۱^۳ \frac{۱}{۱+x^۳} \le ۰/۳۶۷۶۱۷$ می‌باشد و چنانچه به طریق مشابه به ازای $n=۱۰۰$ حدود انتگرال را محاسبه کنیم رابطهٔ $۰/۳۱۴۱۸۰ \le \int_۱^۳ \frac{۱}{۱+x^۳} \le ۰/۳۲۳۴۶۶$ را به‌دست می‌آوریم. که البته محاسبهٔ مقدار دقیق انتگرال از طریق زیر دستور Integrate دستور Calculus درستی روابط فوق را تصدیق می‌کنند.

مقدار انتگرال فوق از طریق دستور Integrate که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

کلید C

کلید I

CALCULUS INTEGRATE expression: ۱/۱+x^۳

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE variable: x

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE : Lower Limit: ۱ upper Limit: ۳

کلید Enter

$۱: \int_۱^۳ \frac{۱}{۱+x^۳} dx$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

۲ : ۰/۳۱۸۷۹۹

از آنجایی که ۰/۲۷۴۷۶>۰/۳۱۸۷۹۹>۰/۳۶۷۶۱۷ و

۰/۳۱۴۱۸۰>۰/۳۱۸۷۹۹>۰/۳۲۳۴۶۶ مؤید روابطی که دیدیم می‌باشد.

با توجه به این که وقتی $n \to \infty$ مجموعهای نقصانی و اضافی به یک مقدار مشترک میل می‌کنند می‌توان مقدار انتگرال را به صورت زیر نیز تعریف کرد :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

یا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$$

با استفاده از نرم‌افزار فوق می‌توان ویژگیهای انتگرال معین را نیز بررسی نمود به‌عنوان مثال در زیر نشان می‌دهیم که اگر $f(x) = x^2 + 1$ آنگاه

$$\int_0^1 k(x^2+1)dx = k\int_0^1 (x^2+1)dx$$

برای نشان دادن درستی رابطهٔ فوق به‌طور مستقیم از زیر دستور Integrate استفاده می‌کنیم و با محاسبهٔ هر یک از انتگرالها تساوی آنها را نتیجه می‌گیریم. مقدار انتگرال طرف چپ تساوی را به ترتیب زیر داریم:

کلید C

کلید I

CALCULUS INTEGRATE expression: k(x^۲+۱)

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE variable: x

کلید Enter

CALCULUS INTEGRATE : Lower Limit: ۰ upper Limit: ۱

کلید Enter

$1 : \int_0^1 (kx^2+1)dx$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

$2 : \frac{4k}{3}$

برای تعیین مقدار سمت راست ابتدا به طریق زیر مقدار انتگرال را به‌دست می‌آوریم.

کلید C

کلید I

CALCULUS INTEGRATE expression: x^۲+۱

Enter کلید

CALCULUS INTEGRATE variable: x

Enter کلید

CALCULUS INTEGRATE : Lower Limit: ۰ upper Limit: ۱

Enter کلید

$۱ : \int_{۰}^{۱} (x^{۲} + ۱) dx$

S کلید

SIMPLIFY expression : #۱

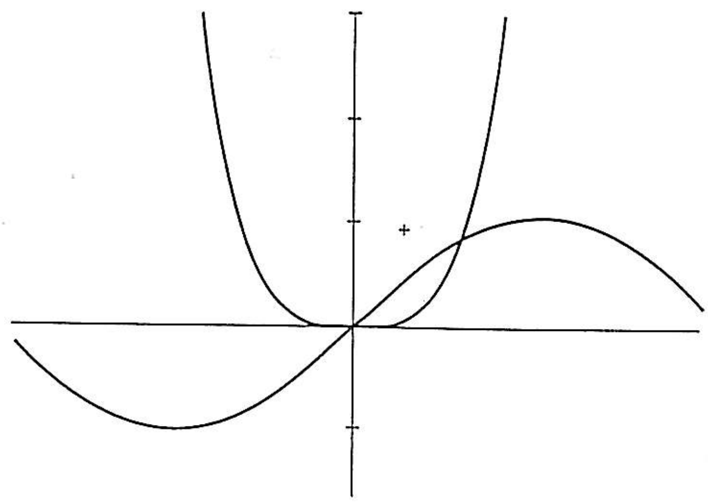
$۲ : \frac{۴}{۳}$

همانطور که می بینید مقدار به‌دست آمده مؤید درستی رابطهٔ موردنظر می‌باشد.

در ادامه کاربرد انتگرال را در محاسبهٔ سطح بین دو منحنی sinx و $x^{۴}$ می‌بینیم.

چنانچه نمودارهای sinx و $x^{۴}$ را در یک صفحه Plot کنید شکل زیر را در صفحهٔ کامپیوتر ملاحظه می‌کنید.

با قرار دادن نشانگر کامپیوتر در نقاطی که نمودارها یک‌دیگر را قطع نموده‌اند مختصات نقاط



فوق به ترتیب زیر مشخص می‌شوند.

(۰ , ۰), (۰/۹۴,۰/۸۱)

با توجه به این که نمودار تابع sinx بالای نمودار تابع $x^۴$ قرار گرفته کافی است انتگرال $\int_۰^{۰/۹۴}(\sin x - x^۴)dx$ را محاسبه نمایید. که مقدار آن به ترتیب زیر مساوی ۰/۲۶۳۴ به‌دست می‌آید.

کلید A

AUTHOR expression: INT sin(x − x^۴, x, ۰, ۰/۹۴)

کلید Enter

۱: $\int_۰^{۰/۹۴}(\sin x - x^۴)dx$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۱

کلید Enter

۲: ۰/۲۶۳۴

تمرین

۱ــ مقادیر انتگرالهای زیر را به‌ازای n = ۱۰ و n = ۱۰۰ تخمین بزنید.

