بسم الله الرحمن الرحیم

اندیشه‌ی ریاضی در بستر تاریخ تمدن

نگارنده: آرش رستگار

تقدیم به گروه ریاضی

دفتر تألیف و برنامه ریزی کتب درسی

سازمان پژوهش و برنامه ریزی وزارت آموزش و پرورش

فهرست

فصل ۱- ریشه‌های پیدایش تفکر ریاضی در تمدن بشری..... ۳

فصل ۲- مبانی فلسفی ریاضیات یونانی..... ۱۸

فصل ۳- انسان‌شناسی اسلامی وریاضیات اسلامی..... ۳۳

فصل ۴- شکل گیری مبانی ریاضیات مدرن در عصر دکارت(قرن هفدهم)..... ۴۴

فصل ۵- دیدگاه‌های فلسفی مستقر در ریاضیات عصر نیوتن..... ۵۵

فصل ۶- دید گاه‌های فلسفی مستقر در ریاضیات عصر لایبنیتز..... ۶۷

فصل ۷- شکل گیری مبانی آنالیز در ریاضیات قرن نوزدهم..... ۸۲

فصل ۸- شکل گیری مبانی هندسه در ریاضیات قرن نوزدهم..... ۹۶

فصل ۹- شکل گیری مبانی جبر و نظریه اعداد در ریاضیات قرن نوزدهم..... ۱۱۱

فصل ۱۰– شکوفایی ریاضیات در قرن بیستم..... ۱۲۵

فصل ۱۱- ریاضیات سال‌های جنگ جهانی..... ۱۳۹

فصل ۱۲- ریاضیات بحران‌های شناختی پس از جنگ جهانی..... ۱۵۳

فصل ۱۳- ریاضیات عصر اطلاعات..... ۱۶۷

فصل ۱۴- گرایش‌های فلسفی رایج در ریاضیات آستانه قرن ۲۱..... ۱۸۲

فصل ۱۵- نگاهی به آینده ریاضیات..... ۱۹۱

فصل ۱۶- فهرست مفصل عناوین..... ۱۹۸

ریشه‌های پیدایش تفکر ریاضی در تمدن بشری

بعضی وقایع تاریخی مهم تا پیش از تمدن یونان در زمینه‌ی فرهنگ و تکنولوژی بدین قرارند: ظهور اولین کوزه‌ها و پارچه‌های پشمی(۶۰۰۰ BC) ، اختراع چرخ و داس در بین‌النهرین و قایقرانی در مصر(۳۵۰۰ BC) ، خط تصویری در سومر(۳۱۰۰ BC) ، هرم خئوپس(۲۵۹۰ BC) ، اهلی کردن اسب در آسیای مرکزی(۲۵۰۰ BC) ، ظهور آیین برهما(۱۴۵۰ BC) ،یکتا پرستی خورشید در عصر اختاتون در مصر باستان(۱۳۷۰BC) ، ظهور آیین یهودیت(۱۲۰۰ BC) ، خط الفبایی(۱۱۰۰BC) ، هر یک از این ابعاد فرهنگی و تکنولوژیکی با رشد و تفکر ریاضی مرتبط هستند. مثلاً ابزارسازی با ساختارسازی و قایق‌رانی با درکی از مفهوم فضا در ارتباطند. چرخ با مفهوم تقارن در ارتباط است و هرم خئوپس از اشکال ساده‌ی هندسی است. خط تصویری آغاز نمادگذاری مفهومی و خط الفبایی شروع نمادگذاری فرمال است. شهرسازی در ارتباط با طراحی و حل مسائل روزمره شهری است. و ظهور ادیان مقدمه‌ای بر پیدایش تفکر فلسفی است.

مراحل شکل گیری تمدن و انتقال از شکار به کشاورزی بدین قرارند: جمع آوری حبوبات(۸۰۰۰BC) ، کشت حبوبات و تربیت گوسفند و گاو(۷۰۰۰ BC) ، کشاورزی(۵۰۰۰BC) ، زندگی شهری(۴۰۰۰BC) ، اهلی کردن اسب و شتر(۳۰۰۰ BC). البته در نواحی مختلف آب وهوایی ممکن است اعداد بالا تا چند هزار سال تغییر کند. در واقع آغاز تمدن زمانی بین ۳۵۰۰BC تا ۱۵۰۰BC بوده است واولین سکه در لیدیه ۶۰۰BC ضرب شده است که آغاز ارتباط ریاضیات و اقتصاد محسوب می‌شود. عوامل تأثیرگذار بر شکل گیری تمدن به چند دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند: عوامل زمین شناختی(یخچال، زلزله) ، عوامل جغرافیایی(حاصل خیزی، باران، رود خانه، آب وهوا) ، عوامل اقتصادی(اقتصاد شکار، کشاورزی، مدنی) و عوامل روانی(اخلاق معاشرت، امنیت معیشتی، رفاه، برخورد وتعامل فکری).

عوامل عمده‌ی تاثیرگذار بر تمدن که با رشد تفکر ریاضی ارتباط دارند وانسانی هستند(نه محیطی!) نیز به نوبه‌ی خود به چند دسته عمده تقسیم می‌گردند. عوامل اقتصادی(فقدان حس پیش بینی در ملل اولیه و آغاز دوراندیشی، بازرگانی و امور مالی، صنایع حمل و نقل، مالکیت، طبقات اجتماعی) ، عوامل سیاسی(دولت به عنوان عامل تنظیم قوا، قانون و عرف، محاکمه، خانواده) ، عوامل اخلاقی(فضیلت، ادب، مهمان نوازی، دین و پرستش، آداب دینی) و عوامل عقلی و روحی(ادبیات، خط، علوم، هنرها).

عمده‌ی خدمات ریاضیات به تمدن‌های باستانی و حمایت و پشتیبانی تمدن بشری از پیدایش و توسعه تفکر ریاضی را می‌توان در چند سرفصل کلی خلاصه نمود:

۱) ابعاد محاسباتی ریاضیات در خدمت اقتصاد و هندسه در خدمت آبادانی.

۲) رشد اخلاقی تمدن‌ها در خدمت تربیت ریاضیدانان و دانشمندان.

۳) اقتدار دولت‌ها در خدمت حفظ منافع دانشمندان تا در خدمت سایر اقشار قرار بگیرند.

۴) ادبیات و خط در خدمت ریاضیات برای گسترش و توسعه سنت‌های ریاضی.

۵) ریاضیات در خدمت علوم و حس زیبایی دوستی و هنر

خلاقیت در تمدن بین‌النهرین

در تمدن ایلام، چرخ کوزه‌گری و چرخ ارابه و در تمدن سومر، تاریخ نویسی، گاوآهن، داس، داد و ستد با زر و سیم و قانون ظهور کردند. تمدن سومر تنها در نیمه قرن نوزده کشف شد. لوحه‌های جداول ضرب و تقسیم، جذر و کعب و مسائلی از هندسه‌ی عملی عمده‌ی اطلاعات ما درباره ریاضیات این اقوام را در بردارند. خط میخی بر روی لوحه‌های گلی نوشته می‌شد. نه با مرکب فاسد شدنی بر روی کاغذی که زود از بین می‌رود. سومریان از راست به چپ و بابلیان از چپ به راست می‌نوشتند. لوحه‌ها شامل افکار پیچیده آن‌ها در بازرگانی، شعر و دین بود. سال‌ها طول کشید تا نوشتن برای ادبیات به کار رود و کتابخانه‌های الواح گلی ساخته شود. خط سومری تصویری یا مفهومی بوده و هنوز الفبایی نشده بود.

تمدن بابل شاهد ترقی علم پزشکی و ظهور لغت نامه بود. قانون حمورابی(۲۰۰۰BC) ریشه در قوانین سومری(۴۰۰۰BC) داشته و مترقی‌تر از قوانین آشور(۱۰۰۰BC) بودند.در تمدن بابل اوهام وخرافات، سحر وجادو، تعبیر خواب، فساد اخلاقی، داستان‌ها یی به زبان جانوران، موسیقی، نقاشی، مجسمه‌سازی، نقش‌برجسته، معماری و باستان‌شناسی رواج داشته است. نزد ایشان خط‌نویسی مانند فینیقیان وسیله تجارت بوده است.اگر نه روح عمیق ابداع هنری، توجه به زیبایی درهنرها از مشخصه‌های تمدن بابل بوده است. هر چند نزد بابلیان عمق هنر سومری به خوبی انتقال نیافته بود.

بابلیان ریاضیات را برای بازرگانی به کار بردند و ریاضیات همراه دین مقدمات ظهور علم نجوم را فراهم کرد. تقسیم دایره به ۳۶۰ درجه و سال به ۳۶۰ روز، دستگاه شمار ۶۰ تایی را به وجود آورد که بعد مبنای دستگاه شمار ۱۲ تایی قرار گرفت. بابلیان جداول ضرب و تقسیم و نصف و ربع و مثلث و مکعب اعداد را به کار می‌بردند. رواج هندسه به حدی بود که مساحت اشکال غیر منظم پیچیده را محاسبه می‌کردند. ۳=π تقریب مناسبی برای ملت منجمی چون بابلیان به نظر نمی‌رسد. نجوم مختص بابلیان بود و منشا آن سحر و جادو بود و وسیله‌ی درآمد کاهنان از پادشاهان و مردم شده بود.

بابلیان در BC ۲۰۰۰ مقارنه طلوع و غروب ستاره‌ی زهره را با طلوع وغروب خورشید کشف کردند: نقشه مدار خورشید و ماه را رسم کردند و به ارتباط آن با خسوف وکسوف توجه کردند؛ خط سیر سیارات را به دست آوردند و به اختلاف ستاره‌ی ثابت و سیار توجه کردند؛ زمان را با ساعت آبی وشاخص آفتابی اندازه گرفتند؛ سال را به ۱۲ ماه تقسیم کردند که برای هماهنگی با فصول ماه سیزدهم را به آن افزودند وشبانه روز را به ۱۲ ساعت ۳۰ دقیقه‌ای

تقسیم کردند. تکیه‌ی علم بابلی بر دین، بر جامد ماندن علم پزشکی بیش از نجوم تأ ثیر داشت. پزشکی کم‌کم از دست کاهنان خارج شد و مزد مداوای هر بیماری را مردم از پیش می‌دانستند. در حال حاضر ۸۰۰ لوحه از پزشکی بابلی در دست است. بابلیان با دین تمدن خود را شکل دادند و در برابر سختی‌ها پایداری کردند، اما بعد که به رفاه رسیدند از دین دور شدند و هم مقاومت خود را از دست دادند و این مایه سرنگونی تمدن آن‌ها گشت.

تفکر فلسفی در تمدن بین‌النهرین به شکل افسانه‌های دینی

فرمان روایان به زودی دریافتند که توجه به دین فواید سیاسی فراوانی برای اداره کشور دارد. کاهنان از طریق قربانی و عوارض و مالیات معابد و رشوه در قضاوت ثروتمند بودند. کاهنان عهده‌دار تعلیم و تربیت نیز بودند و فرمانروایی خویش را باتعلیم داستان‌ها واساطیر تقویت می‌کردند. تا جایی که می‌دانیم در سومر برای نخستین بار، حکومت و امپراطوری، سازمان آبیاری، استفاده از زر وسیم برای ارزیابی کالا، قراردادهای بازرگانی، سازمان اعتبار معاملاتی، کتاب قانون خط نویسی، گفتگو از داستان آفرینش و طوفان، مدرسه و کتابخانه ادبیات و شعر، آرایه‌ها و جواهرآلات، حجاری و نقش برجسته، کاخ‌ها و معابد، استفاده از فلزات در تزیین، طاق‌ها و قوس‌ها و گنبدها، و همچنین بردگی و استبداد و چیرگی کاهنان بر مردم، وام و ربا رواج پیدا کرد. هنوز بر سر قدمت تمدن سومر بر تمدن مصر اختلاف نظر وجود دارد.

در بابل ترقی علم پزشکی پرچم‌دار شکوفایی تمدن بود و علم لغت، قانون نامه، اصول علم حساب، فیزیک و فلسفه پایه‌گذاری شدند. تمدن بابل نتیجه به هم آمیختن تمدن سومریان واکدیان است. این تمدن‌ها در شکار، برزگری، خوراک، صناعت، حمل و نقل، مقابله با خطرهای بازرگانی، رباخواری، برده داری بابلیان را تحت تاثیر قرار دادند. تنها در آغاز قرن نوزدهم خط میخی رمزگشایی شد.

قدرت شاه بابل توسط کاهنان معابد به او تفویض میشد. تعدد خدایان به ۶۵۰۰۰ می‌رسیده(آمار رسمی در قرن نهم قبل از میلاد) ایده تعدد خدایان در برابر یکتا پرستی منجر به بت پرستی گردید. بابلیان تصوری بسیار شبیه امروز از گناه داشتند و آن را بیماری معنوی می‌دانستند. وظایف کاهنان بابل قضاوت، اداره امور مردم، تامین وسایل مالی کشاورزی وصناعت، غیبگویی وکارشناسی،ومشاهده‌ی ستارگان بود. تمدن بابلی ثمر بخشی تمدن مصری، تنوع و عمق تمدن هندی، یا دقت وپختگی تمدن چینی را نداشت. اما یونانیان جهانگرد بیش از همه جا ریاضیات و نجوم و پزشکی و صرف و نحو و فقه‌اللغه و باستانشناسی و تاریخ و فلسفه را از بابلیان آموختند. توسط آشوریان، یونانیان وایرانیان موجب توسعه فرهنگ و تمدن بابلی و گسترش آن شد.

آشوریان مردمی جنگاور واستعمارگر بودند. در بابل تجارت و در میان آشوریان کشاورزی بیشتر مورد توجه بود. طبقات اجتماعی عبارت بودند از اعیان واشراف، صاحبان صنایع، بازرگانان و پیشه‌وران، کارگران و کشاورزان، کشاورزانی که برای ارباب کار می‌کردند و در آخر غلامان واسیران. حکمت آشوری به انواع مهارت‌هایی که به

جنگاوری مربوط می‌شوند مربوط می‌شد وعلم مجالی برای رشد بین آن‌ها نداشت. در هنر، آشوریان به پایه بابلیان نرسیدند. آشوریان مبنای تمدن خود رابر دزدی گذاشتند و این دلیل انقراض تمدن آن‌ها بود. مردمانی که در بین‌النهرین حکومت داشتند مشتمل می‌شوند بر سومریان، اکدیان، بابلیان، هیتیت‌ها، آشوری‌ها، کلدانی‌ها و ایرانی‌ها و آتنی‌ها.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات تمدن بین النهرین

برای درک بهتر نقش ریاضیات در تمدن بین‌النهرین باید به این سوالات مهم پاسخ داد: چه نوع مسایلی مورد توجه بودند؟ چه روش‌های نظام مندی برای حل آن‌ها به کار می‌رفتند؟ دانش مشترک که همه می‌دانستند چه بود؟چرا به ریاضیات می‌پرداختند؟

در تمدن بین‌النهرین سیستم عددنویسی زیر ۶۰ و بالای ۶۰ متفاوت بود. شاید با برخورد تمدن‌ها مبنای ۱۰ و۱۲ مبنای ۶۰ مهم شده باشد. پیچیدگی‌های محاسبه نیاز به تکنیک‌های جدی را پیش می‌آورد که استفاده از جداول را راحت‌تر می‌کرد. از جمله حل معادلات دیوفانتی ساده: جمع وتفاضل دو عدد پیدا شده، آن اعداد را پیدا می‌کند. این معادله محاسبات مربوط به تقریب زدن $\sqrt{2}$ را آسان می‌کرد.

تحویل معادله دیوفانتی به معادله‌ی ساده‌تر که قبلاً حل شده در لوحه‌های گلی دیده می‌شود. مسئله‌ی پیدا کردن اعدادی که جمع وضربشان داده شده از مسائلی بود که مقدمات ظهور جبر را فراهم کرد. جبر اولیه یعنی اگر نتیجه محاسبات را داشته با شیم، چگونه به عقب بر گردیم و اعداد اولیه را پیدا کنیم. مفهوم تاریخ ریاضیات اینجا معلوم می‌شود. چرا که روش‌های حل معادله را از پیشینیان می‌آموختند. وجود لوحه‌های چند زبانه نشان می‌دهد که نویسندگان به خواندن و فهمیدن لوحه‌های قدیمی علاقه داشتند ولذا برای تاریخ اهمیت عملی قائل بودند. اشکالی که در کتیبه‌ها دیده شده آگاهی از قضیه فیثاغورس را پیشنهاد می‌کنند. فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی سطح وحجم به دلایل عملی اهمیت داشتند؛ مثلاً معماری و نجوم.

نجوم مهمترین همکاری هندسه وحساب بود، جداول بسیاری که از رصدها به دست آمده بود سؤالاتی را مطرح می‌کرد که باید به آن‌ها پاسخ داده می‌شد:

۱- بعضی ستارگان دایره‌ی کامل را با سرعت کاملی می‌پیمایند. این دوایر منجر به مفهوم کره‌ی سماوی شدند.

۲- هر روز خورشید مقدار کمی از ستارگان عقب می‌ماند. مدار خورشید به شمال و جنوب می‌رود با تناوب یکساله

۳- مسیر خورشید دایره‌ی بزرگی است که در کره‌ی سماوی ثابت است.

۴- ماه مقدار بیشتری از خورشید عقب می‌ماند و هر ۲۹ یا ۳۰ روز خورشید از ماه می‌گذرد مسیر ماه همان مسیر خورشید است اما بالا وپایین می‌رود. اگر ماه در حالت کامل این مسیر را قطع کند خورشید گرفتگی می‌شود.

۵-ستاره‌های درخشان‌تر از معمول حرکت نامنظمی دارند که تقریباً همان مسیر خورشید و ماه است که طی می‌کنند، اما منظم نمی‌چرخند وگاهی ناگهان برمی گردند یا کج می‌روند. Plant از planon یونانی یعنی سرگردان آمده است. اهمیت نجوم در کشاورزی، مراسم دینی، و اعتقادات خرافی بوده است.

در تمدن بین‌النهرین خط‌نویسی و ادبیات در خدمت لوحه‌های گلی بجا مانده قرار گرفت و نظام اخلاقی و ساختار دولت‌ها در خدمت شکل‌گیری طبقه کاهنان و تشکیل کتابخانه‌ها بود. در چنین تمدنی ریاضیات، سه وظیفه‌ی عمده را به عهده داشت: ریاضیات در خدمت معماری(زیبایی)، ریاضیات در خدمت بازرگانی(احتیاجات روزمره) و ریاضیات در خدمت نجوم(کشاورزی).

خلاقیت در مصر باستان

تمدن باستانی مصر در آغاز قرن نوزدهم توسط همراهان ناپلئون کشف شد که شامل:دوره‌ی فراعنه، دوره‌ی ملوک الطوایفی وامپراطوری مصر می‌شود. ظهور مفرغ، چرخ ارابه، غلطک، اهرم، قرقره‌ی چرخ خراطی، میخ وپیچ، مته، اره، شیشه گری، اباغی، مینا کاری و لعاب دادن، پارچه بافی، کتان، چاپار، راه‌سازی، تقویم، کاغذ، مرکب، ساعت و علم هندسه از مشخصه‌های تمدن مصر می‌باشد. به علاوه خط هجایی وسپس الفبایی در مصر توسط منشیان اختراع شد(۲۵۰۰-۱۵۰۰- BC)

دانشمندان مصری اغلب از کاهنان بودند. محاسبات در ساختن اهرام که نیازمند به اندازه‌گیری دقیق بود، محاسبه‌ی دقیق ارتفاع آب نیل، اندازه‌گیری و پیمایش مرزهای زمین‌ها از جمله فعالیت‌های آن‌ها بود. گفته می‌شود که ابراهیم خلیل علم حساب را از کلده(بین النهرین) به مصر آورده است. پاپیروس احمس قدیمی‌ترین رساله‌ی ریاضی است که تا کنون یافت شده است(۲۷۰۰-۲۰۰۰ BC) و در آن به نوشته‌ها یی با ۵۰۰ سال قدمت اشاره شده. در مصر باستان مساحت مربع، دایره و حجم مکعب، استوانه و کره را با فرمول‌های صحیحی محاسبه می‌کرده اند وبرای عدد π تقریب ۳/۱۶ منظور شده بود. منجمان قرن‌های متوالی حرکت ستارگان را نظاره وثبت می‌کردند. جداول زیج ایشان چند هزار سال را شامل می‌شد.

پاپیروس رند یا احمس که ذکر آن به میان آمد، شامل جداول ضرب و ۸۷ مسئله است که با توجه به کاربرد آن‌ها گروه‌بندی شده‌اند. مثلاً شش مسئله اول مربوط به تقسیم ورقه‌ی نان بین مردم اختصاص دارد. مسائل ۷ تا ۲۳ مربوط به کسرهاست و مسائل ۲۴ تا ۳۸ مربوط به حل معادله است. یعنی پیدا کردن عددی که کسری از آن عدد داده شده است. مسائل ۴۰ تا۶۰ مساحت حجم و اندازه‌گیری است و بقیه مربوط به بازرگانی وتوزیع کالاست.

پاپیروس ریند از تمدن بین‌النهرین اطلاعات قدیمی تری دارد. به پیدایش جبر به عنوان حل معادله که بسیار ساده‌تر از جبر بین‌النهرین است توجه کنید.

