بسم اللّه الرّحمن الرّحیم

از المپیادی های ریاضی دان، تا ریاضی دان های المپیادی

نگارنده: آرش رستگار

فهرست

۱. مقدمه

در این مقاله قصد داریم توانایی های حل مسئله ی یک ریاضی دان را در برابر مهارت های فرضیه سازی و نظریه‌پردازی او مورد بررسی قرار دهیم. از آنجا که موضوع مورد مطالعه در چارچوب مهارت های انسانی است، برای روشن تر شدن چالش ها و پستی بلندی های آن، مسئله را در خواستگاه طبیعی آن یعنی انسان مورد موشکافی قرار می دهیم. به نظر نگارنده، تقابل توانایی های حل مسئله و مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی در دو گروه از ریاضی دانان برجسته تر است.

گروه اول دانش آموزان با استعدادی هستند که از سنین نوجوانی، پختگی در مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی را به نمایش می گذارند. طبعاً این دانش آموزان که زیر گروهی بسیار کوچک از گروه المپیادی ها را تشکیل می دهند، همانند همه ی دوستان خود توانایی های درخشانی در حل مسائل دارند. این گروه را المپیادی های ریاضی دان نامیده‌ایم. و علاقه مندیم در اینجا به روانشناسی ریاضی این دانش آموزان نیز بپردازیم.

گروه دوم، از ریاضی دانانِ جا افتاده ای تشکیل شده است که با وجود کسب مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی، بیشتر بر توانایی های حل مسئله تأکیده می کنند. به این معنی که حل مسئله برایشان بیش از ابزاری برای کشف فرضیات مناسب یا توسعه ی نظریات از پیش تدوین شده، اهمیت دارد. این گروه از ریاضی دانان، که دسته ی بزرگی از ریاضی دانان حرفه ای را تشکیل می دهند، ریاضی دان های المپیادی نامیده ایم و علاقه مندیم دلایل اتکای ایشان بر توانایی های حل مسئله را مورد موشکافی قرار دهیم.

۲. توانایی های حل مسئله

بگذارید با الگوی حل مسئله ی پولیا شروع کنیم تا منظور واضح تر بیان شود.

گام اول، فهمیدن مسئله است. از خود می پرسید:

مسئله درباره ی چیست؟ اطلاعات داده شده کدامند؟ شرایط مسئله کدامند؟ آیا شرایط تحقق پذیرند؟ آیا با کمبوداطلاعات لازم، مواجه هستیم؟

گام دوم، طرح نقشه ای برای حل مسئله است. از خود می پرسید:

آیا مشابه این مسئله را قبلاً دیده ام؟ آیا قضیه یا مسئله ای که می تواند برای این مسئله سودمند باشد، می شناسم؟ آیا می توان قسمتی از مسئله را حل کرد؟ کدامیک از استراتژی ها برای حل مسئله سودمند تر است؟ آیا همه ی مفاهیم اصلی مسئله را بکار برده ام؟ آیا مجهول و یا داده ی تازه ای بدست آورده ام؟

گام سوم، اجرای نقشه ی طراحی شده است. از خود می پرسید:

آیا استراتژی انتخاب شده را درست پیاده کرده ام؟ آیا باید به سراغ استراتژی دیگری بروم؟ آیا داده ها و شرط‌های‌مسئله را درست بکار برده‌ام؟ آیا ارتباط منطقی بین گام هایی که برداشته ام، مشاهده می شود؟

گام چهارم، بازنگری است. از خود می پرسید:

آیا جواب بدست آمده، معقول است؟ آیا می توان نتیجه را از راه دیگری بدست آورد؟ نتیجه را چگونه می توان وارسی‌کرد؟ آیا این نتیجه یا روش را می‌توان در مسئله ی دیگری پیاده ساخت؟

حال پس از یاد آوری الگوی حل مسئله ی پولیا، از شما می پرسم که این سوال ها، چقدر برای شما آشناست؟ آیا شما مسائل را اینگونه حل می کنید؟

اگر پاسخ شما مثبت باشد، شما در هیچیک از دو گروه المپیادی های ریاضی دان و ریاضی دان های المپیادی، قرارنمی‌گیرید. اما در مورد اینکه روشِ‌پولیا، الگویی برای حل مسئله است، با هم توافق داریم.

در مورد اینکه المپیادی ها در مورد توانایی حل مسئله چگونه فکر می کنند، پس از این خواهیم گفت.