الف) $\int_۰^۱ \sin(x^۲)dx$

ب) $\int_۰^۵ \frac{۱+x^۲}{۱+x}dx$

پ) $\int_۰^۲ (x^۴ - x^۳)dx$

۲ــ اگر $f(x) = x^۲ - \cos x + ۱$ و $g(x) = x^۲$ نشان دهید.

الف) $\int_۰^۲ f(x)dx = \int_۰^۱ f(x)dx + \int_۱^۲ f(x)dx$

ب) $\int_۰^۱ g(x)dx \le \int_۰^۱ f(x)dx$

۳ــ سطح بین منحنیهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -x^۲ + ۱ \quad , \quad g(x) = x$

ب) $f(x) = \sqrt{۱ + x^۴} \quad , \quad g(x) = ۲\cos x$

در این قسمت با کمک نرم‌افزار Derive با تابع لگاریتم از طریق انتگرال آشنا می‌شویم سپس تابع نمایی را به عنوان معکوس تابع لگاریتم معرفی می‌کنیم.

چنانچه تابع لگاریتم lnx را به عنوان $\int_{۱}^{x}\frac{dt}{t}$ تعریف کنید می‌توانید برای مثال $\ln ۲=\int_{۱}^{۲}\frac{dt}{t}$ را با استفاده از مطالبی که تاکنون دیده‌اید محاسبه نمایید.

اگر بازهٔ بستهٔ $[۱, ۲]$ را به n بازهٔ $[x_{n-۱}, x_n], \ldots, [x_۱, x_۲], [x_۰, x_۱]$ افراز کنیم. داریم:

$$x_۰=۱<x_۱=۱+\frac{۱}{n}<\ldots<x_i=۱+\frac{i}{n}<\ldots<x_n=۲$$

پس

$$\ln ۲=\int_{۱}^{۲}\frac{dt}{t}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{i}{n}}$$

که با کمک نرم‌افزار Derive به‌طریق زیر مقدار آن مساوی ۰/۶۹۳۱۴۷ به‌دست می‌آید.

کلید A

AUTHOR expression: \frac{۱}{n} \ Sum(۱/(۱+i/n), i, ۱, n)

کلید Enter

$$۱: \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{i}{n}}$$

کلید C

کلید L

CALCULUS LIMIT expression : #۱

کلید Enter

CALCULUS LIMIT variable: n

کلید Enter

CALCULUS LIMIT Point: inf

کلید Enter

$$۲: \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{i}{n}}$$

کلید S

SIMPLIFY expression : #۲

Enter کلید

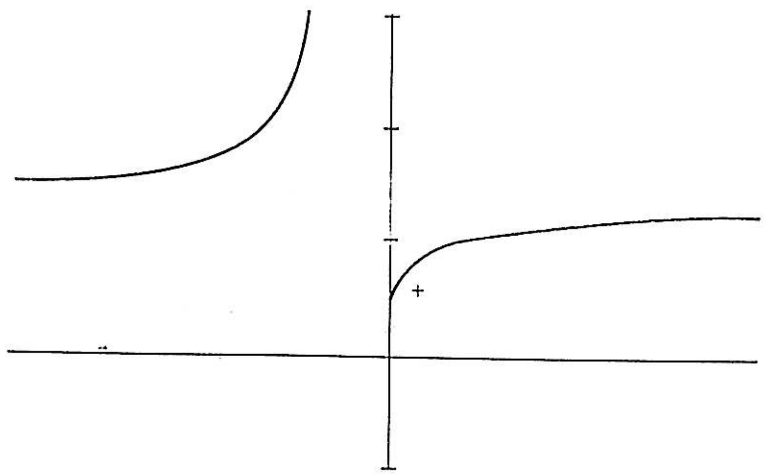
۲: ۰/۶۹۳۱۴۷

حال به‌عنوان نکته‌ای دیگر نشان می‌دهیم که :

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = e$$

همانطور که در مبحث توابع دیدیم کافی است نمودار تابع $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ را در صفحه Plot کنید.

به این ترتیب نمودار زیر را در صفحه کامپیوتر دارید.

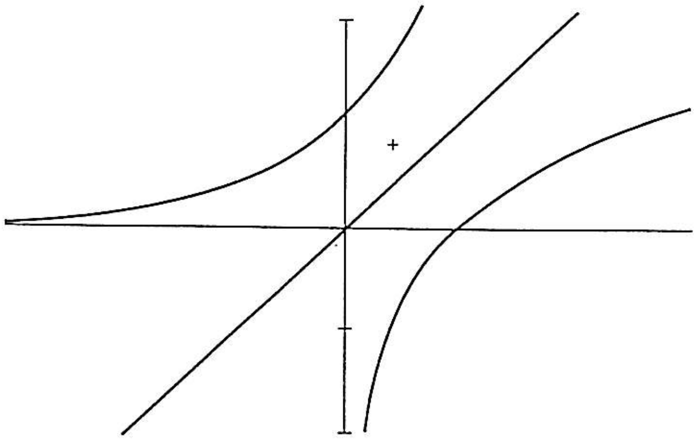


حال با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودار تابع به‌ازای مقادیر مختلف n مقادیر تابع را که در جدول زیرتنظیم شده است، ملاحظه می‌کنید

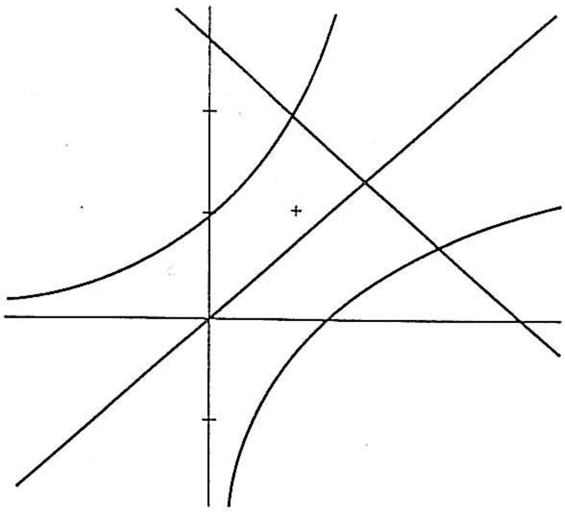
n	۳۰	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
f(n)	۲/۶۵۶	۲/۶۵۶	۲/۶۵۶	۲/۶۵۶

که مقدار تابع به عدد e نزدیک می‌شود.