تفکر فلسفی در مصر باستان

طرح سازمان اقتصادی، قوانین مدنی و جنایی مترقی، تعلیم و تربیت فرزندان ثروتمندان در معابر، معامله‌گری وسود جویی، تربیت کارمندان اداری، قصه گویی ادبی، طبابت مصری که توسط کاهنان پیدا شد، قوانین اخلاقی طبابت،پزشکان متخصص، داروسازی، هنر معماری و حجاری و مجسمه‌سازی، نقش برجسته، نقاشی، بافندگی هنری، اشیاء زینتی، فلسفه اخلاق همه و همه در تمدن مصر ظهور کرده‌اند. گفته می‌شود که در برابر تمدن مصر تا اختراع موتور بخار بشر حرف جدیدی برای گفتن نداشته است.

تفکر فلسفی در تعالیم پتاح نخست وزیر ۲۳۰۰ سال پیش از کنفوسیوس، سقراط و بودا مطرح بوده است. جز روم و هند هیچ جای دیگر به اندازه‌ی مصر خدایان متعدد نداشته است.خوشید راآفریدگار جهان می‌دانستند. خدایان گیاهی وجانوری وانسانی را می‌پرستیدند. اعتقاد به جفت کوچکتر بدن «کا» داشتند.که تا زمان سالم بودن جسد زنده می‌مانند. دین مصری توجه خاصی به اخلاق نداشته و بیشتر به اذکار و اوراد توجه می‌نمود. اختاتون یکتا پرستی خورشیدی را جایگزین فساد کاهنان کرد. او را پروردگار همه‌ی ملت‌ها می‌شناخت وخود را اولین منادی عدالت اجتماعی، و نخستین مبلغ یکتا پرستی می‌دانست.

بازرگانی فینیقی که از نژاد سامی بودند الفبای مصری را به اقوام جهان معرفی کردند(۱۰۰۰ BC)که جانشین خط میخی شد. هنر اصلی فینیقیان دریا نوردی بود. ایشان قاره آفریقا را دور زدند ودوباره به مصر رسیدند!

قوم یهود بین دو تمدن بین‌النهرین و مصر همواره آسیاب می‌شدند. ملت ابراهیم(ع) از اور واقع در سومر مهاجرت کرد و در ۲۲۰۰ BC یعنی ۱۰۰۰ سال قبل از موسی(ع) در فلسطین مستقر شدند. ایشان از نژاد سامی بودند. الفبای یهودیان بسیار نزدیک الفبای فینیقی است. ایشان قبیله قبیله بودند تا اینکه پادشاهی را برای خود برگزیدندکه همان داود(ع) بود.

در زمان سلیمان(ع)صنعت به شهرها راه یافت. او به ملتش ارزش، فضیلت، قانون و نظم را آموخت ومردم را از جنگ باز داشت. بازرگانان را متقاعد کرد تا به جای مصر، از طریق دریا و اورشلیم با اعراب و آفریقا بازرگانی کنند. از لحاظ اداری مملکت خود را به۱۲ ناحیه تقسیم کرد. از رعایا مالیات سرانه می‌گرفت واز کاروانها گمرک.مخارج بسیاری صرف ساختن مسجد الاقصی نمود که در آن ۱۵۰۰۰۰ کارگر مشغول کار بودند. دین جنگاوری یهود پس از حضرت سلیمان به دینی سوسیالیستی در زمان پیامبران بنی اسرائیل تبدیل شد. ساختار کاهنان در میان این قوم وجود داشت و در تفسیر دینی فقط آراء آن‌ها اعتبار داشت. انبیاء بنی اسرائیل همواره از طبقه مردم فقیر و مخالف با نظام کاهنان وبهره کشی از مردم فقیر بودند. از اقوام باستانی هیچ قومی به اندازه‌ی یهود حریص به کسب فضیلت و

زهد نبود. ده فرمان یهودیان برای ایشان وطنی قابل حمل بود وجای سرزمین آن‌ها را گرفت و مایه وحدت ایشان شد، به طوری که به شکل قومی زوال ناپذیر درآمده‌اند. افسانه‌های تورات مقدمه را برای تاویل فراهم نمود و مفهوم حکمت را پایه ریزی کرد. این اولین جایی است که تمدن به زبان مفاهیم ترجمه شد تا قابل حمل باشد.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات مصر باستان

اطلاعات پاپیروس‌های مصری بسیار محدود است و بیشتر باید از روی تمدن مصر راجع به ریاضیات آنان قضاوت کرد. اعمال حسابی جمع و دو برابر کردن بودند. کسرها همیشه صورت یک داشتند که متناظر بود با تقسیم به تساوی، مصریان تقسیم ده‌دهی را برای شمارش به کار می‌بردند. ضرب را با دو برابر کردن پی‌درپی و جمع اعداد مورد نیاز انجام می‌دادند(از مبنای دو کمک می‌گرفتند). ایشان برای کاربردهای مختلف مبناهای مختلف داشتند. این روش‌های محاسبه به نظر قدیمی‌تر از تمدن بین‌النهرین باشد که در حساب پیشرفته بودند. البته حساب در تمدن بین‌النهرین بر بازرگانی استوار بود.

در هندسه‌ی مصر باستان مسائلی هست مربوط به مثلث، مستطیل دایره و هرم که مجردتر است از مسائل هندسی که به حساب و کاربردهای آن مربوط است. معماران مصری مساحت دایره را مساحت مربعی به ضلع قطر دایره منهای $\frac{1}{9}$ قطر می‌دانستند. به وسیله‌ی اندازه گیری با طناب زوایای قائمه دقیق را به دست می‌آوردند. حدس این است که با کمک طنابی با گروه‌هایی به فواصل ۳-۴-۵ زاویه قائمه را می‌ساختند. محاسبه‌ی حجم استوانه و نواحی خمیده وحجم هرم به روش صحیح(ارتفاع×مساحت قاعده $\frac{1}{3}$) از دستاوردهای ریاضیات مصری است. در صورتی که در بابل میانگین سطوح بالایی وپایینی را به کار می‌برند یعنی:

(ارتفاع×مساحت قاعده $\frac{1}{2}$)

سیستم حساب نه‌تنها در بازرگانی بلکه توسط دولت استفاده می‌شد. همین طور در معماری کاربرد داشت. تقسیمات دستمزد کارگران نیز موردی بوده است که حساب در آن به کار رفته است. محاسبات نجومی برای انتقال چندین نفر به مکانی دورتر از نیل هنگام طغیان آن و بازگرداندن آنان اهمیت داشته است. منجمان مصری برای پیشبینی طغیان رود نیل از ستاره‌ی سیروس کمک می‌گرفته‌اند. مصریان اولین تقویم غیر قمری را که ماه در آن ۳۰ روز بود به کار بردند و توجه کردند که سال ۳۶۵ روزی ستاره سیروس ۴ دقیقه در روز زودتر طلوع می‌کند تا وقتی که طلوع آن دقیقاًبه غروب خورشید می‌رسد. آن گاه تا مدتی به خاطر خورشید طلوع قابل مشاهده نیست؛ اما غروب هنوز مشاهده می‌شود. تا وقتی که غروب درست بعد از غروب خورشید است. آن گاه برای ۲ماه قابل مشاهده نیست. آنگاه درست قبل از طلوع مشاهده می‌شود. در این روزها بود که نیل سیل سالانه‌اش را شروع می‌کرد. از سال ۱۹۵۰ با ساختن سد Aswan بر روی رود نیل دیگر این پدیده اتفاق نمی‌افتد.

خلاقیت در هند باستان

حدود پانصد سال قبل از میلاد مسیح اصناف فلزکار، چوب‌کار، سنگ‌کار، چرم‌کار، عاج‌کار، سبد باف، نقاش منازل، تزیین‌گر، کوزه‌گر، رنگرز، ماهی‌گیر، ملاح، صیاد، دامدار، قصاب، قناد، آرایشگر، دلاک، گل‌فروش و طباخ بین آن‌ها جا افتاده بود. بازرگانی در حد حمل ونقل با ارابه دوچرخی درخشکی رواج داشت. حمل ونقل از طریق رود و دریا پیشرفته بود. در ۸۶۰ BC کشتی‌های بادبانی با صدها پارو محصولاتی مثل عطریات وادویه، پنبه و ابریشم، شال، مروارید و یاقوت، آبنوس و سنگ‌های گران‌بها وپارچه‌های زربافت را به بین‌النهرین و عربستان و مصر می‌بردند. هندیان بسیار راستگو و درستکار بودند. نه به درهایشان قفلی بود و نه برای پیمان تعهدی کتبی می‌سپردند.

در هند باستان دین از پرستش اجسام و جانداران به پرستش نیروها و عناصر طبیعت مانند آسمان، خورشید، زمین، آتش، نور، باد، آب و جنسیت تکامل یافته بود. کتاب‌های مقدس آنان وداهاست که سال‌ها به صورت سینه‌به‌سینه انتقال پیدا کرده بودند. خط در قرن ۸ تا ۹ قبل از میلاد مسیح توسط بازرگانان هندی از فینیقی‌ها گرفته شد. هندی‌ها اولین قوم استخراج کننده‌ی طلا بودند وبخش اعظم طلای ایران از هند می‌آمد. آب دادن آهن وچدن ریزی واستخراج آهن تا ۱۵۰۰BC قدمت داشت. کشت پنبه، بافتن، چوب کاری، عاج کاری، فلز کاری، سفید کاری، رنگرزی، دباغی، صابون پزی، شیشه گری، باروت‌سازی، فشفشه‌سازی، ساروج‌سازی، ذره‌بین‌سازی، صنایع دستی هند را تشکیل می‌دادند. اشیایی از هند در سومر و مصر بدست آمده که تا ۳۰۰۰ BC قدمت دارد.

در واقع، جنگ‌های ایران وروم بیشتر برای بازنگه داشتن راه بازرگانی هند بوده است. در قرن چهارم قبل از میلاد در هند سکه ضرب شد و این تحت تاثیر ایران و یونان باستان بوده است. هنر در هند مشتمل می‌شد بر هنرهای دستی، موسیقی و رقص و ارتباط آن با فلسفه، نقاشی و منیاتور، معماری معابد مثل معابد بودایی وجین مخصوص به خود است. دانشمندان هند هم همان روحانیون آن بودند. علم نجوم از پرستش اجرام سماوی و رصد بستن حرکات آن‌ها به وجود آمده بود.

معادلات درجه‌ی دوم نیز ظاهر شده بودند. نسبت‌های مثلثاتی، عدد π، کسوف وخسوف، کرویت زمین و گردش شبانه‌روزی آن و نیروی جاذبه مورد مطالعه دانشمندان هندی قرار گرفتند. دستگاه محاسبه‌ی سلسله‌ی اعشاری و ارقام هندی که به غلط عربی خوانده می‌شود چنان عمیق است که نبوغ ارشمیدس و اپولونیوس از این دستگاه غافل مانده بود. علوم هندی اولیه بر شالوده‌ی علم یونانی استوار بود. جبر مستقیماً در هند ویونان شکل گرفت. تقریب $\pi \approx ۳/۱۴۱۶$ مورد استفاده‌ی مهندسان هندی قرار گرفت. شکوفایی علوم در هند منجر به پیشرفت ریاضیات و موسیقی و مطرح شدن فرضیه‌ی اتمی و نظریه‌ی کوانتایی نور گردید. علم شیمی از طریق طب و صنعت تکامل یافت. فیزیولوژی هندی در قرن ۶BC پیش رفته بود. لوحه‌هایی در مورد جراحی و ۱۲۱ ابزار جراحی به قدمت ۵۰۰BC در هند یافت شده‌اند. پزشکان هندی اعتقاد به عوامل نامرئی انتقال بیماری داشتند. زبان سانسکریت فلسفی‌ترین زبان دنیاست وتعداد اصطلاحات فلسفی آن از همه‌ی زبان‌ها بیشتر است. در روزگار بودا دانشگاه بنا رس دژ علم

محسوب می‌شد. دانشگاه نالنده پرآوازه‌ترین نهاد تعلیمات بودایی اندکی پس از مرگ بودا تاسیس شد. ده هزار شاگرد، صد اتاق درس، کتابخانه‌های بزرگ وشش خوابگاه عظیم داشت ودر آمد ۱۰۰ روستا وقف آن شده بود.

تفکر فلسفی در هند باستان

تمدن هند نیز در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم کشف شد.از ۴۰۰۰BC آثاری که با تمدن سومری لااقل برابری می‌کرده است پیدا شد. هندیان از نژاد آریایی بودند. از فلسفه‌ی اوپانیشادها۱۰۸ گفتار در دست است. این گفتارها از ۸۰۰-۵۰۰BC جمع آوری شده و خلاصه‌ی تفکرات مردان بسیاری است که فلسفه و دین را با هم آمیختند. مردانی که طالب ثروت نبودند بلکه پاسخ پرسش‌های خود را می‌خواستند. درس اول مقایسه‌ی عقل در برابر شهود واثبات ناتوانی عقل است. ذات ما عمق خاموشی و بی‌نقش هستی درون ماست گام دوم برهمن است. کسی که همه را سرشار می‌کند. او بنیاد همه وذات جهان وباطن باطن‌ها ست. گام سوم اینکه روان همه‌ی ما همان روان غیر شخصی جهان است.

هند دوران بودا مملو از شکاکان، نهیلیست‌ها، سوفسطاییان، ملحدان، ماده‌گرایان و دین‌های بدون خدا بود. مکاتب مادی گرا زمینه را برای ظهور آیین بودا فراهم کردند.(۵۰۰BC). پیرو آیین جین باید که جانداری را نکشد، دروغ نگوید، دزدی نکند، پاکدامن باشد وشراب ننوشد، واز بحث در مورد ابدیت، خلود یا خدا پرهیز دارد. بودا می‌گوید بینهایت افسانه است و پارسایی در دوری از خودپرستی است نه در شناخت خدا.

او روح را انکار می‌کرد ولی در عین حال به تناسخ اعتقاد داشت. مفهوم دین برای او کاملاً اخلاقی بود.

رسیدن نیروانه در پنج مرحله اتفاق میافتد: ۱) حالت سعادت که از راه محو کامل امیال خودپرستانه به دست میآید. ۲)رهایش فرد از دوباره زاییده شدن. ۳)فنای خودآگاهی فردی. ۴)اتحاد فرد با خدا. ۵)بهشت سعادت پس از مرگ. بهداشت شدید از خصال بوداییان است که متاسفانه در آیین برهمن به فراموشی سپرده شد. در نظریات فلسفی بودا تناقض‌هایی هم دیده میشود. بودا به اینکه خود سازنده‌ی دین خود است اعتراف داشت.

هند پر از جنگل وحیوانات وحشی مانند شیر و ببر و فیل است. انسان‌ها زمین‌ها را از چنگ جانوران نجات می‌دادند و به کشاورزی می‌پرداختند. هند از منابعی بسیار غنی برخوردار است. اداره کردن هند به دلیل راه‌های کم و خراب بسیار مشکل بود. همین دلیل به پادشاهی‌های کوچک تقسیم شد.

پس از مرگ بودا شاگردانی فرقه‌فرقه شدند. چند خدایی رایج، آیین بودا را سرنگون کرد و آیین هندو جانشین آن شد. هندوها به چندین فرقه تقسیم می شوند که مشترکاتی هم دارند. تقدم هند در فلسفه روشنتر از طب است. هندیان در جشنواره‌ها یی رهبران مکاتب فلسفی را به بحث و جدل وا می داشتند. معلمان فلسفه در هند به اندازه بازرگانان بابل فراوان بودند. اندیشه‌ی هندی از طریق سوتره‌ها که سخنان کوتاه است به ما رسیده است. نظام‌های فلسفی که در هند باستان رواج داشتند عبارت اند از: منطق هندی، اتمیسم، دردزدایی، یوگا یا تربیت نفس، ذهن

انسان ناتوان از درک الهیات، ومنطق اوپانیشاد. متاسفانه سنت نوشتن در هند وجود نداشت و بسیاری از ابعاد تمدن هند به فراموشی سپرده شد.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات هند باستان

قدیمی‌ترین مدارک ریاضی در تمدن هند مربوط به ۵۰۰BC است که به عصر تالس و فیثاغورس در یونان برمی‌گردد. آنچه از ریاضیات هند باستان به‌جا مانده، نماد ده‌دهی است که امروز برای نوشتن اعداد به کار میبریم ونماد صفر که نمی‌دانیم اولین بار چینی‌ها یا هندی‌ها آن را به کار میبرند. هندی‌ها برای توان‌های ده مثل 10^{7}، 10^{12}، 10^{17}، 10^{55} نام‌هایی داشتند. نماد صفر قبل از ۲۰۰BC به کار رفت.

در سال‌های ۸۰۰-۵۰۰ BC اشعاری در مورد هندسه و حساب وارد وداها شد. Sulvasutras شامل قواعدی برای پیدا کردن مثلث فیثاغورسی واعداد فیثاغورسی بود. دلایل مذهبی منجر به علاقه به رابطه‌ی فیثاغورس شد. سه آتشکده در خانه‌ی هندو که مساحت مساوی ولی اشکال متفاوتی دارند، یک دلیل عملی برای نیاز به این رابطه بود. خواسته‌های دقیق دیگری که نیاز به محاسبه داشت در فرهنگ هندو وجود داشته است. بسیاری از مسائل هندسه یونانی در فرهنگ هندی مطرح بوده: رسم مربعی که مجموع یا تفاضل دو مربع دیگر است. مساله تربیع دایره و رسم یک مربع با مساحت مستطیل داده است ارائه روشی برای تقریب $\sqrt{2}$ که می‌تواند به دلخواه دقیق شود. درآیین جین اعداد شمارش پذیر، شمارش ناپذیر وبی نهایت، فضای یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی و به طور نامتناهی نامتناهی واعداد. . . ، ω^2،... ، ۲+ ω،... . ، ۱ + ω، ω،... . ، ۲، ۱ مطرح شدند. جین با مفهوم بی‌نهایت آشتی دارد، بر خلاف تمدن یونانی که فقط با متناهی کار می‌کند. آن‌ها با ترکیبات نیز سروکار داشتند. مثلاً این مساله که اگر حیوانات با تعداد حس‌ها از ۵ حس طبقه بندی شوند، چند دسته از حیوانات وجود دارد؟ و یا در Bhagabati(BC ۳۰۰)پرسیده شده که چند فلسفه می‌توان با برداشتن تعداد خاصی از دکترین‌های اولیه ساخت؟ در هند باستان سؤالات شمارشی ترکیباتی همه جا دیده می‌شود. در ۳۰۰BC تعداد کلماتی که با تعدادی خاص از حروف میتوان ساخت را در ادبیات هندی می شمردند. مثلث پاسکال ۳۰۰ سال قبل از چین و۷۰۰سال قبل از پاسکال در هند مطرح شد. مثلث پاسکال برای توضیح قانونی که هزار و دویست سال قبل در هندکشف شده بود مطرح بوده!

تاثیر تفکرات فلسفی هندی‌ها در ریاضیات آن‌ها آشکار است و این به کاربردهای روز مره‌ی ریاضیات غالب است. اینکه دین هندی با فلسفه آمیخته بوده نقش به سزایی در تاثیرگذاری آن بر ریاضیات داشته است جالب اینکه سنت ریاضیات هند تقریباً به طور پیوسته ادامه دارد. اما ریاضیات یونانی به مسلمانان وسپس به اروپاییان تحویل داده شده است وخود یونان از جایی به بعد نقش مهمی در آن نداشته. در علوم مدرن نیز که به علت پیشرفت تمدن بسیار جابجا می‌شوند، جغرافیای این جابجایی بسیار اهمیت دارد. در مورد ریاضیات هندی در اعصار بعد، در کنار ریاضیات یونان وریاضیات اسلامی صحبت به‌میان خواهیم آورد.

خلاقیت در چین باستان

چین بهشت تاریخ نویسان است و تاریخ چین در طی هزاران سال به دقت ثبت شده است. قدمت نگارش همه وقایع تا ۳۰۰۰BC می‌رسد. تاریخ نویسان خیال پرداز چینی در مورد آفرینش جهان نیز نوشته‌هایی دارند. چینی‌ها در نجوم نیز پیشرفته بودند. کسوفی در ۲۱۶۵ BC گزارش شده که تایید گردیده‌است. بسط علم، کاغذ و مرکب، مراحل ابتدایی اختراع چاپ، قدیمی‌ترین کتاب‌ها، پول کاغذی، حروف مجزای چینی، گل چینی‌ها و دایره المعارف‌ها از مظاهر تمدن چین باستان هستند. ویژگی‌های شعر چینی نظم آزاد وتصویرسازی در شعر است. در فرهنگ چینی هر شعری تصویر است و هر تصویری شعر. نقطه‌ی جالب پستی فن نمایش در چین است. مغولان داستان‌نویسی و نمایش‌نویسی را در چین رایج کردند. هنرهای دستی در چین مشتمل است بر منسوجات، جواهر آلات، بادبزن‌ها، لاک‌کاری، پیکرتراشی و یشم‌تراشی. هنر معماری نیز در چین رواج داشته است. مناظر و مزایا، دوری از واقعه پردازی، ترجیح خط و رنگ، ایجاد تقارن و وزن به وسیله‌ی شکل، القای ادراکات و عواطف، قیود و محدودیت‌ها، صداقت از مشخصه‌های نقاشی چینی است. سفال‌گری، چینی‌سازی، میناکاری و ابریشم‌بافی نیز از هنرهای دستی چین محسوب می‌شوند.

باروت برای استعمال در آتش بازی، قطب نما(۱۰۰۰BC)، زلزله نگار(۱۰۰AD) و محاسبه خسوف و کسوف توسط چینی‌ها به بشریت عرضه شدند. چانگ تسانگ۱۰۰BC کتابی در مورد جبر وهندسه است. چینی‌ها اولین بار کمیت منفی را به کار بردند و را تا شش رقم اعشار محاسبه کردند. اما جبر از هند به چین آمد. پزشکی چین مدت‌ها پیش از بقراط طبیبانی حاذق به بار آورد. واین پزشکان از بیهوشی با شراب بهره می‌بردند و هرگز کالبد شکافی نکردند.