۳. <u>مهارت فرضیه سازی و نظریه پردازی</u>

این بار هم می توانیم با چند سوال کلیدی، شخصیت ریاضی دانان حرفه ای را در رابطه با فرضیه سازی و نظریه پردازی به نمایش بگذاریم. در این باره از خود می پرسید:

چگونه می توان فرضیاتی فرمولبندی کرد که قضایای مشابه را به هم پیوند دهد؟ آیا فرضیات با مثال های مهم هماهنگی دارد؟ چگونه فرضیات و نظریه ها را بیازماییم؟ آیا می توان فرضیت تایید شده را به حوزه های گسترده تری، توسعه داد؟ آیا بین فرضیات، ارتباطی وجود دارد؟ چگونه تئوری ها را بر اساس مثال‌های مهم اصلاح و ترمیم می کنیم؟ برای تکنیک های محاسباتی، چه فرضیاتی کفایت می کنند؟ مهم تر از همه آنکه، ضعف و قوت نظریه ها را در برآورده‌کردن اهداف تحقیقاتی مقایسه کنیم.

اگر با این سوالات بسیار دست و پنجه نرم می کنید، از ریاضی دانان جا افتاده ای هستید که زندگی ایشان گویای مهارت های ایشان در فرضیه سازی و نظریه پردازی است. اینان بیش از آنکه به ارضای لذت شخصی در اکتشافات هیجان‌انگیز حل مسئله بپردازند، دغدغه ی تاثیر گذاری بر جهت گیری علم‌ریاضیات، برقراری توازن قوا بین جنبه های

کاربردی و محض در تحقیقات ریاضی، برقراری ارتباط بین فرهنگ و تحقیقات ریاضی؛ و همینطور بین فلسفه و آموزش‌ریاضی ودغدغه ی شناختِ شخصیت های انسانی، و مانند آن را دارند که آن ها، می توانند زندگی یک ریاضی دان را تجسد بخشند یا آن را بر دوش کشند. چنین ریاضی دانی، از تاثیر پیوسته فعالیت ریاضی بر پرورش توانایی های ذهنی خود آگاه است. از ریاضیات بعنوان ابزاری برای نشر فرهنگِ جست و جوگری علمی و ایجاد روحیه ی تحقیق استفاده می کنند. دانش ریاضی ایشان، با علوم طبیعی و انسانی، تعامل دارد. از ریاضیات برای مدلسازی، شناخت، ارزیابی و طراحی سیستم ها استفاده می کنند. خلاصه آنکه ایشان بر هنر و تکنولوژی ریاضیات محیط هستند، نه اینکه مقهور زیبایی آن شده باشند.

۴. المپیادی های ریاضی دان

پیش از هر چیز باید توضیح بدهیم که المپیادی ها در مورد حل مسئله چطور فکر می کنند. سپس به این خواهیم‌پرداخت که المپیادی های ریاضی دان چه کسانی هستند.

برای آنکه متهم به از خودپردازی نشویم، چند سال پیش جلسه ای تشکیل دادیم تا ۴۰ نفر از دانش جویان المپیادی که دست اندر کار هدایت تیم ملی المپیاد ریاضی هستند، دور هم جمع شوند و نصیحت هایی برای افرادی که علاقه مند هستند مسئله حل کن های ماهری باشند، ارائه دهند. اگر به این نصیحت ها توجه کنید، خواهید دید که روح کلی محیط بر این دیدگاه ها با نظرات پولیا فرق های اساس دارند. المپیادی ها به آن دسته از افراد، توصیه می کنند که :

تمیز و مرتب بنویسید، خلاصه ی استدلال های خود را یادداشت کنید، ساختار منطقی مسئله را بشناسید، شکل های بزرگ و تمیز بکشید، روند تفکر خود را یادداشت کنید، توضیحات اضافی را از یادداشت خود حذف کنید، نتایج فرعی بدست آمده را یادداشت کنید، اثبات کامل را پس از پایان استدلال ها روی کاغذ بیاورید، آن را لم بندی کنید، هنگام نوشتن به ذهن خواننده هم توجه داشته باشید، تصمیم بگیرید که از کجای مسئله شروع کنید، از کدام استراتژی استفاده کنید، از کدام فرمول بندی ریاضی برای حل مسئله کمک بگیرید، چه نمادهایی بکار ببرید، از چه نماد هایی پرهیز کنید، در مورد چه چیزهایی فکر نکنید، چگونگی روند نزدیک شدن به حل مسئله را کنترل کنید، هنگام حل مسئله با خودتان حرف بزنید، همه ی حالات را در نظر بگیرید اما بر بررسی حالات خاص و مهم تأکید کنید.