در ادامه نشان می‌دهیم که دو تابع e^x و lnx وارون یک‌دیگرند. برای این منظور ابتدا دو تابع فوق را در یک صفحه Plot می‌کنیم و از آنجایی که نمودارهای دو تابع که وارون یک‌دیگرند نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند پس خط $y = x$ را نیز در همان صفحه رسم نموده و شکل صفحه‌بعد خواهیم دید.



در هر نقطهٔ $(x_0, \ln x_0)$ بر روی نمودار تابع lnx چنانچه خط $-(x - x_0) + \ln x_0$ را ترسیم کنید خط فوق نمودار تابع e^x را در نقطهٔ $(\ln x_0, x_0)$ قطع می‌کند. برای مثال خط $-(x - ۲) + \ln ۲$ را که از نقطهٔ $(۲, \ln ۲)$ روی نمودار تابع lnx می‌گذرد در صفحه Plot کرده و شکل زیر را در مقابل خود خواهید داشت.

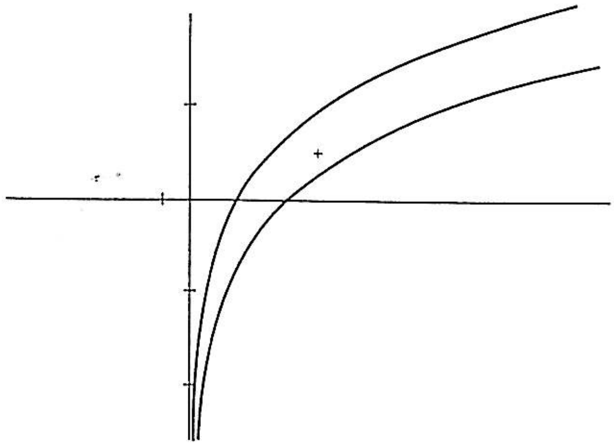


همانطور که می‌بینید مختصات نقطهٔ تقاطع خط فوق با نمودار تابع e^x عبارتست از $(۰/۶۹۴۴, ۲)$ که با توجه به این که $\ln ۲ = ۰/۶۹۴۴$ قرینهٔ نقطهٔ $(۲, \ln ۲)$ نسبت به نیمساز ربع اول وسوم می‌باشد.

به کمک نرم‌افزار فوق برخی از خواص توابع نمایی و لگاریتمی نیز قابل بررسی هستند. برای مثال نشان می‌دهیم.

$$\ln(۲x) = \ln x + \ln ۲$$

حل: نمودارهای $\ln(۲x)$ و $\ln x$ را در یک صفحه Plot کنید.



به ازای $x = ۱$ با حرکت نشانگر کامپیوتر بر روی نمودارهای دو تابع می‌بینید که $\ln ۲ = ۰/۶۹$ و $\ln ۱ = ۰$ می‌باشد. حال چنانچه تابع $\ln x + \ln ۲$ را نیز در همین صفحه Plot کنید باز همان شکل قبلی را در صفحهٔ کامپیوتر خواهید داشت که نشان می‌دهد نمودارهای دو تابع $\ln x + \ln ۲$ و $\ln ۲x$ برهم منطبقند.

یکی از مسائلی که در آنها توابع لگاریتمی و نمائی ظاهر می‌شوند مسائل معروف به رشد و زوال هستند. در اینگونه مسائل با توجه به نام آنها اگر $f(t)$ نمایانگر میزان پارامتر رو به رشد یا زوال موردنظر در لحظهٔ t باشد، می‌دانیم که آهنگ تغییر پارامتر موردنظر درلحظهٔ t، $f'(t)$ بوده و عددی حقیقی چون k موجود است به‌طوری‌که $f'(t) = kf(t)$ می‌باشد. حال اگر طرفین رابطه را بر $f(t)$ تقسیم کرده و انتگرال بگیریم، داریم: $\ln f(t) = kt + c$ که چون $t = ۰$ در نظر بگیرید $c = \ln f(۰)$ به‌دست می‌آید. پس می‌توان گفت $\ln f(t) - \ln f(۰) = kt$ و یا $\ln \frac{f(t)}{f(۰)} = kt$ که با اثر دادن تابع نمایی بر دو طرف رابطهٔ اخیر جواب معادلهٔ $f'(t) = kf(t)$ به صورت سادهٔ $f(t) - f(۰)e^{kt}$ قابل نمایش می‌باشد.
به‌عنوان مثال جمعیت یکی از پارامترهایی است که رشد یا زوال آن مورد توجه می‌باشد در سال ۱۳۵۵ و ۱۳۶۵ جمعیت ایران به ترتیب ۳۳۷۰۸۷۴۴ و ۴۹۴۴۵۰۱۰ نفر سرشماری شده است که با توجه به رابطهٔ $f(t) = f(۰)e^{kt}$ چنانچه مبنای رشد جمعیت را از سال ۱۳۵۵ در نظر بگیرید برای به‌دست آوردن نرخ افزایش جمعیت کافی است معادلهٔ روبرو را حل کنید: $۴۹۴۴۵۰۱۰ = ۳۳۷۰۸۷۴۴e^{۱۰k}$

با حل معادلهٔ فوق با استفاده از نرم‌افزار Derive به‌طریق زیر نرخ افزایش جمعیت مساوی ۰/۰۳۸۳۱۰۳ به‌دست می‌آید.