از مشخصه‌های آیین حکمرانی در چین، عدم اعتنا به فرد، خودمختاری، ضعف قوانین مدرن، کیفرهای شدید و دستگاه تفتیش بودند. سازمان‌های دیوانی، تربیت دیوان سالاران، تفویض مشاغل بر اساس تعلیم و تربیت، امتحانات استعلام دولتی در نظام حکمرانی چین ظهور یافتند. در ۱۶۰۰BC درچین برنز به کار رفت که ۱۰۰۰ سال دیرتر از اولین کاربرد برنز توسط بشر بود.

دوره‌ی سلطنت سلاطین شانگ قرن ۱۶ تا ۱۱ ق م، سلاطین ژو قرن ۱۱ تا۸ ق م، سلاطین گین قرن ۸تا۲ ق م سلاطین‌ها ن قرن ۲ ق م تاقرن دوم میلادی، سلاطین تانگ و سن در قرون ۷و۸ وسلاطین سانگ قرن ۱۰الی ۱۲ به طول انجامید. سپس حمله‌ی مغول روی داد وسلاطین مینگ در قرون ۱۴ تا۱۷ سلطنت کردند. در زمان سلسله‌ها ن علم و تجارت شکوفا شد و آن‌ها بارومیان ارتباط برقرار کردند. ابریشم وسنگ‌های قیمتی تعادل تجارت را به ضرر روم به هم زد و پول رومیان را بی‌ارزش کرد.

ظهور مسیحیت آغاز نزول امپراطوری روم به هنگام ظهور آیین بودا همزمان با نزول امپراطوری چین بود که در اوایل قرن سوم رخ داد. در طی قرون ۱۰تا ۱۲ سلسله‌ی سونگ کتاب‌های بسیاری در شیمی، جانورشناسی، گیاه‌شناسی وجبر به جای گذاشت. در زمان مغول‌ها علم از دو طرف بین چین وجهان اسلام جاری شد. روش‌های جذر گیری چینی بعدها در تحقیقات کاشانی دیده شد. مغول‌ها در روسیه ۲۴۰ سال باقی ماندند، اما در چین درمدتی کمتر از ۱۰۰ سال با سلسله‌ی مینگ جایگزین شدند.

تفکر فلسفی در چین باستان

از فیلسوفان پیش از کنفسیوس می‌توان از یوتزه نام برد ۱۲۵۰BC: «آنکس که از شهرت چشم پوشد به غم نیفتد». همانطور که هند برترین زادگاه فلسفه اولی و دین است، چین موطن والای فلسفه‌ی انسانی یا فلسفه‌ی غیر الهی است. تنها فلسفه‌ی اولی در کتاب ای‌چینگ است که دوگانی مثبت و منفی، فعال و منفعل، نور و ظلمت، و زندگی و مرگ را مطرح میکند.

در سال‌های BC ۵۰۰ چین مانند هند در ایران و یونان نوابغی به عرصه‌ی فلسفه و عدد معرفی کرد. کنفوسیوس، پیش از او تنگ‌سی و لائوسه که نویسنده‌ی کتابی در دو بخش تائوته است: کتاب صراط و فضیلت. محققان اعتقاد دارند که تائوئیسم قبل از او هم بوده، اما از زمان او آیین اکثریت مردم چین شده. بنابراین فلسفه، دانش وتفکر کم مایه است و میان خردمند و دانشمند فاصله بسیار است. تائوی گیتی وتائوی رفتار دو طبقه تائو هستند که در واقع یکی بیش نیستند. این نمایانگر وحدت قوانین طبیعت است. اجتناب از دخالت در جریان طبیعی امور نشانه‌ی خردمندان است و سکوت آغاز خرد است.

کنفوسیوس در ۲۲ سالگی خانه‌ی خود را مدرسه کرد. برنامه‌ی درسی او تاریخ و شعر و آیین مردم‌داری بود. به فرزانگان حمله نمی‌کرد و رد کردن عقاید را اتلاف وقت می‌دانست. روش آموزش او نشان دادن خطاهای دانش آموزان به آرامی و تیز کردن هوش آن‌ها بود. تقید به آداب آرمان او بود. او در باره‌ی خود چنین گفته است: در ۱۵سالگی به آموختن دل دادم. در سال سی ام سخت به خود قائم شدم. در چهل سالگی ازشک رهایی جستم. در ۵۰ سالگی به نوامیس آسمان پی بردم و در ۶۰ سالکی گوش‌هایی حقیقت نیوش یافتم و در هفتاد سالگی توانستم از خواست دل پیروی کنم، بی‌آنکه از راه ثواب دوری جویم. سیاست کنفوسیوس مبتنی بود بر حق حاکمیت مردم، حکومت از روی سرمشق، عدم تمرکز ثروت، و توجه به موسیقی و آداب.

بنیاد جامعه چین علم نبود. معجونی از دین و اخلاق و فلسفه بود. چینیان فارغ از کاهنان ولی اسیر خدایان بودند، مانند هندوان. ابتدا مظاهر جاندار را از روی ترس می‌پرستیدند. بعد به پرستش نیاکان یا تحت تاثیر آیین کنفسیوس به پرستش آسمان ومردان بزرگ روی می‌آوردند. تائو پرستی و دین بودایی رقیب اصلی دین‌های کنونی هستند که با هم مخلوط شده‌اند.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات چین باستان

ریاضیات چینی به خاطر مالیات، نقشه کشی، و بازرگانی رشد پیدا کرد و ساختارهای دولتی در آن نقش مهمی ایفا کردند. چینی‌ها به مسائل طولانی مجرد هم علاقه داشتند، مثل مربع وفقی، حل هم‌زمان همنهشتی‌های خطی، چرتکه و میله شمارش ابزارهایی بود که توسط چینی‌ها ساخته شد که حل معادله هم توسط آن‌ها انجام می‌شد. ایده‌ی هارمونی جهانی بر پایه‌ی یین و یانگ وزوجیت آن‌ها در مربع وفقی دیده می‌شود. مربع وفقی یک موجود فلسفی ریاضی است و قرار است تاویل‌هایی داشته باشد. چنان تفکری در ریاضیات اسلامی نیز دیده می‌شود. در متون ۴۰۰BC برای زوایای قائمه، نیم قائمه، سه ربع قائمه، (۱/۵) برابرآن و ^{2}(۱/۵) و برابر آن نام داشت. در ۱۶ تا ۱۱ ق م سیستم ده‌دهی نمایش را به کار می‌بردند. این از استخوانی که به جا مانده استنباط شده است) و در ۱۰۰ ق م میله شمارنده را به کار بردند. ایشان از صفحه‌ی شطرنجی شمارشی که مانند ماتریس امروزی بوده را برای شمارش به کار می‌برند و میله‌های سیاه برای اعداد مثبت و قرمز برای اعداد منفی به کار می‌رفتند(از کتاب نه فصل).

قضیه فیثاغورث در کتاب حساب ۳۰۰BC آمده وحالت خاص آن: ۳،۴،۵، اثبات شده است. کاربرد نجومی وجغرافیایی هندسه، قضیه فیثاغورث را مهم می نموده و آن را قضیه‌ی میله سایه می‌نامیدند. مثلاً با کمک این قضیه، ارتفاع خورشید را محاسبه کردند. البته اشتباهات محاسباتی در آن وارد شده بود. کتاب «نه فصل» معادلات خطی، معادلات درجه دو و روش‌های جذرگیری مطرح شده‌اند.

برای اولین بار در چین جهان بینی با فلسفه ترکیب شد و موجب رشد درک بشر از جهان خلقت شد. مسئله تأویل ساختارهای ریاضی با شناخت جهان خلقت فرض شده است. ریاضیات به عنوان علمی که مزایای جمعی دارد و لزوماً در زندگی افراد کاربرد ندارد مثل نقشه کشی که در اختیار دولت‌ها بود، ابتدا در چین مطرح شده است(اطلاعاتی که مورد علاقه کسانی است که امروزه ماهواره به آسمان می‌فرستند).

خلاقیت در تمدن ایران باستان

در اکباتان(یعنی محل تلاقی چند راه) نخستین شاه مادها دیااکو به سلطنت رسید که کاخی با ۲ کیلومتر مربع وسعت ساخت. از پادشاهان این سلسله هوخشتر را می‌توان نام برد که شکست نینوا به دست او انجام شد. از مادها می‌توان عدالت پادشاهان، کاخ‌سازی، خلاقیت در ساختار اخلاقی، مبارزه خستگی‌ناپذیر برای آزادی را نام برد.

پارسی‌ها آریایی بودند: الفبای ۳۶ حرفی را از مادها گرفتند و همین طور کاغذ پوستی و قلم را. پارسی‌ها در صلح به کشاورزی و در هنگام جنگ به جنگاوری توجه داشتند. از بازمانده‌های تمدن پارسی‌ها می‌توان ستون، قانون اخلاقی که ریشه‌ی مادی دارد، آیین زرتشت، تعدد زوجات، کشور گشایی، اداره امور، بزرگترین سازمان سیاسی قبل

از روم، خوش اداره‌ترین دولت‌ها، آزادی عقیده دینی برای اقوام زیر سلطه، مواد معطر و گردهای آرایشی را نام برد. خط نویسی بابلی را که ۳۰۰ علامت داشت، ساده کردند. قنات، ابتکار در حمل‌ونقل، شاه‌راه‌سازی، پل‌سازی، ثروت اندوزی، کانال، ضرب سکه نقره و طلا توسط ایشان ابداع شد.

تا زمان پارسی‌ها دولتی به این گستردگی در تاریخ پیدا نشده بود. راه‌سازی، انتقال کالا و افکار و عادات را تسهیل کرد. سرکشی ناگهانی به ایالات، سیستم جاسوسی از کار شاهان و سرداران سپاه، سخنگویان قانون مشی سیاسی ایشان بود. به ادبیات توجه نداشتند. در این تمدن پزشکی از دست کاهنان خارج شد و به صورت حرفه‌ای پیشرفته درآمد. سازمان منظمی برای پزشکان و جراحان داشتند. مزد آنان را قانون تأمین می‌کرد. در کاخ‌سازی بسیار پیشرفته بودند. صنعت فرش هم به همین کاخ‌سازی مربوط می‌شد. یونانیان در ساختن بناهای خود از ایشان ایده گرفتند. اما عناصر آن را ایرانیان از دیگران اقتباس کرده بودند.

تفکر فلسفی در ایران باستان

مادها به دلیل پرهیز از زندگی اخلاقی، پس از قدرتمند شدن منقرض شدند. ایشان از کردستان برخاستند. پارسی‌ها از خوزستان و بختیاری برخاستند. و به رهبری کورش جوان که مؤسس سلسله هخامنشی بود. یک امپراطوری بزرگ را پایه‌گذاری کردند. منش کوروش، بزرگواری با شکست‌خوردگان و مهربانی با دشمنان سابق و بخشندگی بود. او می‌دانست که دین از دولت نیرومندتر است. شهرها را غارت نمی‌کرد. معابد را ویران نمی‌ساخت. بلکه کمک مالی هم می‌کرد. این منش در کمبوجیه فرزند او ادامه پیدا نکرد. ولی داریوش از کورش پیروی کرد. حفظ قدرت و رسیدگی به طغیان ولایات زیردست همه توجه پارسیان را به خود معطوف کرد. زبان فارسی باستان با سانسکریت دو لهجه از زبانی قدیمی‌تر بوده‌اند. ایده‌های فرشته و شیطان اولین بار در آیین پارسیان مشاهده شد. از مشخصه‌های این تمدن می‌توان موارد زیر را نام برد: هنر وارداتی، بازرگانی،که در دست اقوام دیگری بود، استفاده از ناوگان فینیقی‌ها، به دست آوردن ثروت بر پایه‌ی قدرت نه بر پایه صناعت، و این که لشکریان ایشان هم زبان نبودند. پارسی‌ها خرید و فروش را پلید می‌دانستند و بازار را کانون دروغ و فریب! رشوه دادن مجازات اعدام داشت. مجازات گناهان دیگر شلاق بود یا جریمه نقدی. متناسب با آن هر ایالتی سالانه باید مبلغ ثابتی به شاه می‌پرداخت. که از نتایج آن آسایش و آزادی در مناطق تحت حکم‌فرمایی بود.

کتاب اوستا یعنی کتاب معرفت و حکمت، توسط داریوش اول رسمی شد و سایر آیین‌ها از بین رفت. محققان قسمت‌هایی از اوستا را از ریشه وداعها و قسمت‌هایی را از ریشه بابلی می‌دانند، اما آفرینش در شش روز و آغاز خلقت آدمی از یک پدر و مادر در این دین آمده است. در این دین ایده وحی برای اولین بار مطرح می‌شود. ادعا می‌شود که اوستا وحی الهی است. ایده‌ی طوفان هم در آن آمده است. گذشتن از پل صراط نیز در این دین آمده است. جنبه اخلاقی دین زرتشت غلبه دارد بر جنبه الهی و دینی آن. در میان پارسیان دینداری بزرگترین فضیلتشان بود. ایشان خود را برترین ملت‌ها می‌دانسته‌اند. در میان زرتشتیان روا نبود معبد بسازند یا بت بتراشند فقط قربانگاه داشتند.

ایشان معتقد به رستاخیز و روز حساب بودند؛ عقایدی که در سند مرده نامه‌ی مصری هم آمده است. آیین زرتشت به دست مغان(مردان حکیم) افتاد که پارسایی را پیشه می‌کردند، اما آن را از آنچه بود منحرف نمودند.

ایرانیان در رعایت آداب و احترام همپایه‌ی چین بودند. تعلیم و تربیت منحصر به فرزندان ثروتمندان بود. ایرانیان به هنر و اخلاق و جنبه‌های عملی زندگی چنان علاقه داشتند که به توسعه علوم نپرداختند. البته امپراطوری ایشان ۲۰۰ سال بیش طول نکشید و مجالی هم برای توسعه تمدن خود نداشتند. اسکندر آن‌ها را شکست داد تا بعد ساسانیان دوباره رقیب روم شدند. ایرانیان از نظر دین و فلسفه و بهداشت و اخلاق بسیار پیشرفته بودند. در میان علوم، پزشکی بیش از همه رونق داشت.

مبانی فلسفی ریاضیات یونانی

به جز ابزارهای ماشینی تمام مظاهر تمدن امروزی از زمان یونان باستان وجود داشت. البته خود خالق آن نبودند. بلکه همه‌ی آن‌ها را در خود جذب ودرونی کردند. تمدن جزیره‌ی کرت در اواخر قرن نوزدهم کشف شد. کرت خط تصویری را به خط هجایی تبدیل کرد(حدود ۱۸۰۰ BC). سفال‌گری کرتی‌ها ۲۱۰۰BC تا ۱۹۵۰BC در حد کمال است. در ۲۵۰۰BC می‌دانستند چگونه دیوارها را با آهک بپوشانند وبر آن نقاشی کنند. در ۲۰۰۰BC تماشاخانه برای تئاتر داشته‌اند.

اشعار هومر از مهمترین منابع در باره‌ی تاریخ یونان است. هومر از قوم آخایایی‌ها بود ۱۳۰۰-۱۱۰۰BC. محاصره‌ی نه ساله تروا توسط یونانیان ۱۱۹۶BC در اشعار هومر آمده است. در ۷۷۶BC نخستین بازی‌های المپیک برگزار شد. در ۷۲۵BC سکه‌زنی در لیدیه ودر ۶۸۰BC نخستین سکه زنی دولتی در یونان ظهور پیدا کرد. در ۶۰۰BC عصر تالس ورواج پیکر تراشی، ۵۴۵BC غلبه ایران بر یونان، ۵۰۰BC عصر فیثاغورس، ۴۹۴BC شکست یونان از ایرانیان و ۴۹۰BC هنگامه‌ی جنگ ماراتون بود.

پس از مصر فینیقیان در یونان نفوذی عظیم داشتند. در زمان تالس تمدن ایران پیشرفته‌تر از یونان بود جز در پرورش ذهن و نظام آموزش وپرورش. راز ورزی شرق و خردگرایی غرب و استیلای متناوب آنان تمدن جدید را ساخت. کشتی‌سازی را از فینیقیان آموختند. سپس بابلیان بر یونان تأثیر گذاشتند. اوزان و مقیاسات و ساعت آبی و آفتابی و واحدهای پول را به یونانیان انتقال دادند. تقسیم دایره به ۳۶۰ درجه و درجه به ۶۰ دقیقه و آن به ثانیه از بابل آمد. یونانیان در قرن هشتم قبل از میلاد به بعد در اثر فرار مردم از حمله دوری‌ها وپخش شدن و تشکیل کولونی‌های کوچک و ارتباط با سایر اقوام تمدنی غنی ساختند. این اقوام در آتن گرد آمدند و چون از وطن دور بودند، از اسارت سنن به در آمدند و رقابت تجاری موجب شکوفایی ایشان شد.

ریشه فلسفه یونانی در دانش کاهنان مصری و مغان ایرانی و شاید پارسایان هند، علوم لاهوتی کلدانیان بود. در نتیجه‌ی فلسفه و ساختار حکومتی خود، قانون در کنار آزادی را کشف کردند و به تمدن بشری تقدیم کردند. عرفان یونانی از فیثا غورس شروع شد و با پارمنیدس، هراکلیتوس و افلاطون ادامه یافت و طبیعت گرایی فلسفی از تالس شروع شد، وبا پرو تاگوراس، بقراط وارسطو دنبال شد.

تحت تأثیر تالس هراکلیتوس وپارمنیدس عقاید وحدت‌گرایانه داشته‌اند. هراکلیتوس مانند عارفان چینی به کوه و بیابان پناه برد تا در مورد واحدی که همه چیز را نتیجه می‌دهد غور کند. پارمنیدس می‌گفت همه چیزها یکی است. هراکلیتوس بهترین راه پرداختن به مسأله‌ی اشیاء چه هستند را این می‌داند که بفهمیم چگونه چنین شده‌اند. او در این بین وحدت اضداد را مبنای خداشناسی خود قرار می‌دهد. او به خرد کل معتقد بود. مفهوم کلمه الهی از او

رسیده است. هراکلیتوس با دموکراسی مخالف بود. چرا که بدان بسیارند و نیکان اندک. او فلسفه‌اش را به حوزه اخلاق نیز می‌کشد. هراکلیتوس تقریباًهم عصر فیثاغورث است وبسیاری از مبانی فلسفه‌ی او به فیثاغورث شباهت دارد.

اختلافات نژادی و قومی، تنفر از اسپارتی‌ها و آتنی‌ها جلوی وحدت یونانیان را گرفت و در برابر ایرانیان شکست خوردند ۴۹۴BC. بار دیگر شورشیان بلاد ایران از یونانیان کمک خواستند و آتنی‌ها ۲۰کشتی در اختیار آن‌ها گذاشتند. داریوش اول خشمگین شد و با ششصد کشتی جنگی به یونان حمله کرد وآتن قبل از اینکه اسپارت‌ها از راه برسند باوحدت و تدبیر در ماراتون ایرانیان را شکست داد ۴۹۱BC. داریوش در۴۸۵ BC در گذشت. در ۴۸۱BC خشایار شاه با ۲ میلیون وششصد هزار سرباز و۱۲۰۷ کشتی به یونان لشکر کشی کرد. با ۶۷۴ کشتی در داردانل پل زد اما غیرت آتنی‌ها و تفرقه نژادی ایرانیان باز هم یونان را پیروز کرد. تا زمان اسکندر پیروزی یونان بر ایران تنها به معنی جلوگیری از سقوط آتن بود. اما همین موفقیت یونانیان را از پرداخت خراج به ایران رهایی بخشید و باعث شکوفایی تمدن یونان گردید.

سرگذشت تالس

به عقیده‌ی ارسطو، تالس بنیان‌گذار حکمت طبیعی یونان بوده است. قراین حکم می‌کند که او دولتمرد، بازرگانی ثروتمند، مهندس، ریاضیدان و اختر شناس بر جسته‌ای بوده است. او در ۶۴۰BC زاده شد و از تبار فینیقی‌ها بوده است. در سده پس از مرگش مانند نیوتن و انشتین سمبل هوش طبیعی بین عامه بوده است. در ۶۰۰ ق. م و قوع خورشید گرفتگی را پیش بینی کرد. یونانیان اعتقاد داشتند که ریاضیات را تالس از مصر به یونان آورده است. اولین کسی که به جست‌وجوی فرضیه‌ای طبیعی و وحدت بخش برای وقایع طبیعی زلزله راه را برای رشد دانش هموار کرد. هر چند سعی کرده بود زلزله را با کمک شناور بودن زمین بر آب توجیه کند! تالس از نجوم بابلی و مصری اطلاع داشته، اما نجوم بابلی را فینیقیان به یونان آوردند. تالس در زمان اسپارت‌ها می‌زیست اسپارت‌ها تاریخ سلاطین خود را به ۱۱۰۴BC می‌رسانیدند. این قوم در موسیقی و آواز و همچنین در رقص و شعر و هم‌سرایی و کلاً در هنرها پیشرفته بودند. مجلس سنا و قانون قدرتمندتر از پادشاهان اسپارت بودند. مجمع عمومی یا آپلا هسته‌ی نظام دموکراتیک بود. اجرای احکام دیوانی به عهده‌ی سپاهیان بودند. سطح بهداشت پایین بود. به اصطلاح نژادی اهمیت می‌دادند. در برابر هجوم فرهنگی به شدت مراقبت می‌کردند. همزمان در آتن سه طبقه‌ی اشراف، صنعتگران و بازرگانان تشکیل شده بودند. حکومت‌های کوچک بر آتن تسلط داشتند و چندین بار مورد حمله اسپارت‌ها قرار گرفت. آتن و اسپارت دوتا از چندین شهری بودند که از لحاظ سیاسی مستقل بودند و به آن‌ها Polis گفته می‌شد. معبد دلفی و مسابقات ورزشی که در آن برگزار می‌شد تنها مایه‌ی دینی و فرهنگی اتحاد یونانیان بودند.