به نظر المپیادی ها، یک مسئله حل کن خوب باید صبور باشد و تفکر واگرا داشته باشد (divergent thinking) . حدس های خود را به خوبی مورد استفاده قرار دهد. در چند فرمول بندی معادل فکر کند. در کار با مفاهیم و ایده های ریاضی، مهارت نشان دهد و همواره به دنبال مدل های ساده‌تر برای تفکر باشد.

به نظر آن ها: تخیلات هندسی، بدست آوردنِ تشخیص ساده از مسئله، پرسش های ذهنی، تخمین پیشرفت در روند حل مسئله، بدست آوردنِ سریعِ گزاره‌های بدیهی، فرمول بندی حدس های مناسب، خلاقانه و جهت دار عمل کردن در

ساختار های ریاضی، درک ایده های ریاضی مستقل از فرمالیسم‌ها، تخیلی که جلو تر از استدلال ها و محاسبات باشد؛ همه، ابعادی از توانایی های مسئله حل کن های ماهر هستند که شهودِ پیشگام در آن ها نقش موثری دارد.

همانطور که می بینید، این مهارت های پیچیده و عجیب و غریب، همچنین توصیه های باریک و دقیق، به مهارت هایی که باید یک کاشف در سفر های اکتشافی خود داشته باشد، بی شباهت نیست. مهارت هایی که باید داشته باشد تا در سفرهای اکتشافی خود که در آن ها با خطر های پیش بینی نشده روبروست، جان سالم بدر ببرد. فضای حل مسئله برای المپیادی ها، به هیچ وجه با آنچه پولیا، لاکاتوش و سایر متخصصان آموزش ریاضی توصیف می کنند، تشابه ندارد.

با این مقدمه تصدیق خواهید کرد که اگر چنین دانش آموزانی با پیشینه ی کوتاهی که در ریاضی داشته اند، در فرضیه‌سازی و نظریه پردازی پختگی نشان دهند؛ در این صورت، این مهارت ایشان باید بسیار خالص و اصیل و عمیق باشد تا در میان آن همه شلوغی و نا مرتبی در زندگی ریاضی یک المپیادی، خودی نشان بدهد. مهارتی که نیاز به آرامش، تامّل، تعقل و تجربه ی بسیار دارد و از شور و هیجان ریاضیات المپیادی، بسیار دور می باشد. به همین دلیل است که باور داریم المپیادی های ریاضی دان، محل مناسبی برای بررسی مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی، در برابر توانایی های حل مسئله هستند.

۵. ریاضی دان های المپیادی

از وقتی که خود یک نوجوان المپیادی بودیم، اساتید ما همواره ما را بر حذر می داشتند تا مواظب باشیم فرهنگ المپیادی، بر زندگی ما به عنوان یک ریاضی‌دان، تأثیر نگذارد. به گفته ی ایشان، چنین ریاضی دانانی، فقط علاقه مندند به مسائل تحقیقی کوچک، راه حل های ابتکاری، پروژه های تحقیقاتی بدون ارتباط به یکدیگر، و بازی با اصول موضوعه منطقی بپردازند و از ساختار های ریاضی پیچیده نیز، پرهیز کنند. بنابراین، ریاضی دانان عمیقی نخواهند بود. امروز فکر می کنیم، دسته ی بزرگتری در این گروه، یعنی ریاضی دان های المپیادی قرار می گیرند. هر چند بسیاری از این ریاضی‌دان ها هرگز با فرهنگ المپیاد ریاضی بر خورد نداشته اند و در مهارت های حل مسئله به هیچ وجه قابل مقایسه با المپیادی های توانا نیستند، اما ریاضیاتی که تولید می کنند، کاملاً هماهنگ با دیدگاهی است که المپیادی ها نسبت به ریاضی دارند. و این ناشی از موضعی نگری و موقعیت شناسی و غریزه ای است که بین همه ی فرزندان آدم بسیار شایع است. شاید چند سوال منظورمان را بهتر برساند:

شما تا بحال چند مفهوم ریاضی را برای اولین بار معرفی کرده اید؟ چند تا از این مفاهیم، مورد اقبال و توجه سایر ریاضی دان ها قرار گرفته است؟ به تخمین شما تا چند سال دیگر این مفاهیم مورد توجه باقی خواهد ماند؟ چند شاخه ی جدید به علم ریاضیات افزوده اید؟ چه مهارت هایی در خود سراغ دارید که تاکنون در سایر ریاضی دان ها مشاهده نکرده‌اید؟ به تخمین خودتان چقدر مقهور جریان ریاضیات در عصر خود هستید؟

آنچه میان یک ریاضی دان المپیادی و دانش آموز المپیادی مشترک است؛ این است که هردو، مقهور ریاضیاتی هستند که توسط مسائل ریاضی، به پیش گذاشته می شود. این چیزی از ارزش ابتکار و خلاقیت این ریاضی دان ها که در تحقیقات ایشان، آشکار است، نمی کاهد؛ بلکه آن ها را جایگاه مناسبی می‌سازد، تا مهارت های فرضیه سازی و نظریه‌پردازی در برابر توانایی های حل مسئله، بتواند مورد بررسی قرار گیرند.

همانطور که پیش از این مورد تاکید قرار گرفت، فضای فرضیه سازی و نظریه پردازی، با فضای حل مسئله هماهنگی ندارد. علاقه مندیم بدانیم که ریاضی دانان چگونه بین این دو، پیوند برقرار می کند. یا اینکه چگونه این دو فضای متناقض فکری را مدیریت می کنند؟ اینکه، چگونه فرضیه سازی و نظریه پردازی منجر به این می‌شود که حل مسائل خاص اهمیت حیاتی پیدا کند، به طوری که خود ریاضی دان ها ناچار به حل آن مسائل بپردازند و یا اینکه چگونه تلاشی در جهت حل مسائل، ممکن است منجر به لزومِ ورود به فضای فکری فرضیه سازی و نظریه پردازی شود.

در نظر اول، وقتی حل مسئله به بن بست برخورد می کند و یا هنگامی که فرضیه سازی و نظریه پردازی راه گم می‌کند، ریاضی دان ناچار است که فضای فکری خود را عوض کند و از موضعی اندیشی، به سرتاسری نگری و یا بالعکس تغییر دیدگاه دهد.

ریاضی دان هایی را که در مدیریت جابجایی بین این دو فضای فکری مهارت ندارند و به ناچار، در اسارت فضای فکری حل مسئله که از دبیرستان با آن آشنا هستند، قرار می گیرند. ریاضی دان های المپیادی نامیده ایم.

۶. چند مثال از المپیادی های ریاضی دان

اگر بخواهیم از المپیادی هایی که امروز ریاضی دان های قابلی هستند، صحبت کنیم، هنری نکرده ایم. برای همین از دانش آموزان المپیادی اخیرمان خواهیم نوشت. چندسالی است که قسمتی از برنامه ی درسی این دانش آموزان المپیادی را مباحثی در ریاضیات عالی قرار داده ایم. هدف از این درس‌ها، پختگی ذهن ریاضی این دانش آموزان پیش از شرکت در کلاس های فشرده ی مهارت های حل مسئله است. در سال تحصیلی ۸۴-۱۳۸۳، یک درس هندسی که به مقاطع‌مخروطی می پرداخت؛ یک درس نظریه اعداد که به فرم های مربعی و قضیه هسه-مینکوسکی اختصاص داشت؛ یک درس ریاضیات تحدب، که به هندسه ی ترکیبیاتی و آنالیز مربوط به چند وجهی های محدب در $\mathbb{R}^n$ می پرداخت؛ یک درس تر کیبیات که به نظریه ی گراف و نظریه طرح های بلوکی اختصاص داشت؛ و نهایتاً، یک درس هندسه جبری که به الگوریتم های محاسباتی برای حل دستگاه معادلات چند جمله ای و ارتباطآن با نظریه گراف و نظریه منتج می پرداخت، برنامه ی درسی این دانش آموزان را تشکیل می داد. در کنار این دروس پروژه های کوچک تحقیقاتی برای آشناکردن ایشان با فرهنگ تحقیق و جست و جوگری علمی در برنامه ی درسی این دانش آموزان گنجانده شده بود. در این جا، دو نمونه از این پروژه های تحقیقاتی کوچک را مطرح می کنم.(برای بررسی بیشتر آن ها مراجعه شود به ضمیمه های آخر مقاله)

۱) پروژه ی نرم افزار متفکر
۲) پروژه ی ریاضیات مناطق حارّه

محمد باوریان و نیما احمدی پور اناری، دو دانش آموزی که از طریق المپیاد وارد یکی از اردوهای المپیاد ریاضی کشور شدند، جوانترین اعضای تیم سیزده نفره ی آن سال را تشکیل می دادند.