کلید L

SOLVE expression: ۳۳۷۰۸۷۴۴ exp(۱۰k) = ۴۹۴۴۵۰۱۰

Enter کلید

SOLVE :Lower: −۱۰ Upper: ۱۰

Enter کلید

۱ : k = ۰/۰۳۸۳۱۰۳

تمرین

۱ـ نشان دهید

$$\lim_{n\to ۰}(۱+n)^{\frac{۱}{n}} = e$$

۲ـ حدهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰}\ln(x+۱)$

ب) $\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{\ln x}-\frac{۱}{x-۱}\right)$

پ) $\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{x}$

ت) $\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۴}{x}\right)^x$

۳ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\ln(e^x+۲)=۷$

ب) $\ln(x+۱)+\ln(x-۲)=۱$

۴ـ درستی روابط زیر را نشان دهید.

الف) $e^{x+۱}=e\times e^x$

ب) $\ln(x^۲)+۲\ln x$

پ) $\ln\frac{x}{۲}=\ln x-\ln ۲$

۵ ـ با توجه به این که نرخ افزایش رشد جمعیت ایران بر مبنای سال ۱۳۵۵ برابر ۰/۰۳۸ به‌دست آمد جمعیت ایران را در سالهای ۱۳۷۰ و ۱۳۷۵ تخمین بزنید.

محاسبه نفس پس از حل مسئله

با کمک این سند ارزشیابی می‌توانید به دانش‌آموزان بیاموزید که عمق دانش ریاضی خود را ارزشیابی کنند.

مرحله اوّل: عبور از حجابهای ریاضیات

حجاب اوّل: فرمولها و نمادها

هنگام حل یک مسئله ریاضی چه در محاسبات و چه در استدلالها به زبان فرمولها و نمادها نیازمندیم. در واقع یکی از مراحل تجرید ریاضی، ترجمه مسئله به زبان فرمولها و نمادهاست. اگر قوانین و روابط حاکم بر نمادها را بدانیم در بسیاری از موارد می‌توان با استفاده از همین قوانین مسئله را حل کرد،بدون این که درهر یک از مراحلِ کاربرد قوانین به معنی و مفهوم واقعی آن مراحل در مسئله توجه نداشته باشیم، مثلاً فیزیکدانان در بسیاری موارد پس از انجام محاسبات طولانی، تعبیر فیزیکی فرمولهای نهایی را بررسی می‌کنند اما به تعبیر فیزیکی تمام مراحل محاسبات علاقمند نیستند.

سطح ۰ ـ دانش‌آموز قادر به کار با فرمولها و نمادها نیست و بر قوانین حاکم بر آنان تسلط ندارد.

سطح ۱ـ دانش‌آموز مسئله را به زبان فرمولها و نمادها به‌درستی ترجمه کرده است اما قادر به محاسبه و استدلال نیست.

سطح ۲ـ دانش‌آموز پس از ترجمه به زبان فرمولها و نمادها مسئله را به‌درستی حل کرده است.

سطح۳ـ دانش‌آموز قادر است مسئله حل شده را به زبان مسئله واقعی تعبیر کند.

سطح ۴ـ دانش آموز تعبیر و مفاهیم پشت صحنه تمام مراحل محاسبات و استدلال را مدنظر قرار داده است.

حجاب دوّم: مفاهیم ریاضی و ارتباط آنان

سطح ۰ ـ دانش‌آموز مفاهیم پشت صحنه و ارتباطات بین آنها را در حل مسئله مورد توجه قرار داده است.

سطح ۱ـ روند حل مسئله توسط دانش‌آموز از ارتباط بین مفاهیم ریاضی تأثیرپذیرفته است.

سطح ۲ـ پیش از حل مسئله مفاهیم کلیدی در مسئله انتخاب شده‌اند و با در نظر گرفتن ارتباط آنها با سایر مفاهیم مسئله حل شده است.

سطح ۳ـ پیش از حل مسئله و هنگام انجام محاسبات و استدلالها و پس از حل مسئله ارتباطهای مطرح شده بین مفاهیم مورد توجه بوده است.

سطح ۴ـ دانش‌آموز مسئله و حل آن را به زبان مفاهیم و ارتباط آنها مستقل از فرمولها و

نمادها می‌فهمد.

حجاب سوّم: *رشد و تغییر مفاهیم ریاضی و تبدیل آنها به یکدیگر*

در روند اکتشاف ریاضی ذهن ما چگونه عمل می‌کند؟ یکی از پاسخهای احتمالی به این سؤال این است که ذهن ما با توجه به تجربه ریاضی خود بین مفاهیم ریاضی شناخته شده‌اش ارتباط برقرار می‌کند. در دیدگاههای مختلف به این مفاهیم این ارتباطات نیز متفاوتند. ذهن ما هنگام حل مسئله سعی می‌کند با توجه به پیشینه ریاضی خود بین این مفاهیم ارتباط برقرار نماید و این تلاش منجر به بازسازی روابط قدیمی بین مفاهیم در دیدگاههای جدید مطرح شده در مسئله خواهد شد.

با افزایش تجربه ریاضی هر یک از مفاهیم ریاضی رشد پیدا می‌کنند و عمیق‌تر می‌شود و بدین وسیله با مفاهیم بیش‌تری ارتباط برقرار می‌کنند. مثلاً مفهوم عدد در تاریخ ریاضیات در چندین مرحله رشد قابل توجهی داشته و هم‌گام با پیشرفت تمدن بشری این مفهوم نیز توسعه یافته است. گاهی بعضی از مفاهیم در روند رشد خود مفاهیم دیگری را که مستقل از آنها به‌وجود آمده است می‌بلعند و در خود هضم می‌کنند. مفاهیم ریاضی اینگونه به هم می‌پیوندند.