از تالس مبانی هندسه یونانی به جای مانده: قطر، دایره را دو نیم می‌کند، زوایای مثلث متساوی‌الساقین برابرند، زاویه‌ی محاط در نیم دایره قائمه است، زاویه‌های متقابل به رأس برابرند، دو مثلث به حالت دو زاویه و دو ضلع بین برابرند. او نجوم را از موهومات شرقی پیراست. فلسفه تالس بر این استوار است که گناهان آدمی از مقتضیات عصر اویند، اما فضایل از ذات او تراوش می‌کنند. او آب را منبع خلقت می‌دانست و از این لحاظ که همه چیز را به یک مبدأ بر می‌گرداند، فلسفه‌ی او اهمیت دارد. به اعتقاد او همه ذرات جاندارند. از تالس پرسیدند: چه کاری بسیار دشوار است؟ گفت: نه آغاز دارد نه انجام. پرسیدند: کمال تقوی چیست؟ پاسخ داد: آنچه را در دیگران عیب می‌شماریم، خود نکنیم.

در عصر تالس همچنان که علم وجهی از فلسفه بود و برای رهایی از تفکرات کلی و دور از تجربه می‌کوشید، فلسفه وجهی از شعر بود و برای جدایی از اساطیر و مجاز گویی تلاش می‌کرد. در ۵۴۶BC کورش لیدیا را گرفت و بعد شهرهای یونیا که تالس در آن می‌زیست به شاهنشاهی ایران پیوست. ایده‌ی نسبت از زمان تالس به جا مانده و نگاشت‌های خطی تعمیمی از همین ایده است. همچنین واژه‌ی theorem از او به جا مانده است. theoremکه مربوط به theosthai و به معنای دیدن است. معلوم نیست احکام نسبت داده شده به تالس توسط او به مفهوم امروزی به اثبات رسیده باشد.

سرگذشت فیثاغورس

فیثاغورس(۵۶۰-۴۸۰ق. م) در جوانی تالس پیر را ملاقات کرد و به ترغیب او به مصر سفر کرد. او در سالوس زاده شد و مانند تالس فینیقی الاصل بود. فیثاغورس قائل به نظریه تناسخ بود. روش علمی او تعمیمی وسیع مبتنی بر مشاهداتی محدود است. مثلاً این عقیده او که همه چیز عدد است مبتنی است بر این شواهد: ۱) سه قطعه چوب به نسبت‌های ۳و۴و۵ همیشه زاویه‌ی قائمه می‌سازند. ۲) رابطه‌ی ریاضی با الحان موسیقی و اینکه نسبت‌های مساوی در آلات موسیقی نت‌های مشابه را به دست می‌دهند. ۳) ثوابت در حرکات اجرام آسمانی. استدلال چنین بود که چون الحان و اشیاء با عدد تبیین می‌شوند، شاید جوهر همه‌ی آن‌ها عدد باشد.

قضیه فیثاغورث را در زمان حمورابی در بابل می‌شناختند. فیثاغورس هرم، مکعب و دوازده وجهی منتظم را می‌شناخت. اخترشناسی فیثاغورسی تحت تأثیر اخترشناسی بابلی بوده است؛ به خصوص به مفهوم سال بزرگ اعتقاد داشت. فیثاغورس ۳۰ سال برای ساختن شخصیت خود به سفر پرداخت. اوبه مصر، بلاد عرب، سوریه، فینیقیه و کلده و هند و بابل سفر کرد. از او چنین گفته‌ای به جا مانده است. : هر گاه به خارج از دیار خود سفر می‌کنی، مرز و بوم خود را فراموش کن!

فیثاغورس برای شاگردانش قوانینی و ضع کرد: نخوردن گوشت و تخم مرغ و لوبیا که ریشه در اعتقاد به تناسخ داشت. در پایان روز هر فردی و ظیفه داشت که به محاسبه‌ی نفس بپردازد. تطهیر جسم و طهارت روح از راه پرهیز

و تحصیل معارف خلاصه‌ی اشتغالات شاگردان او بود. برنامه‌ی درسی ایشان هندسه و حساب، نجوم و موسیقی بود. فیثاغورس جبر هندسی را پایه‌گذاری کرد. نظریه اعداد از دید گاه او مجرد و فراتر از حساب عملی بود.

فیثاغورث عالم را جسمی کروی و زنده می‌داند که مرکز عالم زمین است. زمین نیز کروی است و از غرب به شرق دوران می‌کند. خسوف ناشی از حایل شدن جرمی در برابر خورشید، میان ماه و خورشید است. او نفس را سه جزءمی داند: عاطفه که مرکز آن قلب است و شهود و عقل که مرکز آن مغز است. عاطفه و شهود بین انسان و حیوان مشترک است، اما عقل مختص انسان است. نفس پس از مرگ در برزخ پاک می‌شود و در جسم دیگری حلول میکند و انسان به نیروی فضیلت باید از حلول در بدن‌ها خلاصی یابد.

سال‌های شکوفایی فیثاغورس مقارن با سال‌های شکست ایرانیان در حمله به یونان بود کهتا سه قرن یونانیان را از خراج به شرق رها ساخت و آزادی آنان در دریاها را تأمین کرد. این شکستها تا ۴۷۷ ق. م ادمه داشت. اتحاد شهرهای کوچک در برابر ایران منجر به شکل‌گیری امپراطوری آتن شد. دموکراسی آتن بر پایه مشاوره، مجلس و قانون که یونانیان آن را الهی می‌دانستند پایه‌گذاری شده بود. چیزی شبیه هیئت منصفه در یونان باستان و جود داشت.

کلمه تئوری را مدیون فیثاغورس هستیم. همچنین کلمه monad به مفهوم واحد از اوست. موناد با دو تا و چند تا شدن اعداد را، با حرکت، خط و سپس صفحه و فضا را تولید می‌کند و سپس ماده را. در فلسفه‌ی فیثاغورسی زمین از مکعب، آتش از هرم، هوا از هشت وجهی، آب از دوازده وجهی، و کره‌ی جهان از بیست وجهی به و جود آمده است. هر چند این تفکر به فیثاغورسیان نسبت داده شده و لی فیثاغورس تنها سه تا از احجام افلاطونی را می‌شناخت. فیثاغورسیان منجر به حرکتی در ریاضی شدند که در شکل‌گیری مفاهیم اثبات و استنتاج نمادین و توسعه نظریه نسبت و استفاده از ریاضیات برای ساختن تئوری‌های ریاضی مؤثر افتاد.

ریشه‌های تفکر فلسفی فیثاغورس

فیثاغورس به پیشنهاد تالس به مصر رفت و زبان و خط مصری را آموخت و در بین کاهنان مصری نفوذ کرد تا بتواند حکمت و علوم مصری را از ساختار سری کاهنان بیرون بکشد. ایرانیان به مصر حمله کردند و فیثاغورس را اسیر کرده و به بابل بردند و او انجا با فلسفه زرتشتی آشنا شد. چون پدر او فینییقی بود با فینیقیان هم تماس گرفت و حکمت آنان را در سوریه آموخت. تحت تأثیر این آزموده‌ها در حکمت، زندگی زاهدانه‌ای پیش گرفت و شخصیت پیامبر گونه‌ای برای خود ساخت که در جزایر کرت به او کمک کرد بر جوانان تأثیر بگذارد و مکتبی تشکیل دهد که تا سال‌ها حتی تا زمان گالیله پایدار بماند.

فیثاغورس با ارائه دینی فلسفی قدم مهمی در بیرون کشیدن فلسفه از دین برداشت که بعدها توسط هراکلیتوس، پارمنیدس، افلاطون و ارسطو کمال یافت. فلسفه‌ی فیثاغورسی به دلیل نزدیکی به مفهوم دین هنوز

جهان بینی را دربر داشت که این خود مایه‌ی رشد و کمال فلسفه بود. می‌بینیم که بسیاری از فلسفه‌های مدرن چنین نیستند. این دیدگاه فیثاغورس به فلسفه و توسعه‌ی ریاضی با کمک این فلسفه بدون تردید بر این که بعدها ریاضیات حکمت وسطی نام گرفت(توسط ارسطو) تأثیرگذار بود. البته ریاضیات ذاتاً چنین تجریدی را تحمل نمی‌کرد، اما لزوماً این تجرید به ظهور نمی‌رسید. هنوز بسیاری از جنبه‌های ادراک دینی هست که مجرد نشده و از دین بیرون کشیده نشده است. مفاهیم متنوع شهود از این دست هستند.

تأکید فیثاغورسیان بر مفهوم نسبت و سعی در هندسی‌سازی این مفهوم عددی، هم وارد معماری شد و منجر به رعایت نسبت‌های ریاضی در خلق آثار زیبای هنری گردید و هم منجر به کاربرد ریاضیات در توسعه‌ی علوم گردید. تلاش برای هندسی‌سازی مفهوم حسابی نسبت در کنار تقاضا برای اثبات دقیق منجر به کشف پاره خط‌های غیر قابل مقایسه و لذا اعداد گنگ شد. شاید این اولین اکتشاف جدی در ریاضیات محض باشد. این اولین تناقض و برخورد جدی بین ریاضیات گسسته و پیوسته بود. فرض وجود ک. م. م از موناد می‌آید. کلمه تئوری و کلمه موناد که در فلسفه لایبنیتز بسیار مهم می‌شود. اولین بار توسط فیثاغورس به کار رفته است.

فیلولائوس از معروفترین شاگردان فیثاغورس، از ترس خشم مردم که فیثاغورسیان را یک فرقه‌ی ضاله می‌شناختند، به جنوب ایتالیا فرار کرد. کتابی نوشت«در باره‌ی طبیعت» که اطلاعاتی در مورد نجوم فیثاغورسی به ما می‌دهد. در آن نظریه زمین و چند سیاره‌ی دیگر و همراه آن‌ها «زمین دیگری » به حول یک خورشید یا آتش مرکزی گردش می‌کنند. کتاب‌های فیثاغورسیان علم را در کنار مؤلفه‌های عرفانی جمع می‌کردند. دلیل اضافه کردن «زمین دیگر» یکی این بود که به خاطر دلایل عرفانی تعداد اجرام آسمانی باید ۱۰ می‌بود که مبنای شمارش دهدهی است. دیگر اینکه وقتی خورشید بالای افق بود، ماه گرفتگی مشاهده شده بود. به علاوه «زمین دیگر » توضیح می‌داد که چرا ماه گرفتگی از خورشید گرفتگی بیشتر اتفاق می‌افتد. همین فرض وجود شیئی به خاطر دلایل تئوریک قدم مهمی در تفکر علمی به شمار می‌رود.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات فیثاغورسی

تفکر فیثاغورسیان در مورد عدد که بسیار مجرد بود، روی مفهوم عدد و سیر آن تا به امروز بسیار تأثیرگذار بوده است؛ به طوری که حتی مفهوم شمارش هم پیوسته در حال تحول و کمال بوده است. رده بندی اعداد زوج و فرد، منجر به اعداد اول برای رده بندی اعداد فرد شد. عدد اول و مرکب و زوج افراد نسبت به هم اول در این زمان مطرح شدند. توجه به اعداد اول و ریاضیات مربوط به آن‌ها تا به امروز به میدان‌های متناهی گالوا و ریاضیات روی این میدان‌ها ادامه پیدا کرده است. در کنار آن اعداد شکلی(هندسی، تجسمی، . .) در کنار اعداد اول برای فیثاغورسیان اهمیت بسیار داشته، اما به ریاضیات جالبی منجر نشده است!

هندسه فیثاغورسیان هم مانند حساب آن‌ها نقش مهمی در جهان‌شناسی آن‌ها داشت: مجموع زاویه‌های مثلث دو قائمه، بازی با مربع و مستطیل و اشکال هم مساحت. خیلی از این مسائل به زبان اعداد هم قابل بیان بودند، اما فیثاغورسیان زبان هندسه را ترجیح دادند. تلاش در جهت هندسی‌سازی ریاضی در زمان ارشمیدس به هندسی‌سازی پدیده‌های طبیعی مثل اهرم تبدیل شد و هردو گرایش تا به امروز زنده مانده است. دوگان این گرایش تأکید بر جبری‌سازی بوده است که در ایران وجود داشته است. اما جالب است اگر بدانیم که آیا در ایران باستان چنین گرایشی وجود داشته است یا نه؟ ایرانیان به خاطر لشگر کشی، سازمان اداری حکومت و معماری به ناچار باید درباره‌ی حساب بسیار می‌دانسته اند، البته نه به تجریدی که فیثاغورسیان عدد را می‌شناختند.

درجه تجرید ریاضیات فیثاغورسی به خاطر درجه‌ی تجرید فلسفه‌ی آن‌هاست و آن درجه تجرید ریشه در تجرید حکمت‌های الهی و یا صرفاً دینی داشته که لزوماً از افسانه بری نبوده است. این آمیزش با افسانه‌ها در ریاضیات فیثاغورسی هم دیده میشود. احتمالاً در زمان فیثاغورس مفاهیم استدلال ریاضی تا اندازه‌ای پایه ریزی شده است، البته نه به تجرید اقلیدس. مثلاً تأکید بر استدلال‌هایی بوده است که از تصاویر هندسی کمک می‌گرفته‌اند. لازم به یاد آوری است که ایشان در مورد اعداد هم بسیار هندسی فکر می‌کردند، هر چند بسیار مجرد.

کشف $\sqrt{2}$ ضربه‌ای به ساختار تأویلی که فیثاغورسیان برای ریاضیات قائل شده بودند، نواخت. فیثاغورسیان اولین کسانی بودند که برای حقایق ریاضی قائل به تأویل جهان‌شناسی شدند. این گرایش در ایران امروز در ریاضیات نظام حوزهای هنوز هم وجود دارد. مثلاً برای مربع‌های وفقی معنی خاصی قائل هستند و آن‌ها را با نام پیامبران(از طریق بجد) مرتبط میدانند.

پارادوکس‌های زنو: دوگانی، آشیل، تیر و استادیوم، تناقضاتی را که تفکر اتمیستی فیثاغورسیان در درک حرکت و مفهوم سرعت در بر داشته آشکار می سازد. امروزه این پارادوکس‌ها به طور منطقی حل شده اما وجود آن‌ها سطح تفکر فیثاغورسی و نقاط ضعف آن را نشان می‌دهد. آن‌ها به یک پیوستار احتیاج داشتند که قادر به ساختن آن نبودند. مشکلاتی که از عدم وجود پیوستار ناشی می‌شد بدین قرارند: الگوریتم پیدا کردن ک. م. م برای دو قطعه خط قابل اجرانبود $\sqrt{2}$ و این که دو خط که از نقاط گسسته تشکیل شده‌اند باید واحد طول یکسانی می‌داشتند! این پارادوکس‌ها بسیاری از اثبات‌های فیثاغورسیان را در خطر انداخت. تلاش ریاضی‌دانان یونانی تا مدت‌ها معطوف به حل این مشکلات و بیرون کشیدن صورتی بدون تناقض از مفهوم استدلال ریاضی بود.

سرگذشت سقراط

پدر سقراط مجسمه ساز و مادر او قابله بود. او به شوخی گفت که حرفه‌ی مادر را دنبال می‌کند. به دیگران مدد می‌رساند تا آرای خویش را بیان کنند و از حمل آن فارغ شوند. سقراط به پرورش جسم بسیار توجه داشت و در جوانی سربازی بسیار دلیر بود که در جنگ‌ها رشادت‌ها نشان داد. از عکس العمل‌های مردمان می‌توان گفت که او در

عصر خود محبوب‌ترین و منفورترین آدم بود. ساده می‌زیست. حتی ترجیح می‌داد با پای برهنه راه برود و از بیماری مال اندوزی مصونیتی باور نکردنی داشت. با مردم سلوک می‌کرد. دعوت ثروتمندان را می‌پذیرفت. ، ولی در برابر ایشان خضوع نمی‌کرد. دعوت‌ها و هدایای شاهان بزرگ را رد می‌کرد.

می گویند چنان عدالت می‌ورزید که در ناچیزترین امور بر کسی ظلم نمی‌کرد. اعتدال را چنان رعایت می‌کرد که لذت را بر فضیلت و تقوی برتری نمی‌داد. در شناخت خلق و خوی مردمان بسیار بصیرت داشت و چنان به فضیلت برمی انگیخت که نیکان و نیکبختان همه آرزو داشتند چون او باشند.

افلاطون اعتراف می‌کند که او به راستی عادل ترین، عاقل‌ترین و نیک‌ترین مردی است که در عمر خود دیده است.

سقراط سخت کنجکاو و اهل جدل و مباحثه بود و با فیلسوفان عصر خود، معروف‌تر از همه پارمنیدس و شاگردش زنون، مباحثاتی داشت و جذب روش جدلی زنون شد. چنان در آراء و عقاید مردم موشکافی می‌کرد و جواب‌های دقیق و نامتناقض طلب می‌کرد که سبب آزار کسانی می‌شد که تفکر درست و روشن نداشتند. او مقدمات روش ارسطو را برای طبقه بندی و تعریف اشیاء فرام آورد و نظریه‌ی او مثل افلاطون را بنیان‌گذاری کرد و روش استقراء را در منطق وارد نمود. شاگردان سقراط را عقیده‌ی خاصی به هم پیوند نمی‌داد. هر کدام پیشوای مکاتبی گوناگون گشتند.

سقراط نظریه نسبی بودن معرفت را پذیرفته بود(از پروتاگوراس) و در هیچ مورد حکم قطعی نمی‌داد. همیشه از امور بشری بحث می‌کرد و تحصیل طبیعیات را تا حد لزوم توصیه می‌کرد و بیش از آن را مایه پریشانی خاطر! چه هر رازی که گشوده شود، رازی ژرفتر در پس آن پدیدار می‌شود. به طور خلاصه سعی سقراط این است که اخلاق را از ماورا ء الطبیعه و خداشناسی جدا کند چنان که فیثاغورس سعی کرد فلسفه را از دین جدا کند. سقراط نیز با دموکراسی مخالف بود و اعتقاد داشت که زر و ثروت و قرعه نباید تعیین کننده حکومت باشند. سقراط استانداردی از یک متفکر و روشن‌فکر به‌جا گذاشت که در تمامی ابعاد تمدن مایه کمال و پیشرفت شد.

مفهوم الگوی عملی زندگی یک دانشمند که از زمان فیثاغورس به‌جا مانده بود در زمان سقراط دوباره انقلابی به‌پا کرد و پس از فیثاغورسیان حرکت جدیدی در ریاضیات یونان را به وجود آورد. شاید این نشان می‌دهد که جهش‌های ریاضی در تمدن بشری با این که همیشه آمادگی ذاتی آن وجود دارد، به ظهور رسیدن آن تحت تأثیر دانشمندانی که شخصیت کاریزماتیک دارند از باطن به فعلیت می‌رسد. شخصیت‌ها یی که عصاره‌ی علمی دانش زمان خود هستند و هم جریان دانش را با خود به جلو می‌کشند. این مردان و زنان رهبر هستند که راهبر بشریتند و تاریخ را می‌سازند.

سرگذشت افلاطون

دغدغه‌های فکری افلاطون(۴۱۷-۳۴۷ق. م) نظریه‌ی شناخت، تعلیم و تربیت مبتنی بر ریاضیات، سازمان بخشی به پژوهش، نظریه موسیقی، ریاضیات، اخترشناسی و اخلاق را شامل می‌شد. راه خود را ادامه‌ی راه سقراط می‌دید و از گفتگوی سقراطی دفاع می‌کرد. او باغ آکادمی را تأسیس کرد. سقراط و افلاطون هر دو زندگی خود را و قف تربیت جوانان کردند. افلاطون اعتقاد داشت که پس از پایه‌گذاری مبانی تفکر در سن ۳۰ سالگی به بعد، برهان و فلسفه باید آموزش داده شود و کاربرد آن استنتاج قوانینی است که به نفع زندگی مردمان باشد.

به عقیده‌ی افلاطون، سرشت ریاضی این است که ذهن را از ظواهر مخصوص به آرامی جدا می‌کند و به سوی واقعیت می‌برد. ریاضیات حالتی ذهنی ایجاد می‌کند که با تسلسل منطقی از موضوع به موضوعی دیگر رسیدن است و از اعتقادواعتمادساده لوحانه بهتر است، اما ادراک مستقیم‌تر و خردمندانه‌تر هم ممکن است. افلاطون در کنار اعداد، صور را هم در نظر گرفت و ریاضیات را ترکیب هندسه و حساب دانست. در آکادمی هدف آموختن علوم پرورش عقل عملی مهارت قانون‌گذاری بود.

افلاطون فلسفه‌اش را سخت با ریاضیات آموخت. هندسه را دروازه‌ای برای درک منطق بسیط و راه یافتن به عقل کل می‌دانست و حساب از دیدگاه او نظریه‌ی نیمه راز ورزانه‌ی اعداد بود. این از آثار تفکرات فیثاغورس است که در افلاطون به جا مانده است. اولین رساله در باب مکانیک را نوشت. اختراع پیچ و مهره، قرقره و جغ‌جغه از افلاطون است. ائودوکسوس شاگرد افلاطون در فلسفه و شاگرد آرخوتاس دوست افلاطون در هندسه، نظریه‌ی اعداد گنگ را بسط داد. نظریه‌ی نسبت و اغلب قضایای کتاب پنجم اقلیدس را ثابت کرد. روش افناء را ابداع نمود که بعد از ارشمیدس آن را کامل نمود.