محمد باوریان در پروژه ی نرم افراز متفکر به این نکته توجه کرد که، گزاره های هندسه ی اقلیدسی دارای الگوهای متفاوتی از لحاظ صحت منطقی هستند. برای مثال، بعضی از این الگوها قابل تعمیم به $\mathbb{C}$ هستند و بعضی نیستند. نیما احمدی پور اناری در پروژه اش به این نکته اشاره کرد، که می توان روی نیم‌حلقه‌ی حاره ای، یک نرم گذاشت و با توجه به این نرم جدید، صحت نامساوی های معروف را به آزمایش گذاشت. او موفق شد، نا مساوی کوشی‌شوارتز را با این نرم حاره ای به اثبات برساند. شایان ذکر است که صورت ضعیف تر این ایده ها در پروژه های دیگر اعضای تیم نیز مشاهده‌شده است. در مورد توانایی های درخشان اعضای دیگر تیم، سخنی به میان نمی آورم. زیرا روی این نکته که دو دانش آموز نام برده از کلاس اول دبیرستان وارد اردوی تیم المپیاد ریاضی شده اند، تاکید دارم.

۷. چند نمونه از ریاضی دان های المپیادی

دفاعیه ی Gowers از دسته ی خاصی از متخصصین رشته ی ترکیبیات و پراکندگی ظاهری ریاضیاتی که این دسته به آن اشتغال دارند، که نمونه های آن بیشتر در کشور های بلوک شرق مانند مجارستان یافت می شود، شروع خوبی برای معرفی ریاضی دانان المپیادی است. ریاضیاتی که این ریاضی دانان به آن می پردازند،به مهارت های حل مسئله ی پشت صحنه ، یا به ایده های استدلالی پنهان، وحدت می بخشد.

هرچند، تحقیقات ریاضی دانان بزرگی مانند Sullivan, Deligne, Gromov, Kontsevich به دلیل تنوع شاخه هایی که در آن به تحقیق اشتغال دارند و احاطه ی علمیشان به ریاضیات زمانه ی خود، همان پراکندگی ظاهری را نشان می دهد و تنها، مهارت های ریاضی پشت صحنه ی این ریاضی‌دانان می تواند بین ریاضیاتی که تولید می کنند، وحدت بوجود بیاورد؛ این دسته که هدایت کنندگان اصلی جهت گیری علم ریاضی هستند، به سادگی از ریاضی دانان المپیادی قابل تشخیص هستند.

این ریاضی دانان نظریه پرداز هایی هستند که تصمیم می گیرند راجع به کدام دسته از مسائل بهتر است چگونه فکر کرد. اما ریاضی دانان المپیادی، تصمیم می‌گیرند که با یک روش تفکر، چه مسائلی را می توان حل کرد.

Erdös یک مثال تمام عیار از ریاضی دانان المپیادی است. حجم بسیار زیاد مقالات او، بدون شک او را در ردیف بزرگترین ریاضی دانان معاصر قرار می دهد.اما آن چه مورد نظر ماست این است که چه حجمی از این تحقیقات برای پاسخ این سوال که ریاضیات چیست، مطلبی عرضه می کند؟

جالب این است که Erdös، خود یکی از طرفداران تمام عیار المپیادی های ریاضی دان است.

۸. فرضیه سازی و نظریه پردازی در برابر حل مسئله

به نظر نگارنده، بررسی تاریخ رشد مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی و توانایی های حل مسئله در المپیادی‌های‌ریاضی دان و ریاضی دان های المپیادی، این نکته را تایید می کند که هرچند فرضیات و نظریات، قالبِ در برگیرنده ی مسائل هستند و بدون آن ها، تفکر ریاضی از زبان ریاضی که کمترین سلاح آن است، خلع می شود؛ با این حال ، کسب مهارت های حل مسئله، بر کسب مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی، مقدم هستند.

ریاضی دانی که از کودکی، در حل مسئله(به معنای المپیادی و نه پولیایی)، توفیقی نداشته است، بعید است بتواند در سنین پختگی، رشد قابل توجهی در این مهارت ها نشان دهد. اما کسب مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی از میوه‌های تجربه است و پختگی ریاضی المپیادی های ریاضی دان، کمالی زودرس است.