سطح ۰ــ پس از حل مسئله بعضی از مفاهیم ریاضی در ذهن دانش‌آموز رشد کرده و عمیق‌تر شده است.

سطح ۱ــ ارتباط مفاهیم توسعه یافته با مفاهیم ریاضی دیگر که در طی حل مسئله کشف شده است مورد توجه قرار گرفته است.

سطح ۲ــ ارتباط مفاهیم توسعه یافته با مفاهیم ریاضی دیگر مسئله از روند حل مسئله بررسی شده است.

سطح ۳ــ پس از حل مسئله بعضی مفاهیم چنان رشد کرده‌اند که بعضی مفاهیم دیگر را هم دربرگرفته‌اند.

سطح ۴ــ ارتباط یک مفهوم با سایر مفاهیم، قبل و بعد از پیوستن به مفاهیم دیگر مقایسه شده‌اند.

حجاب چهارم: *خواستگاه رشد مفاهیم*

هر یک از شاخه‌های ریاضیات بستر به‌خصوصی برای رشد مفاهیم فراهم می‌کنند. مثلاً در هندسه دبیرستانی انواع استدلال بسیار محدودند و در عوض بستر هندسه برای خلق اشیاء ریاضی بسیار و مطالعه آنها آماده است. برعکس در جبر دبیرستانی اشیاء مورد مطالعه محدودترند اما تکنیکهایی که برای مطالعه آنها به‌کار می‌روند بسیار متنوع هستند. با شناخت بستری که یک موضوع ریاضی برای حل مسئله فراهم می‌کند می‌توان در چگونگی رشد مفاهیم دخالت نمود.

سطح ۰ــ دانش‌آموز در فرایند رشد مفاهیم دخیل بوده است.

سطح ۱ـ دانش‌آموز به‌طور هدفمند رشد مفاهیم را تحت تأثیر قرار داده است.

سطح ۲ـ دانش‌آموز محدودیتهایی که بستر مفاهیم مورد مطالعه ایجاد می‌کند می‌شناسد و تأثیر او بر رشد مفاهیم متأثر از شناخت این محدودیتهاست.

سطح ۳ـ دانش‌آموز امکاناتی را که بستر مفاهیم مورد مطالعه ایجاد می‌کند می‌شناسد و در رشد مفاهیم به‌کار می‌برد.

سطح ۴ـ دانش‌آموز با موفقیت روند رشد یک مفهوم را هدایت می‌کند تا مفهوم از پیش تعیین شده‌ای را دربر بگیرد.

حجاب پنجم: سیستم منطقی ریاضی

بسیار پیش می‌آید که مفاهیم و ارتباطات آن در یک رشته ریاضی با مفاهیم و ارتباطات آن در شاخه‌ای دیگر دارای ساختار یکسانی باشند. مثلاً پشت‌ورو کردن عکس و در ۱- ضرب کردن یک عدد دو مفهوم کاملاً نامربوط هستند اما هر دو دارای این ساختار هستند. که با تکرار آنها همان شیء اولیه به‌دست می‌آید. یعنی با دوبار پشت و رو کردن عکس، عکس به حالت اول درمی‌آید و با دو بار در ۱- ضرب کردن یک عدد خود همان عدد به‌دست می‌آید. پس می‌توان سیستم ارتباط مفاهیم و قضایای صادق برای آنان را مستقل از آن مفاهیم خاص در نظر گرفت و مطالعه کرد.

سطح ۰ ـ دانش‌آموز یک سیستم ریاضی یکسان با سیستم ریاضی مسئله ولی متفاوت با آن می‌شناسد.

سطح ۱ـ او قادر است قضایا و اطلاعات یک سیستم را به دیگری ترجمه کند و برعکس.

سطح ۲ـ او می‌تواند با ترجمه از یک سیستم منطقی ریاضی به دیگری در حل مسئله کمک بگیرد.

سطح ۳ـ او می‌تواند مشابه یک مسئله ریاضی را در یک سیستم منطقی دیگر بنویسد.

سطح ۴ـ دانش‌آموز سیستم منطقی ریاضی مسئله را مستقل از مفاهیم درک می‌کند.

حجاب ششم: ارتباط ادراک ما با سیستمهای ریاضی

ذهن ما سیستمهای ریاضی را مطالعه می‌نماید. سؤال این است که این تبادل اطلاعات بین سیستم ریاضی و ذهن ما چگونه صورت می‌گیرد؟ یک پاسخ احتمالی به این سؤال این است که ذهن ما سیستم ریاضی را درون خود شبیه‌سازی می‌کند و سعی می‌کند بر مدل ساخته شده به‌طور مستقیم علم پیدا کند. هر چقدر مدلهای ساخته شده توسط ذهن ما دقیق‌تر باشند، ذهن ما اطلاعات درست‌تری در مورد آن سیستم ریاضی در اختیار ما قرار می‌دهد.

سطح ۰ـ ذهن دانش‌آموز قادر به شبیه‌سازی سیستم ریاضی مورد مطالعه درون خود می‌باشد.

سطح ۱ـ ذهن دانش‌آموز قادر به درک مستقیم سیستم مشابه درونی خود می‌باشد به‌طوری که به حل مسئله کمک کند.

سطح ۲ـ دانش‌آموز در روند مشابه‌سازی در ذهن خود تأثیرگذار بوده است.

سطح ۳ـ دانش‌آموز به‌طور هدفمند روند مشابه‌سازی را کنترل کرده است تا بهتر به حل مسئله کمک کند.