افلاطون پس از مرگ سقراط از آتن فرار کرد و برای کسب حکمت به مصر رفت و در ۳۹۵BC برگشت. در ۳۸۷BC دوباره سفر رفت و به بردگی گرفته شد و با ۳۰۰۰ دراخمایی که دوستانش برای آزاد کردنش فراهم کردند و صاحبش نپذیرفت، باغ آکادمی را خرید. آکادمی هم مانند مدرسه فیثاغورس یک انجمن اخوت مذهبی بود. قبل از افلاطون، زنون هم دیالوگ‌های فلسفی می‌نوشت. از دیدگاه افلاطون فلسفه علم مثل است و اشیاءریاضی در عالم مثل زندگی می‌کنند. وابدی هستند.

افلاطون هم مانند فیثاغورس به تناسخ اعتقادداشت و البته به بهشت جاودان هم. پدران او از اشراف بودند و لذا او هم با دموکراسی مخالف بود. می‌گفت اگر شاه یک نفر باشد اصلاحگر اجتماعی فقط لازم است یک نفر را قانع کند. افلاطون فلسفه را از طرفی با سیاست و از طرفی با اخلاق و از طرفی با ریاضیات پیوند داد. در اینجا با ریاضیات که شالوده تفکر فلسفی را تشکیل می‌داد، تأثیراتی بر اخلاق یا بر سیستم‌های سیاسی می‌گذاشت که باید تحت کنترل و بازرسی قرار می‌گرفت. افلاطون آغازگر این فکر بود که انتخاب ما در فلسفه‌ی ریاضی چه تبعاتی در شکل‌گیری تمدن خواهدداشت؟ افلاطون در جوانی شاعر و ورزشکار بود و این در شخصیت فلسفی او آشکار است!

تفکر فلسفی افلاطون و سرچشمه‌های اساس‌گرایی

افلاطون ایده‌ی مثل را مطرح کرد و بسط داد اما پیش از او مثال غار مثال معروفی بود. افلاطون اعتقاد داشت کسانی که استعداد طبیعی آموختن ریاضی را دارند، می‌توانند همه دانش‌ها را بیاموزند. در این تفکر، ریاضیات دور از دسترس همگان است و آثار تربیتی ریاضی بسیار مهمتر از کاربردهای آن است. سبک آموزشی افلاطون(برگرفته از سقراط) به درونی شدن علم کمک می‌کند. در نظر افلاطون اشیاء ریاضی دارای معانی معنوی و روحانی هستند آموزش آن‌ها موجب تربیت درست و حرکت به سوی کمال است. یادگیری ریاضیات سفر از ظلمت به نور است. آموزش ریاضیات موجب تلطیف روح است. اشیاء ریاضی فیزیکی و مادی نیستند بلکه مثلی و برزخی هستند. تنها اساسگرایی نوافلاطونیان با لایه‌های تجرید علم هماهنگی دارد. خود افلاطون ریاضیات را علمی با لایه‌های تجرید متفاوت نمی‌بیند.

تفکرات افلاطون سرچشمه‌ی فلسفه اساس‌گرایی در ریاضیات را تشکیل می‌دهد که در قرن بیستم منطق‌گرایان، صورتگرایان و شهودگرایان از همین مکتب فلسفی بلند شده‌اند. در تاریخ ریاضیات به خصوص پس از اقلیدس، اساس‌گرایی غالب بوده است به جز قرن بیستم که فلسفه‌های انسان گرا مطرح شده. بر خلاف فیزیک که تا قرن هفدهم انسان گرا بوده است و به خاطر ارتباط با ریاضی در قرن هفدهم اساس گرا شده.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات افلاطونی

از دیدگاه اساس‌گرایان، ریاضیات دارای اساس‌های محکم و استوار و مستقل از انسان‌ها ست. ریاضیات فوق انسانی، انتزاعی، ایده‌آل، خطا ناپذیر، ازلی، فناپذیر و جاودانه و کشف شدنی است. در مکتب فیثاغورس خداشناسی با ریاضیات پیوند می‌خورد و فلسفه‌ی اخلاقی و روحانی یونان را پدید می‌آورد که خود در شکل‌گیری ریاضیات نقش ایفا می‌کند. موجودات ریاضی بر طبق اساس‌گرایی، واقعی هستند و مستقل از ذهن ما عینیت خارجی دارند. آن‌ها متعلق به عالم ظاهر نیستند. بلکه متعلق به عالم مثل هستند. ریاضیات، همه زیبایی است. دیده‌های ریاضی را هم به صورت واحد می‌بینیم و هم کثیر. چون ادراک‌های حسی ما آن‌هایی هستند که با ضد خود درک می‌شوند(کثرت ضد و حدت) ، زیبایی ریاضی در همین جنبه‌های کثیر در برابر و حدت یافته، یا موضعی در برابر سرتاسری معنا پیدا می‌کند.

ریاضیات از دیدگاه افلاطون یکی از اصلی‌ترین هنرهاست، چرا که از سایر مراتب هنر مجردتر است. ساختار منطقی ریاضی نتیجه دیدگاه اساس گرا به ریاضیات است و توسط همان کسی بنیان‌گذاری شده که تحت تأثیر او ریاضیات به سمت اساس‌گرایی گرایش پیداکرده. اساس‌گرایی ریشه در تلاش‌های یونانیان برای بیرون کشدن فلسفه از دین و برای بیرون کشیدن ریاضیات از فلسفه دارد که ریاضیات را حکمت وسطی می‌نامد.

سرگذشت ارسطو

دغدغه‌های فکری ارسطو(۳۸۴-۳۲۲ق. م) فیزیک، اخترشناسی، هواشناسی، زیست‌شناسی، روان‌شناسی و روش‌شناسی علوم را شامل می‌شد. ارسطو شاگرد افلاطون و معلم اسکندر بود. پدر او پزشک خصوصی پدربزرگ اسکندر بود پس از مرگ اسکندر او را به بی‌دینی متهم کردند و او آتن را ترک گفت.

ارسطو تفکر اصل موضوعه‌ای را که شامل فرض‌ها، تعریف‌ها و اصول متعارفند جایگزین روش سقراطی نمود. در این روش علمی قضایا باید از اصول بنیادی نتیجه شوند. استفاده از ریاضیات برای شناخت طبیعت ایده‌ای است که اولین بار ارسطو بر آن تأکید کرد. او آزمودن اندیشه‌ها با روش‌های علمی سنجیده را برای فیزیک، اخترشناسی و زیست‌شناسی و سایر علوم روش علمی مناسبی دانست: این که اول پدیده‌ها را مشاهده کنیم، سپس نظریه برای تبیین آن‌ها بدهیم و آنگاه نظریه را به آزمایش بگذاریم.

ایده‌ی اتر به عنوان اثیر اولین بار توسط ارسطو مطرح شد. جهان او متناهی، کروی و زمین مرکز است. در فلسفه ارسطو بین روح و عقل تمایز قائل می شوند. عناصر چهارگانه‌ی او تا قرون وسطی باقی ماندند. ارسطو پسر پزشک. شاگرد فیلسوف بود و در مدت ۲۰ سال شاگردی افلاطون این دو شخصیت درون او می‌جنگیدند. وقتی ارسطو از کمک مالی اسکندر استفاده کرد و مدرسه‌ای در آتن ساخت با این موقعیت مالی توانست شاگردان طبقه‌ی متوسط را هم در مدرسه بپذیرد. در صورتی که آکادمی مخصوص فرزندان اشراف بود.

ارسطو پدر روش علمی است و اولین کسی است که تحقیقات دسته جمعی علمی را شروع کرده است. او در ریاضیات و فیزیک ضعیف‌تر از سایر علوم است و در این زمینه‌ها خود را به مطالعه‌ی اصول اولیه محدود می‌کند. ارسطو در مطالعه انسان به علت احترام به عقاید مردم یا به علت تقوی بیشتر به مسائل ماوراء الطبیعه می‌پردازد و انسان‌شناسی را با خداشناسی ارتباط می‌دهد. هم به اخلاق که علم سعادت فردی است می‌پردازد و هم به سیاست که علم سعادت جمعی است. آثار ارسطو پر از اشتباهات منطقی یا تئوریک است، اما بنایی که از فلسفه بنا می‌کند از باشکوه ترین‌ها در دنیای باستان است. فلسفه نزد او شمایی دایره المعارف گونه دارد که به همه چیز مربوط می‌شود و در بسیاری از شاخه‌ها تأثیری تعیین کننده دارد. دیدگاه ارسطو به علم و به ریاضیات به جنبه‌های انسانی تأکید می‌کند. در آموزش، تحقیق و ارتباط علمی بین دانشمندان، ساختار انسانی چه تأثیری در ساختار علم، گسترش آن و انتقال آن دارد؟ دیدگاه ارسطو بیشتر به روانشناسی ریاضیات مرتبط است و آثار متقابل فعالیت ریاضی و شخصیت انسانی را بررسی می‌کند که نقطه مقابل نظریات افلاطون است که تأثیرات جمعی آن و هدایت‌گری تمدن را مورد تأکید قرار می‌دهد. تقابل بین دیدگاه‌های افلاطون و ارسطو در دو ستون موازی تا به امروز در فلسفه دیده می‌شود.

تفکر فلسفی ارسطو و سرچشمه‌های انسان‌گرایی

ارسطو سرآغاز علم را حس و تجربه می‌دانست و افلاطون تفکر ناب. به عقیده ارسطو، شروع آموزش هر ایده یا مفهوم باید از دنیای طبیعی و به وسیله حس و تجربه انجام گیرد. ریاضیات فعالیتی بشری است و لذا آموزش پذیر. در آموزش ریاضی باید به پشت‌صحنه هم توجه کرد. ریاضیات به تعاریف، اصول موضوع، قضیه و اثبات خلاصه نمی‌شود.

انسان‌گرایی ارسطویی ریشه در ساختار منطق ارسطویی دارد که از طرفی در همسایگی ریاضی است و از طرفی باتفکر روزمره و خطاهای معمول در آن سروکار دارد. گرایش به اینکه منطق ارسطویی جزیی از ریاضی انگاشته شود، منجر به دیدگاه انسان‌گرایانه به ریاضی شده است. تعریف، اصل موضوع و استنتاج به مفهوم امروزی در منطق ارسطویی می‌آید. ارسطو تعریف را یک کشف می‌دانست، نه اختراع. چرا که آن را مطابق با واقعیت می‌دانست. برای ارسطو اصل موضوعه می‌توانست درست یا غلط باشد چون برای آن معنی قائل می‌شد. او اصل موضوع را به معنی نرمال آن به کار نمی‌برد. بحث اودر مورد استنتاج، معمولاً روزمره است. یک مثال مجرد این است که «آیا خطوط موازی وجود دارند؟ » مفهوم توازی به مفهوم بی‌نهایت ربط دارد و با فلسفه‌ی فیزیکی و واقع‌گرایی ارسطو مطابق نیست. واقع‌گرایی منطق ارسطویی و فرار از تجرید ریشه در انسان‌گرایی فلسفه‌ی او دارد.

منطق ارسطویی شدیداً بر منطق اسلامی تأثیرگذار بوده و ریشه‌های انسان‌گرایانه آن در منطق اسلامی اثر خودرا به جای گذاشته است. یک سؤال جالب چگونگی منطقی افلاطونی است که به مسائل منطق اسلامی بپردازد. مثلاًمنطق افلاطونی درباره‌ی شک و یقین و چیستی آن‌ها چه می‌گوید؟

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات ارسطویی

از دیدگاه ارسطو ریاضیات فعالیتی بشری است که به کلیات معلوم که توسط عقل ادراک می‌شود تعلق می‌گیرد. ارسطو جدایی کلیات از محسوسات را تنها در ذهن قائل است نه در خارج. ذهن از اشیاء و محسوسات یک صورت مجرد می‌سازد که ساخته خود اوست. تجربه‌ی ریاضی خطا پذیر، اصلاح پذیر و با معنی است.

صحنه‌ی تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات نیز خطا پذیر است. ریاضیات به وسیله نقدگرایی و اصلاح نظریه‌ها رشد می‌کند. ریاضیات از یک مسأله یا حدس علمی شروع می‌شود و نیازمند جستجو برای اثبات یا مثال‌های نقض است. یک حدس علمی مناسب بسیاری از چیزها را تبیین می‌کند. هر گام از اثبات موضوعی برای نقادی است. ریاضیات غیر رسمی(که پنهان می‌شود) در فرایند رشد و کشف انجام می‌شود. ریاضیات به وسیله‌ی نقادی موفقیت آمیز و تظریف نظریه‌ها و معرفی ایده‌های جدید و رقابت نظریه‌ها رشد می‌کند، نه به وسیله یا الگوی استنتاجی. اثبات و ابطال منطق کشف ریاضی است.

انسان‌گرایی به ارتباط ذهن و زبان، اندیشه و فرمالیسم توجه دارد و اساس‌گرایی به ارتباط عقل و مثل، قوانین وجود و قوانین ذهن توجه دارد. انسان‌گرایی ارسطویی و اساس‌گرایی افلاطونی در انسان‌شناسی اسلامی پیوند می‌خورند.

کتاب «اصول» اقلیدس و گرایش‌های فلسفی مستتر در آن

اقلیدس که در ۲۹۵ق. م و فات یافت، در اسکندریه تدریس می‌کرد و شاگردان افلاطون را به شاگردان ارشمیدس وصل می‌کرده است. او بنیان‌گذار مدرسه‌ی بزرگ ریاضیات اسکندریه بود. پیش از او نیز کتاب‌های «اصول» نوشته شده بود، اما کتاب او از همه کامل‌تر بود. معیارهای نوینی برای دقت وارد استدلال ریاضی کرد. او گامی قطعی در هندسی کردن ریاضیات برداشت و صورت استدلال هندسی را بر همه ریاضیات تحمیل کرد. این روش بر پرینسیپای نیوتن و نقد خرد محض کانت و اخلاق اسپینوزا تأثیر گذاشت و به مدت ۲۰۰۰ سال هسته‌ی ریاضیات محض را تشکیل می‌داد. اقلیدس چندین کتاب درسی دیگر هم نوشته که فقط بعضی به جای مانده است. این کتاب‌ها در زمینه‌های هندسه نورشناسی، اخترشناسی، موسیقی و مکانیک است. حتی تا قرن گذشته در بسیاری از دانشگاه‌های اروپا کتاب اصول اقلیدس تدریس می‌شد. کتاب گمشده‌ی اقلیدس در باب مقاطع مخروطی، خلاصه مطالعات منایخموس، آریستایوس و دیگران در رشته‌ی مخروطات است. کشفیات اقلیدس نظریه پرتابه‌ها را پیش راند و مکانیک، دریا نوردی و نجوم را ترقی داد. اقلیدس شخصیتی دایره المعارفی داشت و تسلط او بر شاخه‌های مختلف ریاضی نقش تعیین کننده‌ای در فرهنگ ریاضی و جهت‌گیری ریاضی ایفا کرد: اینکه مرکزیت فرماندهی یک علم ساختار اجتماعی توسعه‌ی علم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از کتاب‌های دیگر اقلیدس می‌توان به Optics، Data، Division of figures، و phaenomena اشاره نمود.

کتاب «اصول» در هندسه به جبر هندسی می‌پردازد و سپس نظریه اعداد فیثاغورسی را مطرح می‌کند و به اعداد رادیکالی مانند $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ می‌پردازد. یکی از مشخصه‌های این کتاب اقتصاد و ناخن خشکی در ارائه‌ی علم است. این کتاب بسیار فشرده است و تلاش برای انتخاب بهترین اصل موضوعه‌ها در همین جهت صورت گرفته است. برای مثال به تعریف توازی و وجود دو خط موازی که از اصول(اصل پنجم +دو اصل پنهان دیگر) قابل اثباتند، توجه کنید از یادگارهای این کتاب لفظ parabola است که ریشه در parabole به معنی کاربرد در یونانی دارد. para: alongside و bole: throw. لفظ parable به معنی داستانی با کاربرد(اخلاقی) آمده است. همچنین elleipsis به معنی حذف کلماتی که بدون ادا شدن مشخصند و hyperbole به معنی تأ کید زیاده از حد بر کاربرد نیز یادگر این کتابند.

در یونان باستان به جز روش استدلال اقلیدس «روش تقسیم ناپذیرها » نیز به طور غیررسمی به کار برده می‌شد که البته برای کشف قضایا و اثبات‌های شهودی که به آن خواهیم پرداخت به کار برده می‌شد. وجود چنین روش‌هایی توسط ریاضی‌دانان قرن حاضر معمولاً پنهان می‌شود. هرچه به عقب می‌رویم این پنهان‌سازی کمرنگ‌تر می‌گردد.

محتویات «اصول»به هیچ وجه تمام ریاضیات یونان را شامل نمی‌شود، بلکه هسته‌ی اصلی آن را دربر می‌گیرد. مشابه مدرن کتاب «اصول» دائره المعارف‌های بدون اثبات روسی است. چندین شرح اصول در مکتب اسلامی و کتب مدرن «اصول»مانند اصول کواترنیون‌های هامیلتون تحت تأثیر و با سبک این کتاب نوشته شده‌اند. در تمدن اسلامی کتاب‌هایی با سبک‌هایی بسیار متفاوت هم ظاهر شدند: برای نمونه «روش‌های حل مسائل ترسیم‌های هندسی» نوشته سجزی سبک متفاوتی دارد که روند حل مسئله را پیش از برهان مورد بررسی قرار می‌دهد، که به آن خواهیم پرداخت.

ریاضی‌دانان متأخر در دوران شکوفایی تمدن یونان

اشتغالات علمی ارشمیدس(۲۸۷-۲۱۲ق. م) ریاضیات و مکانیک بود. ارشمیدس اهل سیراکوز بود. از اسکندریه دیدن کرد و نزد جانشینان اقلیدس تعلیم گرفت. شهرت او بر پایه اختراع ابزارهایی مکانیکی مانند حلزون آبی، قرقره مرکب، ساعت‌های آبی، و بر پایه تحقیقات ریاضی او مانند قضایای مربوط به سطح و حجم شکل‌ها، مارپیچ‌ها، تربیع سهمی، روش افناء، بی‌نهایت کوچک‌ها، و برپایه مسائل ریاضی-فیزیک مانند تعادل در هندسه، اجسام شناور، جرم حجمی، روش قضایای مکانیکی و قانون اهرم بود.

کارهای علمی ارشمیدس بر تحقیقات مسلمانان بسیار تاثیرگذار بود. شخصیت ارشمیدس به عنوان یک نابغه بسیار شبیه لئوناردو داوینچی است. ارشمیدس مانند افلاطون اعتقاد داشت قوانینی که بر حرکت ستارگان حاکمند از خود ستارگان زیباترند. موفقیت‌های ریاضی ارشمیدس را با نیوتن مقایسه می‌کنند.

پیش از ارشمیدس آریستارخوس رساله‌ای در باب ابعاد و فواصل خورشید و ماه نوشت. ارشمیدس نظریه خورشید مرکزی را به او نسبت می‌دهد. همچنین هیپارخوس برای محاسبات نجومی مثلثات را کشف کرد. فاصله ماه تا زمین را ۴۰۰/۰۰۰ کیلومتر تخمین زد که ۵ درصد خطا دارد.

هیپار خوس زمین مرکزی را بر خورشید مرکزی ترجیح داد اما برای او اصلا متصور نبود که مدار زمین بیضی باشد! شاید بتوان نجوم بطلمیوسی را نجوم هیپارخوسی نامید.

پس از ارشمیدس، اراتستن رساله‌ای درباره روش فنی پیدا کردن و اسطه هندسی بین دو خط مستقیم نوشت. میل کلی دایره البروج را به ۲۳ درجه و ۵۱ دقیقه تخمین زد که کمتر از یک صدم اشتباه است. محیط زمین را ۳۹/۶۸۰ کیلومتر برآورد کرد که امروز ۴۰/۰۰۰ کیلومتر حساب می‌کنند. از آپولونیوس نیز کتاب‌هایی به جا مانده که به سبک‌های جدیدتر بازنویسی شده و از لحاظ تاریخی ارزش کمی دارد. هیچ متن دیگری در مورد مقاطع مخروطی به جا نمانده است. قبل از او ارشمیدس و دیگران به مطالعه مقاطع مخروطی علاقه‌مند بودند. او را پس از مرگش «هندسه دان بزرگ» می‌نامیدند. مسلمانان به تحقیقات او مانند ارشمیدس اهمیت می‌دادند. مفهوم مکان هندسی در کارهای آپولونیوس وارد شده است.

ارشمیدس به توانایی‌های ذهن جوان ایمان داشت. چرا که پیش زمینه‌های علمی ذهن را محدود می‌کند و جوانان چنین محدودیتی ندارند. کتاب‌های ارشمیدس بسیار متنوع هستند: درباره تعادل صفحه‌های I و II، تقسیم سهمی به چهار قسمت، کره و استوانه، مارپیچ‌ها، مخروط گون‌ها و کره گون‌ها، اجسام شناور، اندازه‌گیری دایره، روش The metal، شمارش سنگریزه‌ها «Sand reckoner» از کتاب‌های گم شده او می‌توان به کتب زیر اشاره کرد: درباره‌ی تعادل، نور، احجام افلاطونی، تقویم، نمایش مکانیکی اجرام آسمانی.