به ندرت دیده می شود، یک المپیادی، تمام زندگی ریاضی خود را در نوجوانی، به نظریه پردازی معطوف کند.هر چند Galois، یک مثال نقض آشکار است. بنابر این همیشه همواره این امید هست که یک ریاضی دان المپیادی به یک ریاضی دان نظریه پرداز تبدیل شود.

این نظریه، یک دشمن سرسخت دارد و آن تاریخ ریاضیات است. رشد نظریات ریاضی و حل مسئله در بستر تاریخ، رفتاری متفاوت با آنچه نگارنده پیشنهاد می کند، به نمایش می گذارد. اما به نظر بنده، تاریخ رشد مهارت های نظریه پردازی و توانایی های حل مسئله با رشد این مهارت ها در بستر تاریخ‌ریاضیات در ذهن یک ریاضی دان هماهنگی ندارد.

چنین می نماید که مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی در برابر توانایی های حل مسئله رشد موازی و تکمیل‌کننده در بستر تاریخ ریاضی دارد. گاهی رشد توانایی های حل مسئله بر مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی غلبه دارد. و گاهی تکامل در این مهارت ها، توانایی های ریاضی دانان در حل‌مسئله را بالا می برد. در صورتی که این رشد موازی درون ذهن یک ریاضی دان فقط از مرحله ای به بعد آشکار است. شاید موشکافی و ریز بینی تاریخی نشان دهد که در تاریخ، ریاضیات نیز از مرحله ای به بعد این رشد موازی شکل گرفته است و شاید هم دقت بیشتر در روز رشد تفکر ریاضی در انسان نشان‌دهد که بر خلاف تصور ما، رشد موازی مهارت های فرضیه سازی و نظریه پردازی در برابر توانایی‌های حل مسئله از همان دوران کودکی قابل‌مشاهده است. تحقیقاتی در زمینه ی آموزش ریاضی انجام شده که تایید می کند که دانش آموزان در سنین دبستان بسیاری از توانایی های مجرد ریاضی، مانند خلاقیت در ارائه ی استدلال ریاضی و ارائه ی تعاریف مجرد ریاضی از مفاهیم ملموس را دارا می باشند و یا لااقل می توانند چنین مهارت هایی را کسب کنند.

ضمیمه ی شماره یک

پروژه ی نرم افزار متفکر

می خواهیم، الگوریتمی بسازیم که به کمک آن بتوان صحت گزاره های هندسه اقلیدسی را به آزمایش گذاشت. چنین الگوریتمی مورد توجه کسانی است که علاقه دارند برنامه ای طراحی کنند که بتواند روابط حدس زده شده، بین اشیاء و مفاهیم هندسی را ابطال یا رد کند. در این صورت قادر خواهیم بود، ماشینی بسازیم که بتواند استدلال کند.

مرحله ی اول. فرضیات و نتیجه گیری های یک گزاره را به زبان چند جمله ای ها ترجمه می کنیم. ایده آل تولید شده توسط چند جمله ای های فرضیات را در نظر بگیرید. صحت نتیجه گیری ها را بر حسب این ایده آل چگونه بیان می کنید؟

مثلاً اگر $g = 0$ یک حکم باشد و $h_n, \dots, h_3, h_2, h_1,$ چند جمله ای هایی باشند که صفر شدن آن ها، بیانگر برقراری فرضیات باشند، آیا $g \in < h_n, \dots, h_3, h_2, h_1 >$ معادل است با اینکه حکم g از فرضیات $h_n, \dots, h_3, h_2, h_1$ ، به طور منطقی نتیجه می شود؟ $g \in \sqrt{< h_n, \dots, h_3, h_2, h_1 >}$ ، چه تعبیری دارد؟ اگر واریته $V(h_n, \dots, h_3, h_2, h_1)$ تحویل پذیر باشد، چطور؟ توجه کنید که ممکن است بعضی مولفه های همبندی این واریته به حالت های حدی، تکینه یا تباهیده مربوط باشد.