سطح ۴ـ ارتباط مستقیم دانش‌آموز با مدلی که در ذهن خود ساخته است منجر به حل مسئله می‌شود.

حجاب هفتم: خلق سیستمهای ریاضی

ریاضیدانان با برقراری ارتباط بین سیستمهای ریاضی مختلف و توسعه آنها سیستمهای ریاضی جدیدی خلق می‌کنند. گاهی اوقات حالتهای خاص سیستمهای توسعه یافته به مثالهای مهمی منجر می‌شود. ایده برای خلق سیستمهای جدید همیشه از سیستمهای ریاضی بررسی شده گرفته می‌شود و تجربهٔ ریاضیدان در مهارت او در خلق سیستمهای جدید نقش مهمی دارد. در سطح یک دانش‌آموز تعمیم یک مسئله می‌تواند منجر به خلق سیستمهای ریاضی توسط دانش‌آموز گردد. دانش‌آموز با برقراری ارتباط بین سیستمهایی که می‌شناسد و توسعه آنها قادر به تعمیم نتایج به‌دست آمده از حل مسئله است.

سطح ۰ـ دانش‌آموز در سیستم منطقی مسئله تغییر و توسعه داده است.

سطح ۱ـ دانش‌آموز با هدف توسعه سیستم بین سیستم ریاضی مسئله و سیستمهای ریاضی دیگر ارتباط برقرار کرده است.

سطح ۲ـ توسعه سیستم منجر به تعمیم مسئله موردنظر شده است.

سطح ۳ـ سیستم ریاضی توسعه یافته با دیگر سیستمها مقایسه شده است و ارتباط تعمیم مسئله با مسائل مشابه در نظر گرفته شده است.

سطح ۴ـ دانش‌آموز موفق به خلق یک سیستم جدید ریاضی شده است.

مرحلهٔ دوّم: ظهور انوار علم در قلب

نور اوّل: حدس

حدس نوری است که چون جرقه‌ای در تاریکی می‌درخشد و راه را نشان می‌دهد. حدس خوب با تجربه به‌دست نمی‌آید بلکه نصیب قلب آماده است. قلبی که حجابهای علم را پشت‌سر گذاشته باشد.

سطح ۰ـ دانش‌آموز برای چگونگی کاربرد فرمولها و نمادها حدس می‌زند.

سطح ۱ـ دانش‌آموز برای برقراری ارتباط بین مفاهیم حدس می‌زند.

سطح ۲ـ دانش‌آموز برای تعمیق مفاهیم حدس می‌زند.

سطح ۳ـ دانش‌آموز برای تشخیص سیستم ریاضی مسئله حدس می‌زند.

سطح ۴ـ دانش‌آموز برای کشف سیستم ریاضی مناسب برای حل مسئله حدس می‌زند.

نور دوّم: وجدان

وجدان نوری است که اطراف عالِم را روشن می‌کند و عالم راه را از بیراه تشخیص می‌دهد. وجدان نصیب قلبی است که حقیقت‌جو است و هدفش از کسب علم دستیابی به حقیقت است.

سطح ۰ ـ دانش‌آموز در هر مرحله کاربرد نمادها و فرمولها می‌داند چه باید بکند ولی نمی‌داند مسئله به چه چیزی منجر خواهد شد.

سطح ۱ـ دانش‌آموز هر مفهوم را می‌داند چگونه به مفاهیم دیگر مربوط می‌شود ولی نظام کلی مفاهیم مسئله را نمی‌بیند.

سطح ۲ـ دانش‌آموز می‌داند چگونه مفهومی را تعمیم دهد ولی ارتباطات احتمالی مفهوم تعمیق یافته را با دیگر مفاهیم از پیش نمی‌بیند.

سطح ۳ـ دانش‌آموز سیستم ریاضی مسئله را تشخیص می‌دهد.

سطح ۴ـ دانش‌آموز می‌داند سیستم مناسب برای مسئله را باید چطور بسازد.

نور سوّم: الهام

الهام نوری است که تصویری از حقیقت را در اختیار عالِم قرار می‌دهد. الهام نصیب قلبی است که صادق است و آنچه را می‌داند از آنچه نمی‌داند به‌درستی تشخیص می‌دهد.

سطح ۰ـ استراتژی حمله به مسئله به قلب دانش‌آموز الهام می‌شود.

سطح ۱ـ نظام مفهومی مفاهیم مربوط به مسئله به قلب دانش‌آموز الهام می‌شود.

سطح ۲ـ مفاهیم تعمیم یافته به قلب دانش‌آموز الهام می‌شوند.

سطح ۳ـ سیستم ریاضی مناسب برای حل مسئله به قلب دانش‌آموز الهام می‌شود.

سطح ۴ـ حل مسئله و تعمیم آن به قلب دانش‌آموز الهام می‌شود.

نور چهارم: زکات

زکات نوری است که علم عالِم را تزکیه می‌کند. نور زکات نصیب عالمی است که زکوه علم خود را می‌پردازد و آنچه آموخته به دیگران می‌آموزد.

سطح ۰ـ دانش‌آموز از افکار باطل برای حل مسئله تزکیه می‌شود.

سطح ۱ـ دانش‌آموز از عقاید باطل در مورد چگونگی حل مسئله تزکیه می‌شود.

سطح ۲ـ دانش‌آموز از اوهام و تخیلاتی که هنگام حل مسئله به او القا می‌شوند تزکیه می‌شود.

سطح ۳ـ دانش‌آموز از ساختارهای ریاضی که به مسئله کمک نمی‌کنند تزکیه می‌شود.

سطح ۴ـ دانش‌آموز حقیقت را از غیر آن تشخیص می‌دهد و از غیر آن تزکیه می‌شود.

نور پنجم: اطمینان

اطمینان نوری است که علم عالِم را استوار می‌کند. نور اطمینان نصیب عالمی است که با یاد خداوند مسئله را تحلیل و بررسی می‌کند.