شمارش سنگریزه‌ها Sand reckoner روشی برای نمایش اعداد بزرگ ارائه می‌کرد. ایده محدود کردن π بین دو عدد گویا، اولین بار توسط ارشمیدس داده شد. اطلاعات فرهنگی و اجتماعی مربوط به جامعه علمی، در کتاب‌های ارشمیدس دیده می‌شود. او در کتاب‌های خود اشاره به مرگ دوست علمی خود Connon و کارهای علمی او می‌نماید. ارشمیدس باور داشت Connon می‌توانست مارپیچ‌ها را بشناسد. نظریه‌ی مارپیچ‌ها در تقسیم زاویه و رسم خط راستی به طول محیط دایره کارآمد بود. رسم مماس بر مارپیچ معادل تربیع دایره است.

علوم ریاضی در یونان باستان

مکانیک در یونان باستان شاخه‌ای از ریاضیات محسوب می‌شد. ارشمیدس اصول اهرم و اشیاء شناور را پایه ریزی کرد. البته اهرم توسط ارسطو هم بررسی شده بود. ارسطو کلمه‌ی فیزیک physics را که در physikos: natural , inborn ریشه دارد به کار برد. ارسطو هل دادن، کشیدن، حمل کردن و دوران دادن را حرکت‌ها یی اصلی می‌دانست که دیگر حرکت‌ها بر اساس آن‌ها قابل نمایش بود.

Kinematic را ریشه در to be moved: kinymai دارد به کار بردولفظ dynamic را که ریشه در power: dynamis داشت. مفهوم سرعت لحظه‌ای را بسیار شهودی درک کرده بود. برایmechanic که ریشه در machine: mechane نقشی بر عکس فیزیک قائل شد: وسایلی که تأثیری بر خلاف طبیعت می‌گذارند. اهرم را به حرکت دورانی دایره و اینکه نقاط دورتر از مرکز وسیع‌تر حرکت می‌کنند مربوط ساخت. همچنین آن را به مفهوم شهودی انحنا مربوط نمود. نیروی گریز از مرکز و جمع متوازی الاضلاعی بردارهای نیرورا نیز ارسطو مطرح می‌کند.

ارشمیدس در مورد اهرم، تفکر اصل موضوعه‌ای دارد و از مفهوم مرکز ثقل برای استدلال کمک می‌گیرد. او طول‌های با نسبت گویا را در نظر می‌گیرد و سپس برای طول‌های دل‌خواه استدلال می‌آورد. او از نوعی قضیه‌ی مقدار میانی کمک می‌گیرد. در مورد اشیاء شناور هم اصل موضوعه‌ای برخورد می‌کند.

هرون اسکندرانی اولین ماشین بخار، فرمول مساحت مثلث و اهرم کج را مورد بررسی قرار داد که در محاسبات او در آن مشکلاتی وجود دارد. او به نورشناسی نیز علاقه‌مند بود. نورشناسی در مطالعه بینایی ریشه داشت. اقلیدس کتابی دارد «optics»که آن هم اصل موضوعه‌ای است و در آن مطالعه مقاطع مخروطی از مطالعه چشمی که به

دایره نظر می‌کند هم نتیجه شده است. هرون اسکندرانی این که نور کوتاه‌ترین مسیر را می‌پیماید و لذا زاویه تابش و بازتابش برابر است را بنابر اصل ارسطو که طبیعت کار بیهوده نمی‌کند استوار کرد.

بطلمیوس ایده شکست نور را مطرح کرد و جداولی برای آن ارائه کرد. او پیشرفته‌ترین تئوری نجومی بعد از نجوم بابلی را ارائه کرد. نجوم بابلی نجومی عددی بود که از شمارش اعداد روزها به دست می‌آمد. نجوم یونانی بر مبنای محاسبه استوار بود، نه برهم‌نهی جداول و نمودارها. هیپارخوس، آپولونیوس و بطلمیوس که هندسه را وارد نجوم کرد، مهمترین منجمین یونان باستان محسوب می‌شوند. به خصوص بطلمیوس که مثلثات را وارد نجوم کرد: trigonometry به معنای triangle measurement. او جداول مثلثاتی را تشکیل می‌دهد؛ البته برای زوایایی که با خط کش و پرگار قابل رسم هستند زاویه ۱ درجه بین آن‌ها نیست که بعدها توسط کاشانی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. کتاب المجسطی megistos بزرگترین اثر بطلمیوس است که تاکنون باقی مانده و تا قرن ۱۷ مهمترین کتاب نجوم محسوب می‌شد. یونانیان سعی کردند هندسه و تفکر هندسی را وارد اپتیک، مکانیک و نجوم نمایند. دانشمندان تمدن لاتین به قدرت در هندسه مشهورند، در برابر دانشمندان تمدن اسلامی که در جبر گوی سبقت را ربودند.

فصل ۳

انسان‌شناسی اسلامی و ریاضیات اسلامی

در اسلام علم به معنی شناخت حقیقت در تمامی درجات هستی است و اختلاف نظر فلاسفه در چگونگی حصول نتیجه بعد از درک مقدمات است. همچنین، علم مهار شده به توحید است و شناخت با توجه به ارتباط بین درجات هستی شکل می‌پذیرد. پیشرفت علم ریشه در شناخت‌شناسی و آن ریشه در انسان‌شناسی دارد. فیلسوفان مسلمان شناخت‌شناسی یکسانی نداشتند.

معتزله باور داشتند تولد مسبب از سبب به و اسطه انجام می‌شود و فعل صاحب نظر است و ضروری است. و فعل خداوند است. اسماعیلیه ایمان داشتند که شناخت خداوند بدون امام معصوم محال است و شناخت وابسته به امام است. سر رکود شناخت نزد اهل سنت، ظاهرگرایی و قبیح دانستن تدبیر در مسائل علمی است.

شناخت‌شناسی متکلمان سنی آنان را از تعقل باز می‌داشت. معتزله با استدلال عقلی به این نتیجه می‌رسیدند که شناخت برای دفع ضرر محتمل است و به وجوب شناخت فقهی اعتقاد داشتند. اینکه معرف خداوند از نوع ضروری است وگرنه انسان مکلف نیست. در برابر شناخت‌شناسی شیعیان ۱۲ امامی منجر به پیوند شناخت‌شناسی و هستی‌شناسی شناخت رشد که در قلمرو فلسفه است. این منجر به رشد فلسفه اسلامی و رکود علوم تجربی شد. رکود فلسفه اسلامی در نهایت به دلیل ترکیب مبانی آن به فقه و غیر آن است.

اوج شکوفایی فلسفه اسلامی در زمان ابن‌سینا اتفاق افتاد. ابن‌سینا، فیلسوف و دانشمند بود. پس از فلسفه او باتوسعه علمی هماهنگی دارد و فلسفه‌ی ابن‌سینا عقل‌گرا است و بر این پایه استوار شده که شناخت جوهر، جوهر شناخت است. و شناخت مبدأ، مبدأ شناخت است. ابن‌سینا فیلسوف وجود و پدر هستی‌شناسی قرون وسطایی است. شاگرد غیر مستقیم او Thomas Aquinasمنجر به خانه‌تکانی دیدگاه‌های فلسفی در قرون وسطی شده است.

سرچشمه‌های علم اسلامی ریشه در تربیت عقلانی و معنوی دانشمندان اسلامی دارد. در علوم تجربی، روش ارسطویی برای شناخت در دست مسلمانان تبدیل شد به طبقه بندی با کمک تمام ابعاد حقیقت و در علوم ریاضی، روش افلاطونی برای شناخت تبدیل شد به تجرید عوالم، عقل‌گرایی و شناخت باطن. قائل شدن به لایه‌های تجرید هستی در انسان‌شناسی اسلامی محملی شد برای به هم پیوستن اساس‌گرایی افلاطونی و انسان‌گرایی ارسطویی و شکوفایی علوم مدرن. از دیدگاه ریاضیات اسلامی، قانون اهرم ارشمیدس، به هم پیوستن هندسه و فیزیک، ملموس و مجرد، بدن و روح، ظاهر و باطن به یکدیگر است. از دیدگاه ریاضیات اسلامی، ریاضیات باطن علوم تجربی و علوم تجربی از تجلیات تفکر ریاضی هستند.

حرکت تفکر ریاضی از یونان به ایران

سیل جریان تفکر ریاضی از یونان به ایران سال‌ها قبل از حمله مسلمانان، پس از حمله اسکندر و کشور گشایی او و در زمان حکومت سلوکیان اتفاق افتاد. البته این مصادف با آغاز شکوفایی علوم در یونان بود. از وضعیت علوم در ایران در دوره‌ی هزار ساله‌ی قبل از اسلام اطلاعی در دست نیست. در هر حال پس از حمله مسلمانان علوم تولید شده در سال‌های طلایی علم در یونان به ممالک اسلامی سرازیر می‌شود. از لحاظ علمی سرزمین‌های امپراطوری ایران قدیم مرکزیت داشتند تا اینکه سال‌های شکوفایی تمدن اسلامی در اسپانیا فرا رسید.

در فلسفه افلاطون و ارسطو، در ریاضیات ارشمیدس، آپولونیوس و اقلیدس بیش از همه تأثیرگذار بودند. در نجوم بطلمیوس تأثیرگذار بود. امپراطوری روم و علومی که در این دوران تولید شده بودند نیز بر جنبش علمی مسلمانان تأثیر گذاشتند. در ریاضیات، دیوفانتوس و پاپوس اشخاص تأثیرگذاری بودند. ابزار حرکت علم از یونان و روم به ایران، نهضت ترجمه به زبان عربی، زبان علمی مسلمانان بود. مسلمانان آثار فلسفی و علمی یونان و روم را ترجمه و بازنویسی می‌کردند و فرمول بندی جدیدی از این افکار که هماهنگ به جهان بینی و انسان‌شناسی آنان باشد ارائه می‌کردند. افلاطون و ارسطوی ایرانیان با افلاطون و ارسطوی واقعی تمایز داشتند. مترجمان از ۷۵۰ تا ۹۰۰میلادی کتاب‌هایی را از سریانی، یونانی، پهلوی و سانسکریت ترجمه کردند.

مبادی علم جبر در مؤلفات دیوفانتوس یونانی در قرن سوم میلاد بنیان‌گذاری شد. اما نام آن از مسلمین است که حل مشکلات آن را به آخر رسانیدند. مسلمانان هندسه اقلیدسی را به کمال رسانیدند و هندسه کروی را هم به آن افزودند و تلاش‌هایی در اثبات اصل پنجم اقلیدس نمودند که در تاریخ ریاضیات نقش مهمی ایفا نمود. مسلمانان به منطق ارسطویی علاقه پیدا کردند و ابزار لازم را برای تفکر را به دست می‌آوردند و فلسفه‌ی کندی، فارابی، ابن‌سینا و ابن رشد پدید آمد.

معتزله که به تأویل اعتقاد داشتند و عقل‌گرا بودند، قرآن را ازلی نمی‌دانستند. معتزله و شیعه در حرکت عقل‌گرایی اسلامی نقش مهمی را به عهده داشتند. ایده‌ی تأویل یک ایده‌ی یونانی–یهودی است که وارد سنت نقد متون اسلامی گردید. نجوم بطلمیوسی در بین مسلمانان کمال پیدا کرد. تقویم جلالی از دقیق‌ترین تقویم‌هاست که توسط عمر خیام پایه ریزی شد. بسیاری از پدیده‌های طبیعی خرد و کلان توجیه علمی پیدا کردند. تفکر تحلیلی و فرار از معناگرایی غیر لازم در مسائل علمی، عمده برداشت‌های مسلمانان از علم یونانی را تشکیل می‌دهد. مسلمانان از یونانیان تفکر علمی را آموختند.

حرکت تفکر ریاضی از هند به ایران

مسلمانان در ۷۷۳م رساله‌ی«سند هند» در علم هیئت را که تاریخ تألیف آن ۴۲۵ق. م بود، ترجمه کردند. شاید ارقام هندی توسط این ترجمه‌ها به عالم اسلام راه یافته باشد. خوارزمی در ۸۱۳ میلادی ارقام هندی را در جداول خود به کار برد، اما از زمان ساسانیان ارقام هندی در ایران رواج داشته است. مسلمانان مدارس معتبر مسیحی، صابئی و زرتشتی را در اسکندریه، بیروت، انطاکیه، حرّان، نصیبین و جندیشاپور باقی گذاشتند و مزاحم آن‌ها نشدند. فلسفه‌ی هندی در کنار فلسفه‌های دیگر در علم و فلسفه‌ی مسلمانان تأثیر گذاشتند. حتی کسانی را به قسطنطنیه و دیگر شهرهای هلنیستی و یا نزد امپراطوران روم شرقی فرستادند تا کتاب‌هایی به خصوص در طب و ریاضیات را وارد و ترجمه کنند. «روش‌های جبر» خوارزمی تحت تأثیر جبر یونانی و جبر هندی بوده اما همزمان هر دو بسیار پیشرفته‌تر از روش‌های خوارزمی هستند. البته روش‌های حل معادلات درجه دوی خوارزمی بسیار شبیه به روش‌های کلامی هندی است تا روش‌های فرمال یونانی که در زمان دیوفانتوس جاری بود. شاید بتوان گفت تأثیر اصلی بر کار خوارزمی از جبر هندی بوده است. بعضی از تخمین‌های خوارزمی برای π در منابع هندی هم آمده است. خوارزمی از جداول نجوم ایرانی هم استفاده کرده بود. بعضی هم اعتقاد دارند سنت ایرانی—سریانی بر جبر خوارزمی تأثیرگذار بوده است. او بسیار کاربردی فکر می‌کرد و مکتب او در واقع در تقابل با مکتب یونانی حجاج ابن یوسف همکار او در بغداد بود.

کتاب‌های Aryabhata، Brahmagupta و . . . . در میان دیگر کتب هندی ترجمه شدند و در نظامیه بغداد دانشمندان هندی هم دعوت شده بودند. فلسفه هندی در صوفی‌گری و عرفان ایرانی تاثیر گذاشت، که البته عرفان ایرانی و هندی هزاران سال در ارتباط بودند. هر چند تصوف چادری بود که زیر آن چندین فرقه که جایگاه اجتماعی محکمی نداشتند، پنهان شده بودند، اما می‌توان خطوط کلی این حرکت فکری را مشخص نمود و تاثیر آن را بر رشد یا رکود فکر در ایران بررسی نمود. رامانوجان ریاضیدان هندی معاصر آنچنان که در خاطراتش بیان کرده، در سفر خود به انگلستان از مسیر تاریخ جبر عبور کرده است و جغرافیای تاریخی آن را پشت سر گذاشته است.

تفکر هندسی برعکس از تمدن لاتین سرچشمه گرفته و به سوی شرق سرازیر شده است. این دوجریان تفکر در ایران به هم می‌رسند و ریاضیدانانی می‌سازند که هم در شهود هندسی قوی هستند و هم در فرمالیسم جبری. همرسی این دو جریان شخصیت‌هایی چون عمر خیام را می‌سازند که مقدمات ریاضیات مختصاتی و هندسه جبری را فراهم می‌کنند.

سنت حل معادله در ریاضیات اسلامی

نوشتن کتاب‌های«جبر و مقابله» در میان ریاضیدانان اسلامی سنت بوده است. خوارزمی، خیام، و بسیاری دیگر چنین کتاب‌هایی داشته‌اند که در میان آن‌ها کتاب خوارزمی از همه معروف‌تر است. معادلاتی که در مسائل ارث، بازرگانی، تسهیم، اعتراضات قانونی مطرح می‌شوند و سایر کاربردهای روزمره‌ی ریاضیات مثل اندازه‌گیری زمین، حفر کانال و محاسبات هندسی مورد توجه خوارزمی بوده.

خوارزمی معادلات درجه دوم را رده بندی و حل می‌نماید. البته فقط جواب‌های مثبت را در نظر می‌گیرد. او پس از تشکیل مربع و حل عددی بایک شکل هندسی نمایش می‌دهد که چطور مسئله جواب پیداکرده. بعضی راه حل‌های او از اقلیدس پیچیده‌تر است. لذا لزوما اصول اقلیدس منبع او نبوده است. خوارزمی رساله‌ای هم در مورد اعداد هندی نوشته است.

ثابت‌ابن قره کتابی به نام «در مورد آزمایش هندسی حل معادلات جبری درجه ۲» دارد. او تفکر هندسی داشت و جبر و مقابله‌ای‌ها را جبری‌ها می‌خواند که منجر به نام جبر شد. سبک ثابت‌ابن‌قره و حجاج ابن یوسف یونانی بود که در برابر سبک ایرانی– هندی خوارزمی قرار داشت. ثابت در نظریه اعداد تفکر مجرد داشت و فرمول اعداد کامل را قبل از فرما و دکارت به‌دست آورد.

سنت حل معادله‌ی خیام کاملا هندسی بود. او جبر را حل معادلات عددی یا هندسی می‌دانست. بین نسبت و عدد فرق می‌گذاشت. برای طول، سطح، حجم و زمان اندازه قائل می‌شد. او ابتدا معادلات درجه دو را به روش اقلیدس حل می‌کند و سپس نشان می‌دهد که معادلات درجه سه توسط مقاطع مخروطی حل شدنی هستند. تمام جملات جبری در نوشته‌های او تعبیر هندسی هم دارند. او در پایان ماخذهایی هم به سبک مدرن معرفی می‌کند. کتاب خیام «جبر» نام دارد. او تعریف اقلیدس از نسبت را مشکل دار می‌داند و ایرادهایی فلسفی به آن وارد می‌کند و خود مفهومی از نسبت تعریف می‌کند او نیز مانند یونانیان به دنبال یک نظام منطقی بدون ایراد است.

خوارزمی برای ریشه معادله‌ی درجه ۲ کلمه‌ی ریشه و یونانیان کلمه ضلع را به کار می‌بردند. این اختلاف در تفکر جبری– حسابی خوارزمی و تفکر هندسی یونانیان ریشه دارد. نکته دیگر این که عملاً معادلات درجه ۲ به بالا در کاربرد روزمره عهد باستان ظاهر نمی‌شوند، چه در جبر و چه در هندسه، فقط مسائل پیچیده‌ی ارث را می‌توان دلیل علاقه مسلمانان به جبر مجرد دانست! از ثابت‌ابن‌قره هم نوشته‌هایی فلسفی در مورد طبیعت، عدد و هندسه باقی مانده که سعی می‌کرده بی‌نهایت را ملموس نماید. عمر خیام در حل معادلات درجه ۳ به روش هندسی دیمانسیون ضرایب را در نظر می‌گیرد که هنوز هم آن معادله‌ی جبری به درجه تجرید امروزی نیست. سنت آزمایش درستی اعمال در کتاب‌های حساب هندی که توسط مسلمانان تالیف شده، فراوان دیده می‌شود.

سنت هندسه‌ی مسطحه در ریاضیات اسلامی خوارزمی برای عدد π سه فرمول را به کار می‌برد. یکی از آن‌ها $3\frac{1}{7}$ که متعلق به ارشمیدس است. این که $3\frac{1}{7}\rangle\pi\langle 3\frac{10}{71}$ در کتاب « متریکا »ی هرون اسکندرانی هم آمده است. دیگری $\sqrt{10}$ که از کتاب Brahmagupta گرفته شده و سومی $\frac{62832}{20000}$ که تقریبا معادل ۳/۱۴۱۶ است که در کتاب‌های نجومی Aryabhata پیدا شده. البته در منابع چینی قرن سوم پس از میلاد هم این تخمین دیده شده، اما ممکن است مربوط به آپولونیوس باشد. مطالب خوارزمی بسیار شبیه کتاب

ha- Middot Mishnat عبری است که یا از روی هم کپی شده‌اند یا منبع مشترکی داشته‌اند.

ابن هیثم، خیام، خواجه نصیرالدین طوسی در مورد اصل پنجم اقلیدس فکر کردند و اثبات‌هایی ناقص ارائه دادند. نجوم در هندسه اسلامی بسیار تحت تاثیر کتاب المجسطی بطلمیوس و مسائل نجومی بوده است. قضیه اصلی مورد توجه بطلمیوس منالوئوس کروی است که در رشد مثلثات کروی بسیار نقش داشته است. فارابی، ثابت‌ابن‌قره، ابوعلی‌سینا و دیگران در این مورد رسالاتی دارند. هندسه دانان اسلامی روش‌هایی تقریبی برای تثلیث را به کار می‌بردند. بیرونی در قانونی سعودی ۱۲ روش تقریبی برای تثلیث ذکر کرده است.

در هندسه اسلامی سنت شرح نویسی بسیار رواج داشته است و نمونه‌ی آن کتاب‌های «شرح اصول» است. سیستم ارجاعات مفصلی نیز در کتب هندسه اسلامی دیده می‌شود. سنت نوشتن کتاب‌های متوسطات یعنی کتب بعد از اصول اقلیدس و قبل از مجسطی بطلمیوسی بسیار موجب پیشرفت هندسه شده است. استاندارد استدلال در هندسه به کمال استاندارد یونانی بوده؛ هرچند که در علم حساب تحت تأثیر حساب هندی استاندارد استدلال پایین بود. خیام هندسه را وسیله‌ای برای تیز کردن فکر می‌دانست. آموزش هندسه هنوز هم از این لحاظ اهمیت دارد. البته تأثیرات تفکر یونانی در خیام قوی بوده و خوارزمی بسیار جبری مسلک بوده و به هندسه این چنین اهمیت نمی‌داد.

سنت جغرافیا در ریاضیات انسانی

خوارزمی کتابی در جغرافیا دارد که طول و عرض جغرافیایی بسیاری شهرها و اماکن در آن آمده است. این کتاب یک بازنویسی کتاب جغرافیایی بطلمیوس است. احتمالاًعده‌ای زیر نظر خوارزمی مسئول تهیه‌ی نقشه‌ای برای جهان اسلام شده بودند.