مرحله ی دو. بعضی از متغیر های مکان مستقلاً تعیین می شوند. این متغیر ها باید روی مولفه ی همبندی واریته ی $V(h_n, \dots, h_3, h_2, h_1)$ که مورد نظر حکم گزاره هستند، مستقل جبری باشند. این نکته را به زبان ایدآل ها، ترجمه کنید. این نکنه به سوالات مرحله ی گذشته چه ربطی دارد؟ نتیجه گرفتن حکم g از چند جمله ای های $h_n, \dots, h_3, h_2, h_1$ با محاسبه ی پایه ی گروبنر چگونه مربوط می شود؟

مرحله ی سوم. با توجه به اینکه $< h_n, \dots, h_3, h_2, h_1 >$ در حلقه ی چند جمله ای ها با ضرائب حقیقی زندگی می کند، همبندی $V(h_n, \dots, h_3, h_2, h_1)$ ، به عنوان یک زیر مجموعه ی فضای آفین $\mathbb{R}^n$ ، منطبق نیست. بنابراین، لزوماً نمی توان حالات صدق یک گزاره را به طور پیوسته به یکدیگر تبدیل کرد. مشابه این حالت در ساختمان رباط های سطح یا سه بعدی نیز مطرح می شود. زیرا ممکن است، فضای فاز رباط، که یک واریته‌ی حقیقی است، همبند نباشد و نتوان رباط را از یک حالت چنان حرکت داد که تا به حالتی که در مولفه ی همبندی دیگری از فضای فاز واقع شده، تبدیل شود. ایا می توانید، همبندی یک واریته حقیقی را به عنوان زیر مجموعه ای از فضای آفین $\mathbb{R}^n$ به زبان ایدآل ها ترجمه کنید.

ضمیمه ی شماره دو

پروژه ی ریاضیات مناطق حاره

نیم حلقه ی حاره ای: $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ را در نظر بگیرید که در آن

$x \odot y := x + y$ و $x \oplus y := \min(x, y)$

الف) نشان دهید چند وج ▪ ▪ ▪هی های محدب (کراندار یا بی کران) در $\mathbb{R}^n$ را می توان به یک نیم حلقه تبدیل کرد که در آن$\odot$ ، جمع مینکوسکی و $\oplus$ پوش‌محدب اجتماع دو مجموعه است. نشان دهید این نیم حلقه، زیر نیم حلقه ی ایزومورف با نیم حلقه ی حاره ای دارد.

ب) فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ نمایانگر متغیرهایی باشند که در نیم حلقه های حاری تغییر می کنند. یک تک جمله ای حاره ای، به‌شکل $x^{a_1} \odot \ldots \odot x^{a_n}$ که در آن $a_i \in \mathbb{N}$ نمایاچگونه تابعی است؟

یک چند جمله ای حاره ای چند متغیره، چه تابعی را توصیف می کند؟

نشان دهید هر چند جمله ای حاره ای، تابعی پیوسته، قطعه قطعه خطی، با متناهی قطعه و مقعر است.

نشان دهید، هر چند جمله ای یک متغیره ی حاره ای، به طور یگانه ای به حاصلضرب های چند جمله ای های درجه یک تجزیه می شود. (قضیه ی گاوس حاره ای)

ج)فرض کنید $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، یک چند جمله ای حاره ای n متغیره باشد. ابر صفحه ی حاره ای $H(P)$ را چنین تعریف می کنیم: $H(P): \{x \in \mathbb{R}^n | P \textit{ is not linear in } x\}$ ، برای مثال در حالت n=۱ ، نقاط شکستگی نمودار ریشه های چند جمله ای نامیده می‌شوند. در حالتn=۲ ابر صفحه ی حاره ای را یک خم جبری حاره ای می نامیم.

نشان دهید که ابر صفحه ی حاره ای یک گراف متناهی است که یال های کراندار و بی کران دارد به طوری که شیب هر یال گویاست. نشان دهید مجموع بردارهایی که از یک راس(پس از انتقال بر مبدا) در جهت یال ها اخراج می شوند و در اولین نقطه صحیح المختٌ ▪صات روی انتقال یافته ی آن یال‌ها خاتمه می یابند، بردار صفر است. نشان دهید در حالت عمومی دو خط حاره ای در یک نقطه ، دو خم درجه دوی حاره ای در چهار نقطه، یک خط‌حاره ای و یک خم درجه دوی حاره ای در دو نقطه و ... ، یکدیگر را قطع می کنند. (قضیه ی بزوی حاره ای)

د) سعی کنید فرمالیسمی برای حل دستگاه معادلات خطی حاره ای، ارائه نمایید.