سطح ۰ـ دانش‌آموز در اجرای استراتژی مناسب برای حمله به مسئله از خداوند کمک می‌خواهد.

سطح ۱ـ دانش‌آموز در تسلط بر نظام مفاهیم مربوط به مسئله از خداوند کمک می‌خواهد.

سطح ۲ـ دانش‌آموز در کار با مفاهیم تعمیم یافته از خدا کمک می‌خواهد.

سطح ۳ـ دانش‌آموز در استفاده از سیستم ریاضی مناسب برای حل مسئله از خدا کمک می‌خواهد.

سطح ۴ـ دانش‌آموز در حل مسئله و تعمیم آن از خداوند کمک می‌خواهد.

نور ششم: رضا

رضا نوری است قسمت عالِم از علم را برای او تعیین می‌کند. نور رضا نصیب عالمی است که برای خدا کار می‌کند و علم‌اندوزی و اکتشاف علمی و تحقیقات او به‌خاطر خداست.

سطح ۰ـ دانش‌آموز به‌خاطر دسترسی به حقیقت علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۱ـ دانش‌آموز به‌خاطر تزکیه نفس خود علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۲ـ دانش‌آموز برای تحکیم ایمان خود علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۳ـ دانش‌آموز برای خدمت به خلق خداوند علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۴ـ دانش‌آموز برای خشنودی خداوند علم‌اندوزی می‌کند.

نور هفتم: قرب

قرب نوری است که عالِم را با علم خود متحد می‌کند. نور قرب نصیب عالمی است که در راه علم اخلاص دارد و علم‌اندوزی و اکتشاف علمی و تحقیقات او خالص برای خداست.

سطح ۰ـ دانش‌آموز برای شهود حقیقت، علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۱ـ دانش‌آموز برای در دسترس قرار دادن حقیقت بر مردمان علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۲ـ دانش‌آموز برای متحد شدن با حقیقت علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۳ـ دانش‌آموز برای ظهور حقیقت بر مردمان علم‌اندوزی می‌کند.

سطح ۴ــ دانش‌آموز به خداوند در علم‌اندوزی خود تفویض امر نموده است.

مرحله سوم: مکاشفات و مشاهدات

کشف صوری: مکاشفات صوری ممکن است در خواب یا بیداری اتفاق بیافتد. کشف صوری انواع مختلفی دارد.

کشف بصری: دانش‌آموز موفق به شهود تصویری علم می‌شود.

کشف فرمولی ــ کلامی: دانش‌آموز موفق به شهود و تشخیص فرمول یا قانونی کلی می‌شود.

کشف نفسی: دانش‌آموز موفق به ساخت ابزاری که کاربرد عملی دارد می‌شود.

کشف معنوی: مکاشفاتی که حقیقت و باطن ریاضیات را نشان می‌دهند، مراتب مختلفی دارند. ظهور هر یک از انوار علم در قلب شهود باطنی از بواطن علم را در پی دارد. بنابراین مراتب کشف معنوی همان مراتب انوار علم است که در قلب ظاهر می‌شوند.

دانش‌آموز به نور حدس استراتژی حمله به مسئله را تشخیص می‌دهد و به نور وجدان ساختار ریاضی مسئله را می‌شناسد و به نور الهام آن را حل می‌کند و تعمیم می‌دهد و به نور زکات حقیقت آن را می‌یابد و به نور اطمینان برای رسیدن به حقیقت آن از خدا کمک می‌خواهد و به نور رضا به حقیقت نزدیک می‌شود و به نور قرب حقیقت را می‌بیند و بعد با آن متحد می‌شود. خوشا حال عالمی که اینها اوصاف او باشند.

منابع و مآخذ

۱ــ آیت‌اللهی، حبیب‌اله / مبانی نظری هنرهای تجسمی، تهران، ۱۳۷۶، انتشارات سمت.

۲ــ ویلسون، اوا / طرحهای اسلامی، مترجم : محمدرضا ریاضی، تهران، ۱۳۷۷، انتشارات سمت.

۳ــ کیانی، محمد یوسف / تاریخ هنر معماری ایران در دوره اسلامی، تهران، ۱۳۷۴، انتشارات سمت.

۴ــ حلیمی، محمدحسین / اصول و مبانی هنرهای تجسمی، تهران، ۱۳۷۲، افست، جلد اول

۵ــ احمدی، بابک / حقیقت و زیبایی، تهران، ۱۳۷۵، چاپ سوم، نشر مرکز.

۶ ــ لوخر، بروس، کاکستر / سرگذشت و آثار اشر (مجموعه مقالات) مترجم : بابک احمدی، تهران، ۱۳۶۳، ناشر : کارگاه هنر.

۷ــ خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان / بنیاد دانشنامه بزرگ فارسی، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

۸ ــ راس، دیوید / ارسطو، مترجم : مهدی قوام صفری، تهران، ۱۳۷۷، ناشر : فکر روز

۹ــ کارناپ و دیگران / فلسفه ریاضی (مجموعه مقالات) مترجم : حسین ضیایی و دیگران، تهران، مرکز ایرانی مطالعه فرهنگها.

۱۰ــ فروغی، محمدعلی / سیر حکمت در اروپا، تهران، ۱۳۷۵، نشر البرز.