بیرونی از بزرگترین جغرافی دانان اسلامی است. «التحقیق ماللهند» از مهمترین کتاب‌های اوست. در بی‌طرفی علمی شخصیتی فوق العاده داشت. در جهان اسلام اورا بلندتر از لایبنیتز و لئوناردو داوینچی دانسته‌اند. او به جاذبه زمین اعتقاد داشت و در کروی بودن زمین تردید داشت. گفته است که داده‌های نجومی را مطابق با این فرض که زمین هر روز یک بار دور خود و هرسال یک بار حول خورشید می‌چرخد، به همان سهولت می‌توان توضیح داد که عکس آن را فرض کنیم. بیرونی به جغرافیای سیاسی و اجتماعی و هم جغرافیای زمین‌شناسی توجه داشت.

ابن‌سینا نیز به مسائل علمی علاقه داشت؛ مثلاً ابزاری نظیر ورنیه‌ی کنونی ابداع کرد. ابن‌سینا در مورد زمین‌شناسی نظراتی دارد که با ابوریحان قابل مقایسه است. نظراتی راجع به تشکیل کوه‌ها و سنگواره‌ها. محاسبات قبله با کمک طول و عرض جغرافیایی و محاسبات اوقات اذان بسیار بر رشد جغرافیا و هندسه کروی تأثیر گذار بوده است. اسطرلاب مسلمانان تا قرن هفدهم توسط دریانوردان مورد استفاده قرار می‌گرفت. مسلمانان اعتقاد داشتند فلزات از جنس و احدی هستند و لذا به هم قابل تبدیلند و این پایه کیمیا و علم شیمی را در میان آن‌ها به وجود آورد. امروزه می‌دانیم که تصور مسلمانان از لحاظ فلسفی درست بوده و ذرات بنیادی مؤید آن هستند.

سنت نجوم در ریاضیات اسلامی

خوارزمی با سنت نجوم یهودی آشنابود چرا که رساله‌ای در مورد آن نوشته است که در آن دوره‌ی ۱۹ ساله‌ی تقویم را تشریح می‌کند که ماه Tishri در چه روزی از هفته شروع می‌شود. جداول نجومی که از خوارزمی به‌جا مانده به زبان لاتین هستند و با نسخه‌ی اصلی بسیار تفاوت دارند. مبدأزمانی جداول خوارزمی با مبدأ ترجمه لاتینی فرق داشته است. همچنین جداول سینوسی خوارزمی بر پایه شعاع R=۱۵۰ بوده، ولی جداول ترجمه بر پایه R=۶۰.

در سنت نجوم مسلمانان دو نوع زیج وجود داشته: بطلمیوسی و غیر بطلمیوسی. زیج‌های غیر بطلمیوسی بر پایه نجوم هندی و ایرانی بوده و جداول خوارزمی از این نوع است. استفاده از زیج‌های غیر بطلمیوسی در کاربرد ساده‌تر بوده است؛ هرچند از دقت کمتری برخوردار بوده است. در واقع خوارزمی روش «سند هند» و روش‌های ایرانی را ترکیب کرده بود. او زیج شاهی را که در زمان یزد گرد سوم نوشته شده بود به‌کار برد.

ثابت‌ابن‌قره و البطانی از فیثاغورسیان بودند که خود را از صابئیان معرفی کردند. ثابت بعضی از کتب نو افلاطونیان را به عربی ترجمه کرد. او مدل بطلمیوسی را کامل‌تر کرد(کره هشتم). زیج فاخر به علی ابن احمد نسوی نسبت داده شده که به جای نمانده است. در ایران پرداختن به نجوم و هندسه با هم عجین بوده است.

در نجوم یونانی از و تر و طول آن استفاده می‌کردند، اما در نجوم اسلامی به تقلید از هندیان قوس مقابل به و تر و نصف آن را در نظر گرفتند و با نسبت‌های مثلثاتی کار کردند. منجمان مسلمان چیزی را تا از امتحان و تجربه عملی درست در نمی‌آمد نمی‌پذیرفتند و د رتحقیقات به اقتضای قوانین علمی صرف پیش می‌رفتند. نتایج رصدهای البطانی به طرزی عجیب به رصدهای امروزی نزدیک است. به جز اسطرلاب، مسلمانان چندین دستگاه نجومی دیگر را به کار می‌بردند که با دقت فراوان ساخته می‌شد و هم یک ابزار علمی و هم اثر هنری محسوب می‌شد.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیلت اسلامی متأثر از یونان

در فلسفه، تفکر افلاطونی و ارسطویی هر دو بر فلسفه و ریاضیات اسلامی تأثیر گذاشتند و فیلسوفان مسلمان مانند کندی سعی در آمیختن و یکی کردن این دو فلسفه داشتند. منطق ارسطویی و تجرد افلاطونی در کتاب اصول اقلیدس به هم پیوسته بودند که مسلمانان آنان را مبنای هندسه در ریاضیات خود قرار دادند. البته علم حساب مبنای هندی داشت. هدف هندسه نجوم بود و ریاضیدانان اسلامی، خود می‌دانستند که علایق مجرد یونانیان به هندسه در آن‌ها وجود ندارد. علم به معنای مجرد آن هرگز در میان مسلمانان رواج پیدا نکرد؛ هر چند فلسفه به معنای مجرد بسیار در بین مسلمانان رایج شد. تجردات برای مسلمانان مختص به الهیات بود. حتی سعی می‌کردند حقایق حسابی را هم تأویل کنند و به الهیات مربوط نمایند.

فلسفه ابن‌سینا که دانشمند هم بود، برای رواج تفکر علمی مناسب می‌نمود. ولی کم‌کم فیلسوفان فقیه که از علم سر رشته‌ای نداشتند مانند ملاصدرا و قبل از او فیلسوفان صوفی مانند سهروردی جای این فلسفه‌ی پیشرفته را گرفتند. این فلسفه در قرون وسطی نقش تعیین کننده خود را در غرب ایفا کرد.

ریاضیات کاربردی در خدمت مهندسی، نجوم و جغرافیا متأثر از سبک ارشمیدس بسیار رواج پیدا کرد. رساله عملیه چندین بار بازنویسی می‌شد و پیوسته سعی می‌شد روش‌های محاسباتی بهتری از قدما ارائه شود. فرهنگ دقت در تقریبات هم از آپولونیوس و ارشمیدس گرفته شد که بسیار مورد تأکید بود. علاقه شدید ابن‌سینا به طبقه بندی و تفکیک از ارسطو نزد او به و دیعه سپرده شده است. ایده تمایز عقل فعال یا الهی از عقل منفعل که حاصل آن تفکر است از ارسطو گرفته شد. در میان مسلمانان همانند یونان باستان، مشکلات فلسفه از علم نمی‌آمدند، بلکه از الهیات ناشی می‌شدند.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از هند

حساب هندی هم تحت تاثیر نجوم پیشرفت کرده بود. لذا نجوم اسلامی هم تحت تاثیر نجوم هندی و ایرانی و هم تحت تاثیر نجوم یونانی پیشرفت کرد و در آن به دقت محاسبات و تنوع روش‌های محاسبات و روش‌های تقریب زدن بسیار تاکید می‌شد.

بسیاری از دغدغه‌های ریاضی هند از تفکر دینی آنان ناشی می‌شد. سنت حل معادله در مسائل ارث هم در بین مسلمانان درست مانند ریاضیات هند از دین تغذیه می‌شد. شاید بتوان گفت که تاکیدات دینی در محاسبه‌ی قبله و اوقات اذان موجب رشد هندسه و قوانین ارث موجب رشد تفکر جبری دربین مسلمان بود. این دو ریشه‌ها به هم پیوند نداشتند ولی در تفکر ریاضی مسلمانان اندک‌اندک به هم پیوند خودرند.

حساب هندی در بین مسلمانان قابل نوشتن به صورت خلاصه بر روی کاغذ گردید. ایشان چندین الگوریتم برای محاسبات عددی پیشنهاد کردند که در نهایت موجب پایه‌گذاری تفکر الگوریتمی گردید. کاربردهای فراوان موجب نیاز به روش الگوریتم در محاسبات یا تقریبات شد. در جبر و هندسه هم تفکر الگوریتمی گردید. کاربردهای فراوان موجب نیاز به روش الگوریتم در محاسبات با تقریبات شد. در جبر و هندسه هم تفکر الگوریتمی رسوخ پیدا کرد. تاکید بر جبر که مجردتر از هندسه است در ریاضیات هندی ریشه در فلسفه هندی دارد که خود بر تصوف اسلامی و هم بر فلسفه اسلامی تاثیرگذار بوده است.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از ایران باستان

گرایش‌های فلسفی در ایران باستان که توجه به اشراق و نور داشت هنوز هم در فلسفه فیزیک هویدا است. نورشناسی در ریاضیات اسلامی بسیار هندسی تلقی شد و اصلا به ابعاد فلسفی ایرانی تاکید نشد. هر چند گرایش به درک روند تفکر و چگونگی ابداع و خلاقیت در آثار ریاضی مسلمانان هویداست، نمی‌توان گفت که توجه به روند تفکر تحت تاثیر انسان‌گرایی ارسطویی بوده است. شاید روش سقراطی بر آن تاثیر داشته، اما عرفان و نفس‌شناسی ایرانی که تحت تاثیر عرفان و نفس‌شناسی هندی بوده، بسیار بر توجه به روند تفکر ریاضی تاثیر گذاشته است.

سوالاتی فلسفی در مورد زمان در ایران باستان مطرح بوده که احتمالا بر تفکرات خیام و محور اعداد او تاثیرگذار بوده است. از آنجا که تفکرات دکارت را می‌توان ادامه روش خیام دانست، این نکته جالب است که فضا و زمان از آغاز روند مدلسازی هر دو مورد توجه بوده‌اند. نور و زمان در فلسفه‌ی ایران باستان نیز به هم مربوط بوده است که آثار آن در فلسفه‌ی فیزیک مدرن هم مشاهده می‌شود. تفکرات مسلمانان در مورد زمان و نور به فلسفه اسلامی خلاصه می‌شود و وارد مدل‌های ریاضی مورد استفاده‌ی آنان نشده است. این احتمالا به دلیل عدم کاربرد این مدل‌ها در آن زمان است.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از اسلام

حقیقت جویی و باطن‌نگری اسلامی دلیل آن بود که تجرد یونانی روح مسلمانان را اقناع نمی‌کرد. پس به ابعاد کاربردی ریاضیات بسنده می‌کردند و شور حقیقت جویی را با الهیات و فلسفه اقناع می‌کردند. باطن‌نگری هرگز در علوم طبیعی و ریاضیات به نحوی که خالی از خرافه باشد وارد نشد و تمدن اسلامی هرگز کلید دسترسی به باطن علوم را نیافت.

تفکر توحیدی مسلمانان در ادامه تفکرات توحیدی زرتشتیان، یهودیان و مسیحیان که هرکدام در ابعادی نقص داشتند، پشت‌پرده بر جهت‌گیری علوم حکومت داشت. ارتباط بسیاری از علوم تحت حکومت باطن برقرار می‌شد. مثل ارتباط طب اسلامی و گیاه‌شناسی اسلامی که از طریق مفهوم حیات مرتبط می‌شدند. عقل‌گرایی اسلامی هرچند در میان امت اسلامی عمومی نشد، ولی در باطن تفکر اسلامی منجر به شکوفایی علوم گردید. ریاضیات همواره ابزاری برای رشد تفکر عقلانی در تمدن اسلامی بود. به همین دلیل عقل‌گرا بودن است که فرمالیسم یونانی برای علم چندان مورد توجه مسلمانان قرار نگرفت. چرا که فرمالیسم یونانی از آنچه استاندارد تفکر عقلانی در تمدن اسلامی است بسیار کم داشت. می‌توان گفت که تاثیرات اساسی تفکر اسلامی بر ریاضیات هنوز در دستور کار است.

انسان‌شناسی اسلامی و علم‌شناسی اسلامی

انسان‌شناسی اسلامی در ارتباط مستقیم است با شناخت اسلامی و آن مقدمه‌ای است بر فلسفه علم از دیدگاه اسلام و تعریف علم. در اسلام همه ابعاد علم در خدمت همه ابعاد انسان است، لذا علم مقدس است چون مرتبط با ابعاد الهی انسان نیز هست. منظور از علم قدسی وحی عقلانی نیست، بلکه علم قدسی شامل وحی عقلانی و سایر مراتب علم می‌شود. همچنین علم قدسی در مراتبی نیازمند شهود عقلانی است؛ همان چیزی که فلسفه وجود لازم دارد.

سؤال مهمی که مطرح می‌شود این است که آیا خرد کلی قادر است تمام حقیقت را از ورای حجاب‌ها آن طور که هست بشناسد؟ جواب این سؤال همان مفهوم وحی است که می‌گوید شناخت خداوند به معنی وحی در دسترس انسان قرار دارد. اگر از تأکیدات هستی شناسانه فلسفه اسلامی صرف نظر کنیم، تصویر خوبی از انسان‌شناسی اسلامی به دست خواهد آمد. به تناظر زیر بین دیدگاه‌های فیلسوفانه و انسان شناسانه توجه کنید:

فلسفه اسلامی	***انسان شناسی اسلامی***
مطالعه ی منشاء و غایت و	*مطالعه ی منشاء و غایت و*
قلمروهای هستی حرکت جوهری	*قلمروهای حقیقت و ابعاد آن حرکت*
ریشه ی تحول پذیری	*بعضی لا یه‌های تجرید حقیقت*
ریشه تنوع و کثرت: مراتب هستی،	*ریشه تحول پذیری ریشه تنوع و*
علیت، . . . علت و معلول	*کثرت: مراتب حقیقت و تجلیات آن،*
اصالت و جود	*تجلی و عروج، تخصیص و تعمیم*
	اصالت همه ابعاد حقیقت

ساختار معرفتی عالم در ساختار شناختی تحقیقات علمی او منعکس می‌شود. لذا ساختار علم و عالم در تمام لایه‌های تجرید شباهت دارند. از آن جا که ساختار علم و ساختار عالم مشابهند، علم‌شناسی و انسان‌شناسی نیز مشابهند. ساختار علم و ساختار عالم در علوم مجردتر مثل ریاضیات و فلسفه اشکارتر است. در فلسفه اسلامی و عرفان اسلامی حتی اعتقاد به اتحاد عالم و معلوم دارند.

پنهان‌سازی نقش عالم پدیده‌ای مدرن است. در علم سنتی عقاید و باورها و ساختارهای انسانی عالم قابل تشخیص بوده است.

منظور از نگاهی انسانی به علم این تصور است که علوم واقعیت‌هایی عینی هستند، نه ذهنی و نه مادی بلکه مثالی و عقلانی اما مطابق با عالم ماده. یعنی علم هم فعالیتی بشری است و هم پدیده‌ای اجتماعی است و هم بخشی

از فرهنگ بشری است و هم درگیر با تاریخ و هم قابل درک و فهمیدنی است. در عین حال علوم خارج از همه اذهان وجود دارند.

سوال اینکه جایگاه علوم خارج از اذهان کجاست؟ همان طور که برای ادارک انسان لایه‌های نفس، مثال و عقل قائل می‌شویم، برای جهان خلقت نیز حیاتی مانند انسان و لایه‌های تجریدی مانند عالم محسوسات، عالم برزخ و همچنمین عالم عقلی مستقل از بشر قائل می‌شویم و این‌گونه خاستگاهی برای علم مستقل از بشر معنی پیدا می‌کند. در واقع نگاه انسانی به علم در چار چوب نگاه انسانی به عالم خلقت ممکن می‌شود.

جهان‌بینی اسلامی و علم‌شناسی اسلامی

جهان بینی اسلامی و انسان‌شناسی اسلامی با یکدیگر گره خورده‌اند. حوزه‌های علوم حسی، علوم مثالی و علوم عقلی را می‌توان به ترتیب متناظر با علوم تجربی، ریاضی و فلسفه در عالم کبیر دانست و مستقل از بشر برای آن حیات قائل شد. این بر پایه همان نظریه عالم صغیر و عالم کبیر عرفاست. پس حوزه‌ی علوم، عالم حس، عالم مثال و عالم عقل است و از آن جا که محققین و اجد این مراتب هستند و این عوالم در وجود ایشان به عوالم متناظر در عالم کبیر متصلند، می‌توانند به رشد علوم خدمت کنند.

به عنوان تائید می‌توان از پدیده‌ی خواب و تعبیر خواب نام برد که مستلزم ورود از عالم مثال معبر به عالم مثال برزخی است. دلیل دیگر، کشف مستقل و هم زمان حقایق علمی است که به کثرت مشاهده می‌شود، و همچنین نظریه ناخودآگاه سرتاسری بشر در روان‌شناسی. بدین ترتیب علوم مطلق می‌شوند و از نسبی بودن وابستگی به نفوس خلاصی می‌یابند، هر چند که هنوز انسانی هستند.

در انسان‌شناسی اسلامی، انسان چکیده و عصاره‌ی جهان خلقت است. لذا ساختار علوم و ساختار معرفتی جهان هستی در ساختار ادراک انسانی خلاصه شده است. پس ساختار علم، ساختار انسان و ساختار جهان هستی هر سه لایه‌لایه هستند و مراتب تجرید دارند. مخروط ادراکات در عالم حس کثیر و در عالم عقل وحدت بیشتری دارد. مخروط عوالم در عالم حس تنگ‌تر و در عالم عقل گشایش بیشتری دارد. همه‌ی لایه‌های مختلف ادراک ارتباط متقابل دارند. البته اینطور نیست که لایه‌های ادراک و شناخت در هر شخصی شکل گرفته باشد یا در هر علمی کامل شده باشد. تشکیل و تکامل این لایه‌های شناختی یکی از مراحل کمال است که باید طی شود.

همان طور که مشاهده می‌شود از انسان چنان سخن می‌گوییم که گویی جهان خلقت است. در اسلام، انسان‌شناسی و جهان‌شناسی تقریباً یک چیز هستند و علم‌شناسی اسلامی زاییده وحدت این دو دیدگاه است. وحدت علوم و هماهنگی آن‌ها، ریشه در وحدت مبانی آن‌ها و آن ریشه در وحدت مبانی شناخت و انسان‌شناسی توحیدی دارد. توحید یعنی وحدت ذاتی. ریاضیات در این وحدت و به هم پیوستگی علوم نقشی کلیدی را ایفا می‌کند. در

واقع، ریاضیات باطن علوم و متحد کننده‌ی آنان است. خلاصه اینکه در انسان‌شناسی اسلامی انسان چیزی است که همه لایه‌های تجرید جهان خلقت را می‌تواند بشناسد.

تأثیرات انسان‌شناسی و جهان بینی اسلامی در ریاضیات اسلامی

انسانشناسی اسلامی برای ریاضیات هم هویت فردی و هم جمعی مستقل از انسان قائل می‌شود. فرمالیسم تعمیم و تخصیص را یک تجلی از ارتباط بین ظاهر و باطن می‌داند و لایه‌های تجرید ریاضیات و علم را یک تجلی از لایه‌های تجرید حقیقت می‌داند. ریاضیات و حقایق ریاضی را علومی تأویل پذیر و صاحب معنی می‌داند و دیدگاه‌های فلسفی ناشی از ریاضیات را در جهان‌شناسی و لذا در انسان‌شناسی و شناخت‌شناسی بسیار مهم می‌داند.

ساختار ارتباطی تجرید و تجلی بین ظاهر و باطن به ما کمک می‌کند بین ریشه‌های به ظاهر بی‌ارتباط یک پدیده‌ی ریاضی ارتباط برقرار نماییم. این دیدگاه ریاضیات را در خدمت زندگی روزمره‌ی انسان و هم در خدمت تربیت تفکر و هم در خدمت تکامل و تعالی سایر لایه‌های تجرید انسان می‌داند. یعنی علم در خدمت همه ابعاد انسان. همچنین به ابعاد انسانی ریاضیات، مثل روند تفکر و حتی ابعاد مجردتر در حل مسئله، علاقه نشان می‌دهد و هم به ابعاد اجتماعی توسعه علم و نتایج آن‌ها در آموزش و مدیریت علمی تأکید دارد.

مشخصه‌های اصلی ریاضیات اسلامی

ریاضیات اسلامی عصاره و شیره و خلاصه تفکر ریاضی در تمام ابعاد آن در تمدن‌های باستان است. هم بین گرایش‌های هندسی و حسابی اتحاد برقرار کرده و هم بین گرایش‌های کاربردی و محض(که آن هم خود به نوعی کاربردی است)، ارتباط و همنشینی ایجاد کرده. ریاضیات اسلامی همه‌ی این گرایش‌ها را در دل خود پذیرفته و این در ساختار نظامیه‌ی بغداد که در آن ریاضیدانان غیر مسلمان فراوان بودند، آشکار است. با این روش، نظامیه سنت‌های ریاضی را به طور زنده در دسترس دانشمندان مسلمان قرار داده است.

تکثر کاربرد ریاضیات، مانند تکثر نوشتن در منشیان مصری که موجب پیشرفت خط گردید، نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات اسلامی داشته است. هر ایده چندین بار بازنویسی شده و چندین بار فرمولبندی گردیده و از همه اینها چندین نفر استفاده کردند. در دوران شکوفایی تمدن اسلامی، ریاضیات اسلامی هویت شرقی خود را حفظ کرد مرعوب نظام منطقی اقلیدس نشد. در قرن هفدهم که پایه‌های ریاضیات مدرن ریخته شد، دوباره تفکر اقلیدسی غلبه نمود و نظام پیشرفت علم را تحت کنترل خود گرفت.