۱۱ــ جمهوری افلاطون / ترجمه : کاویانی، رضا و لطفی، محمدحسن، تهران، ۱۳۵۳، چاپ : چاپخانه خوشه

۱۲ــ کلاین، موریس. بنیادهای ریاضیات، مترجم : کرمی، رضا / فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره؟

۱۳ــ مصلحیان، محمدصال / بحثی در مورد زیبایی در ریاضیات، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۱۶

۱۴ــ سابو، آرپاد / تاریخ ریاضیات دوره باستان را چگونه باید بررسی کرد؟ مترجم : اعتماد شاپور / نشر ریاضی سال ۱، شماره ۱، ۱۳۶۷

۱۵ــ شوئنفلد، آلن / آموزش هنر مسئله حل کردن، مترجم، جلودار ممقانی، محمد / نشر ریاضی، سال ۱، شماره ۱، ۱۳۶۷.

۱۶ــ محبوب‌فر، احمد / نقشه‌کشی کاربردی، انتشارات ارکان ۱۳۷۸

۱۷ــ شوئنفلد، آلن / پولیا، حل مسئله و آموزش، مترجم : ذاکری ــ سعید، نشر ریاضی، سال ۲، شماره ۲، ۱۳۶۸.

۱۸ــ وینر، نوربرت / ماهیت تفکر ریاضی، مترجم : اعتماد ــ شاپور، نشر ریاضی، سال ۱، شماره ۳، ۱۳۶۷.

۱۹ــ برنت، بروس / رامانوجان، مترجم : ضیایی، کورس و باقری، محمد/ نشر ریاضی، سال ۳، شماره ۳، ۱۳۶۹.

۲۰ــ هرش، موریس / واقع‌گرایی در ریاضیات، مترجم : اعتماد، شاپور/ نشر ریاضی، سال ۷، شماره ۲، ۱۳۷۵.

۲۱ــ پرلمان، ی. / سرگرمیهای جبر، مترجم : محمد یاسین / انتشارات میر

۲۲ــ باقری، محد / رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسائل هندسی / انتشارات فاطمی.

۲۳ــ پهلوانی، فرانک و تابش، یحیی / درس افزار حسابان / دانشگاه صنعتی شریف.

۲۴ــ دیویس، فیلیپ و هرش، اوبن / تجربهٔ ریاضی، مترجم کرمی، رضا/ نشر ریاضی، سال ۴، شماره ۱ و ۲، ۱۳۷۰.

۲۵ــ بیژن‌زاده، محمدحسن / آشنایی با فلسفه ریاضی، تهران، ۱۳۷۳،

ناشر : پیام نور.

۲۶ـ رینی، آلفرد / گفت و شنودهایی در ریاضیات، مترجم : قهرمانی، سعید، تهران، ۱۳۷۳، ناشر : خوارزمی

۲۷ـ پولیا، جورج / چگونه مسئله را حل کنیم؟ مترجم : م، احمد، تهران، ۱۳۶۹، انتشارات کیهان.

۲۸ـ پولیا، جورج / خلاقیت ریاضی، مترجم : شهریاری، پرویز، تهران، ۱۳۷۳، انتشارات فاطمی.

۲۹ـ سجزی، عبدالجلیل / رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسائل هندسی، مترجم : باقری، محمد، تهران، ۱۳۷۵، انتشارات فاطمی.

۳۰ـ ایوز / آشنایی با تاریخ ریاضی.

۳۱ـ برگرن / گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی، مترجم : وحیدی اصل، محمدقاسم، تهران، ۱۳۷۰، انتشارات فاطمی.

۳۲ـ وان در واردن ـ ب. ل. / تاریخ جبر از خوارزمی تا امی نوتر، مترجم : وحیدی اصل، محمدقاسم و جمالی، علیرضا، تهران، ۱۳۷۶، انتشارات مبتکران.

۳۳ـ ویگوتسکی ـ لو / اندیشه و زبان، مترجم : قاسم‌زاده ـ حبیب‌اله / تهران، ۱۳۷۱، چاپ دوم، انتشارات فرهنگان.

۳۴ـ مایرز ـ چت / آموزش تفکر انتقادی، مترجم : ابیلی، خدایار، تهران ۱۳۷۴، انتشارات سمت.

۳۵ـ تفکرانتقادی / استدلال ریاضی. اثبات، مترجم : حاجی بابائی، جواد / دفتر برنامه‌ریزی و تألیف ـ گروه ریاضی.

۳۶ـ جویس ـ بروس، ویل ـ مارشا و شاورز ـ بورلی / الگوهای تدریس، مترجم : بهرنگی ـ محمدرضا، تهران، ۱۳۷۱، انتشارات علامه طباطبایی.

۳۷ـ لانگ ـ رابرت ل. نکاتی پیرامون تاریخ و فلسفه ریاضیات، مترجم : باقری ـ محمد، جنگ ریاضی، دانشکده علوم دانشگاه تهران، ۱۳۶۹، جلد ششم.

۳۸ـ شکرشکن ـ حسین و همکاران، مکتبهای روان‌شناسی و نقد آن، دفتر همکاری حوزه دانشگاه، جلد ۱ و ۲، تهران ۱۳۷۲، انتشارات سمت.

۳۹_ Ministry of Education, Mathematics in the New Zealand Curriculum, Learning Mesia, 1998.

۴۰_ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Principles and Standards for Scool Mathematics: Discussion Draft, 1998.

۴۱_ Geoffrey Howson, National Curricula in Mathematics, Mathematical Association, 1991.

۴۲_ Wagner S. Parker SH. Advancing Algebra, Research Ideas for the Classroom High School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project, Macmillan P.C (1993)

۴۳_ Kodaira K. Mathematics 1, American Mathematical Society the University of Chicago School Mathematics Project, 1993.

۴۴_ The National Curriculum, London. HMSO, Department for Education, Printed in the United Kingdom for HMSO, England. 1995.

۴۵_ A Framework for Constructing a Vision of Algebra: a Discussion Document, 1997, NCTM

۴۶_ A.H. Shoen feld, Problem Solving in the Mathexmatics curriculum: A Report, Recommendation, and an Annotated Bibliography 1983 MAA.