فصل ۴

شکل‌گیری مبانی ریاضیات مدرن در عصر دکارت(قرن هفدهم)

احاطه تفکر متافیزیک سایه سنگینی بر ریاضیات قرن شانزدهم انداخته بود. این تحت تأثیر فیلسوفان قرون وسطی چون توماس آکوئیناس و سنت آگوستین بود. فلسفه اینان تحت تأثیر فلسفه ابن‌سینا بود که هم به الهیات پیوند داشت و هم با علم و این مایه پیشرفت تفکر علمی شد. همین تفکر متافیزیک تا اوایل قرن بیستم سایه سنگین خود را بر فیزیک نگه داشت، اما ریاضیات تحت تأثیر گالیله در قرن هفدهم از متافیزیک فاصله گرفت و مبانی فکری و فلسفی لازم برای روی پا ایستادن ریاضیات، بعد از کلام مسیحی در قرون وسطی، توسط دکارت پایه ریزی شد. اما در زمان دکارت فیزیک همچنان رابطه خود را با متافیزیک حفظ کرد تا سر انجام تفکرات پست‌مدرن در اوائل قرن بیستم بر آن چیره گردید.

ریاضیات اقلیدسی که دوباره پا گرفته بود با مرکزیت ریاضیدانان فرانسوی هنوز ارتباط خود را با فیزیک و علوم دیگر حفظ نمود و با سر چشمه‌هایی که از مسائل علمی به آن می‌ریخت، در عصر لایبنیتز و نیوتن ریاضیات مدرن شکوفا شد. محتوای اصلی این سبک جدید در ریاضیات، آنالیز و مسأله بی‌نهایت کوچک‌هاست که سرانجام در مدل‌های ریاضیات مدرن رام و پذیرفته شد. شکوفایی ریاضیات مدرن هم زیر سایه‌ی متافیزیک اتفاق افتاد و تفکرات متافیزیک به طور سنگینی بر ذهن نیوتن و لایبنیتز سنگینی می‌کرد. شاید بتوان ادعا کرد که انقلاب‌های علمی اکثراً ریشه متافیزیک دارند.

کپرنیک/قرن۱۶

مبانی تفکر متافیزیک کپرنیک به سادگی از باورهای متافیزیک او قابل استخراج هستند: «طبیعت همیشه از کوتاه‌ترین راه می‌رود »، «طبیعت کار بیهوده نمی‌کند»، «طبیعت نه اسراف می‌کند نه در ضروریات خست می‌ورزد». کپرنیک این همه را در پشت «سادگی ریاضی »به عمد پنهان می‌نمود. شخصیت اصلی کپرنیک خلاصه و عصاره‌ی عصر پس از رنسانس است.

از خصوصیات این عصر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: توجه به ادبیات باستان، توجه به فرهنگ تمدن‌های مختلف، توجه به تکثر مراکز و سنت‌های دینی، انقلاب بازرگانی، انقلاب حمل و نقل، تجربه عملی کروی بودن زمین، درک عدم مرکزیت اروپا در بین تمدن‌ها. رئوس میراث علمی کپرنیک بدین قرارند: تأکید به درک ریاضی طبیعت، تأکید به تفکر هندسی درفیزیک و ریاضی، تقسیم علوم به هندسه، نجوم، حساب، موسیقی و اینکه کپرنیک به فیلسوفان پیشین مراجعه می‌کند تا ببیند که آیا از نظر ایشان حرکت زمین محتمل است؟

«سادگی ریاضی» به «هندسی‌سازی» تئوری‌های نجوم کمک می‌کرد که مورد تأکید هم بود. کپرنیک به قبول نظریاتش توسط عالمان توجه و تأکید داشت. به مفاهیم فرضیه و تئوری و تبیین مانند امروز اعتقاد داشت. به تبیین تأکید داشت نه اینکه فقط بپرسد آیا زمین حرکت می‌کند. او زبان یونانی را نزد نوارا معلم ریاضی ایتالیایی آموخت تا با آثار فیثاغورسیان آشنا شود. کپرنیک رفتار طبیعت را عالمانه و پیرو نظام عقلی می‌دید و به همین دلیل قابل مدلسازی ریاضی می‌دانست. این اعتقاد بر خلاف کیهان‌شناسی ارسطویی است. بلکه تحت تأثیر کلام مسیحی و فلسفه یونانی در قرون وسطی است و هم ریشه فیثاغورسی دارد.

«درک نظم سرتاسری در طبیعت» خلاصه معرفت‌شناسی کپرنیک است. رئوس تأکیدات بر لایه‌های تجرید باطنی در اعتقادات متافیزیک کپرنیک بدین قرارند: تشخیص وجود عقل ناظم طبیعت بر این حقیقت اشاره دارد که طبیعت تجلی عالم عقل است. تفحص در آثار گذشتگان، نشان دهنده‌ی باور او به الهام قلبی است، درک نسبی بودن حرکت، ادراکی ساختارشناسانه و عقلانی است، و اعتقاد به امکان فرمول بندی بهتر نمایانگر روح ایمان اوست.

کپلر/قرن ۱۶

رئوس باورهای متافیزیک کپلر بدین قرارند: «طبیعت سادگی را دوست دارد»، «طبیعت وحدت را دوست دارد»«هیچ چیز عبث یا باطل در طبیعت وجود ندارد. »، «طبیعت که می‌تواند از راه ساده و آسانتر برود از راه‌های پر پیچ و تاب نمی‌رود»، «فهم یقین فقط به و اسطه‌ی کمیات ریاضی است» کپلر مبانی تفکر متافیزیکی خود را در پشت «وحدت ریاضی» پنهان می‌نمود.

کپلر اصل پیوستگی ریاضی را مطرح کرد: این که سهمی حالت خاصی از بیضی و هذلولی است، و این که دو خط موازی در بینهایت متقاطعند، دو مصداق از اصل پیوستگی هستند. محاسبات سطح و حجم با بینهایت کوچک‌ها از دیگر دستاوردهای ریاضی کپلر است که مقدمه‌ی تحقیقات کاوالیری را فراهم کرد.

کپلر خلاصه آثار باقیمانده و تفکرات نو افلاطونیان و تفکرات توحیدی آنان بود. کپلر حقیقت‌جو بود. یقین قلبی به نظریه کپرنیک داشت و از جمال آن از بهجت سرشار بود و وظیفه دفاع از را مسئولیت خود می‌دانست. اما تفکرات مسیحی فلسفی قرون وسطی به این حقیقت جویی حکم فرمابود. علی‌الخصوص، علیت را به معنای ملاصدرا به کار می‌برد. تأکید کپلر بر «وحدت ریاضی»، «زیبایی ریاضی»، و «پیوستگی ریاضی» نشان می‌دهد که نه‌تنها یقین قلبی و ایمان روحانی به حقیقت داشت، بلکه درکی عقلانی از طبیعت داشت که آن را در چارچوب توحیدی که بر آن حکومت داشت می‌دید.

دیدگاه او نظم سرتاسری طبیعت را رنگ و بوی توحیدی می‌داد و از اصول یگانه‌ای سرچشمه گرفته می‌دانست. هدف کپلر، کسب معرفت بیشتر در باره‌ی خداوند از طریق شناخت طبیعت بود و اعتقاد داشت همه‌ی طبیعت هم

آوا و مرتبط هستند و فرضیات تصویر راستین جهان خارج هستند و جهان در آیینه‌ی فرضیات بزرگتر و باشکوه‌تر دیده می‌شود. این تفکر با سعه عوالم مجردتر و تنگی عوالم ملموس هماهنگی دارد.

گالیله /قرن۱۶

رئوس باورهای متافیزیک گالیله بدین قرارند: «قوانین طبیعت در ابعاد بزرگ و کوچک مرتبط اند»، «کاری را که با عوامل کمتر می‌توان کرد طبیعت با عوامل بیشتر نمی‌کند»، «طبیعت بی‌عاطفه است و طبق قوانین لایتغیری عمل می‌کند که خود هیچ گاه آن‌ها را زیر پا نمی‌گذارد»، «کتاب‌های طبیعت به زبان ریاضیات نوشته شده است». گالیله چنان به ریاضی تأکید داشت گویی که بی‌نیاز از تأیید حسی است. از کارهای ریاضی گالیله می‌توان به برهان برای سهمی بودن حرکت پرتابه و اندازه‌گیری شتاب جسم در حال سقوط آزاد اشاره کرد. او یک ریاضیدان ابزار ساز بود: تلسکوپ، ساعت مکانیکی، نبض سنج پاندولی از جمله اختراعات او هستند. گالیله تنها برای اقناع دیگران دست به تجربه می‌زد، نه برای اقناع خود. برهان برای او کافی بود. گالیله پذیرش نظام کپرنیکی را ترجیح عقل بر حس می‌دانسته و می‌ستوده است. او سعی می‌کرده تعریف ریاضی از پدیده‌های روزمره(مثل حرکت شتابدار) به دست بدهد، یعنی جهان حس را به عالم عقل ترجمه کند. او تأکید بر کمی کردن مفاهیم داشت. روش علمی گالیله مبتنی بر شهود، برهان و تجربه بود.

عقاید علمی گالیله با الهیات در ارتباط بود: «خداوند در امر خلقت هندسه پرداز است»، «شهود جمعی خداوند که دفعتاً حقایق را می‌داند، با روش‌های علمی ما متفاوت است»، «تحقیقات در مسائل طبیعی باید کتاب مقدس را تفسیر کند»، «ظهور خداوند در طبیعت کمتر از ظهور او در کتاب مقدس نیست».

گالیله آدمی و علوم انسانی را که با حذف انسان از مطالعه طبیعت حذف می‌شوند، از طبیعت جدا کرد و قابل مطالعه ریاضی ندانست. همین موجب می‌شود که زمان مطلق و مکان مطلق هندسی اندازه پذیر معنی پیدا کند و این منجر می‌شود با تلقی مکانیکی از طبیعت. گالیله خدا را سازنده‌ی اتم‌ها و مبدأ المبادی گرفت و منجر به این شد که علت و معلول هردو از جنس حرکت باشند. او اولین کسی بود که پاسخ بعضی سؤالات را خارج حوزه‌ی علم دانست و لاادری گفت. شکاف بین علم و ماوراء الطبیعه از زمان گالیله شروع شد.

جبر ایتالیایی تا قرن ۱۶

تجارت در بنادر و نیز، ژنوا و پیزا که از معامله‌ی پایاپای به شکل معامله با سکه تغییر کرد، موجب رشد حسابداری، بانکداری، سرمایه‌گذاری بین المللی و ظهور سند معامله و نامه‌ی اعتبار شد. ساختار مالی چنین پیچیده‌ای نیاز به سیستم اعداد هندی و الگوریتم‌های مسلمانان و جبر داشت.

فیبوناتچی، پسر یک تاجر ایتالیای بود که در الجزایر حساب هندی را آموخت و به مصر، سوریه، سیسیل، بیزانتین، و فرانسه جنوبی سفر کرد(قرن۱۳). بعضی از آثار ریاضی فیبوناتچی بدین قرارند: روش هورنر که در کتاب ۹ فصل چینی آمده و بر کاشی نیز معلوم بوده، دستگاه معادلات خطی و جواب‌های صحیح آن‌ها، تقریب‌ها یی برای ریشه دوم و سوم که اولی بر نسوی معلوم بود و دومی توسط او ابداع شده بود، حل معادلات درجه ۲ بعد از خوارزمی، حل معادلات دیوفانتی با روش‌های متفاوت با مسمانان.

بندتو ریاضیدان ایتالیایی در قرن پانزدهم به حل معادلات خاص از درجه ۳و۴ با تحویل به درجات پایین تر، دستگاه معادلات غیر خطی(درجه ۲ و رادیکالی) و حل الگوریتمی معادلات درجه بالا اشتغال داشت. دل فرو، کاردانو و تارتاگلیا(قرن۱۶) حل معادلات درجه ۳ را کامل کردند. فراری موفق به حل معادلات درجه ۴ با تحویل به معادلات درجه۳ شد. یُمبلّی کسور مسلسل را برای تقریب $\sqrt{2}$ به‌کار برد و استفاده از$\pm i$در محاسبات جبری برای حل معادلات درجه ۳ را ابداع کرد. البته زبان جبری دکارت هنوز وارد نشده و محاسبات همه با علامت‌های اختصاری دیگری صورت می‌گرفت.

جبر فرانسوی(قرن ۱۶و۱۷)

ریاضیدان فرانسوی وِیت(قرن ۱۶) حقوق دان و ریاضیدان بود. از او سخنرانی‌هایی در باب مثلثات مسطحه و کروی، و همچنین نجوم بطلمیوسی به جا مانده است. او اولین کسی است که هم برای مجهول و هم ضرائب حروف الفبا به کار برد. اصل موضوع جدیدی به اصول اقلیدس اضافه کرد: گذراندن خطی از یک نقطه، که بین دو خط داده شده طول d را محدود می‌کند، که فرض آن تضعیف مکعب را نتیجه می‌دهد، هفت ضلعی منتظم را در دایره محاط می‌کند، و سپس ثابت می‌کند ساختارهای هندسی که به معادلات درجه ۳یا ۴ ترجمه می‌شوند اینطور قابل حل هستند، و این یعنی آشتی دوباره‌ی هندسه و جبر. رابطه بین ریشه‌ها و ضرایب معادلات را نیز و یت به دست آورد.

سِتوین(قرن۱۶) اولین بار کاربرد بسط اعشاری را از حساب هندی معرفی کرد و مفهوم اعدادحقیقی را به کار برد. هندسه تحلیلی مستقلاً توسط فرما و دکارت(قرن ۱۷) کشف شد. هندسه تحلیلی همان روش حل مسائل هندسی باکمک روش‌های جبری است که برای کاربرد روش‌های هندسی در حل مسائل جبری نیز مفید است. فرما این روش را برای حل مسائل مکان‌های هندسی به کار می‌برد: معادلات درجه ۲ با دو متغیر را رده بندی کرد. روش نزول نامتناهی فرما نیز در حل معادلات دیوفانتی بسیار کار آمد بود.

نمادگذاری جبری امروز از زمان دکارت به‌جا مانده است. نماد اعداد منفی نیز توسط او مطرح شده است. دکارت هندسه را با جبر پیوند داد و آن‌را مثالی برای روش علمی خود که تمام مسائل را به مسائل جبری ترجمه می‌کند قرار داد. بر خلاف سِتوین، دکارت با مفهوم عدد حقیقی کار نکرد، بلکه عدد را طول یک پاره خط گرفت. پیش از

دکارت در قرن ۱۵، chuquet پزشک، کتابی به نام triparty نوشت که در آن اعداد منفی به آزادی در ضرایب، جواب‌ها، توان‌ها به‌کار رفته‌اند. او همچنین روش کسر میانی را برای تخمین زدن ریشه اعداد گویا به کار برد.

نهضت حل معادله در ایتالیا تأکید بر حل با اعمال حسابی و را دیکال‌ها داشت که از دیدگاه‌های خوارزمی ناشی شده بود. اما نهضت حل معادله‌ای که در هند و چین نشو و نما یافته بود، بیشتر هندسی بود؛ مانند کارهای خیام. در قرن۱۷، John napier در اسکاتلند سعی کرد ضرب و تقسیم را از جداول و محاسبات نجومی حذف کند و این منجر به کشف لگاریتم شد. البته استفاده از جداول لگاریتم، نیاز به کاربرد جدی مفهوم تقریب داشت.

سرگذشت دکارت و روش علمی او

دکارت در سال‌های آخر قرن ۱۶ متولد شد. متافیزیک بر شخصیت علمی او حکومت داشت. خواب‌هایی که در ۲۰سالگی دیده بود اورا به سوی روش علمی‌اش رهنمون شد. جوانی را به سفر و سیاحت و جهان‌گردی پرداخت و سپس برای ۲۰سال در هلند گوشه نشینی اختیار کرد. کتاب «عالم»خود را به دلیل هیاهوی محاکمه گالیله منتشر نکرد و به تصنیف «گفتار در روش درست راه بردن عقل و طلب حقیقت در علوم» پرداخت. در ذیل آن سه رساله‌ی پرسپکتیو، شکست نور و هندسه را آورد.

راستای اندیشه دکارت مرکز گریز بود: یعنی تفکر از یک اندیشه‌ی مرکزی استوار به درون پدیده‌های تفصیلی کشیده می‌شود. نقطه قوت تفکر او باز پس زدن باورهای گذشتگان و نوسازی بنیاد تفکر بود. تحقیق در مسائل هستی‌شناسی اورا به نظریه افراطی تقسیم مخلوق به ماده و ذهن رهنمون کرد و او شناخت‌شناسی، انسان‌شناسی و جهان بینی خود را بر آن استوار کرد. روش تفکر دکارت در مسائل علمی و اخلاقی برچند اصل موضوعه استوار بود که خود طراحی کرده بود. این اصول موضوعه استانداردهای تفکر علمی اورا تشکیل می‌داد.

بخش اعظم ریاضیاتی که به عنوان مدل و سنگ محک فلسفه دکارت به کار می‌رفت، آفریده خود او بود و بسیاری از اصول فلسفی اورا منعکس می‌ساخت. هندسه دکارت اثبات‌های ریاضی دقیقی نیز برای کتاب علم انکسار نور او فراهم کرد. اصل اینرسی از دکارت است: جسم به حرکت خود ادامه می‌دهد، مگر اینکه با جسم دیگری برخورد کند و حرکت را به آن منتقل می‌کند. او به مطالعه فیزیولوژی جانوران پرداخت و این مطالعه را زمینه اندیشه‌های خود در باب روح قرار داد. اوادراک را روحانی می‌دانست. او مسائلی را که باید فلسفه‌اش مورد بررسی قرار می‌داد طبقه بندی کرده بود و مطالعه اجسام بی‌جان و انسان‌شناسی در تفکر او در دو دسته‌ی جدا قرار می‌گرفت.

نخستین هنر دکارت این بود که در زمان غرور جوانی با آن که در ردیف دانشمندان واقع می‌شد پی به نادانی خود برد و به آن اقرار کرد و بیهودگی ناقابلی و غلط غیر یقینی بودن علم حکمت عصر خود را دریافت. اوهمه افراد بشر را دارای بهره یکسانی از قوه تعقل می‌دانست و باور داشت اگر به علم نمی‌رسند یا گمراه می‌شوند، به دلیل آن است که از آیین و اسلوب درستی بهره نمی‌برند. او برهان را وسیله متقاعد کردن دیگران می‌دانست نه روش کسب

حقیقت و کشف مجهولات. او به کار بردن فکر و نظر در کنار هم را روش علمی خود قرار داد که منجر به شکوفایی علوم شد. دکارت بر خلاف یونانیان که از علم بهره‌ی دنیوی نمی‌خواستند، مانند مسلمانان اعتقاد داشت که علم باید منجر به بهبود زندگی بشر گردد. یک نکته دیگر که شایان تأمل است، اینکه دکارت سعی داشته شخصیت و آراء درونی و ساختارهای تصمیم‌گیری و نظام عقلانی خود را بدون ریا و با صداقت برای دیگران توصیف کند، تا هم نکات پایدار و نقاط قوت آن مشخص شود و هم ضعف‌های آن نمایان گردد تا اثر این ضعف‌ها بر تفکرات او قابل رد یابی باشد.

فلسفه دکارت

دکارت علم را فقط معلوماتی می‌داند که کاملاً یقینی هستند و جای هیچ شک و شبهه نسبت به آن‌ها در ذهن باقی نیست. لذا ریاضیات را نمونه کامل علم می‌داند و معتقد است برای کشف مجهولات باید راه ریاضیدانان را پیش گرفت. به عقیده او علم حاصل عقل است. ار آنجا که عقل انسان یکی است، علم هم یکی بیش نیست. علوم مختلف به هم مربوطند و از یک جنس هستند و شخص باید جامع همه باشد و می‌تواند باشد. مثلاً تا آن زمان در علوم مختلف بحث از جوهر و عرض بود، اما دکارت گفت که در همه علوم باید از کمیات بحث شود.

در استدلال، دکارت طریقه تحلیل را می‌پسندید که در هندسه و حساب به کار می‌رفت. درستی قضیه را ابتدا ثابت می‌گیرند و نتایج آن را مورد بحث قرار می‌دهند و قدم به قدم نتایج را پیش می‌گیرند تا به جایی بر سند که به سادگی قابل اثبات است. قواعد روش علمی دکارت توسط خود او چنین بیان شده اند:

۱) «هیچ چیز را حقیقت ندانم مگر آن که بر من بدیهی باشد. لذا به رأی دیگران نباید اعتماد کرد و هر مطلب را باید به عقل خود سنجید. »

۲) «هریک از مشکلاتی را که به مطالعه در می‌آورم تا آنجا که می‌توانم به اجزاء تقسیم نمایم. »

۳) «افکار خویش را به ترتیب جاری سازم و از ساده‌ترین چیزها آغاز کرده و کم کم به معرفت مرکبات برسم. » یعنی باید از مطلق به سمت نسبی حرکت کرد و از نسبی به نسبی تر.

۴) «در هر مقام بازدید مسائل را چنان کلی سازم که مطمئن باشم چیزی فروگذار نشده است. »

بر خلاف ارسطو که فلسفه را از طبیعت آغاز کرده و سپس به ماورا ءالطبیعه پرداخته است، دکارت از ماورا ءالطبیعه شروع می‌کند. یعنی از باطن به ظاهر پی می‌برد نه از ظاهر به باطن. چون می‌دانست که در عنفوان جوانی آمادگی پی ریزی حکمت را ندارد، به علوم پایه و جهان‌گردی پرداخت. او همه محسوسات و منقولات و معقولات را مورد شک و تردید قرار داد تا مطمئن شود که علمش عاریتی نیست. او از اینجا فلسفه‌اش را شروع می‌کند که شک نمی‌تواند بکند که شک می‌کند. پس می‌اندیشد و انسان‌شناسی او آغاز می‌شود.

شاید این که انسان را از جسم و ذهن می‌داند، ریشه در همین شروع داشته باشد. نفس را جز فکر چیزی نمی‌داند و آن را مستقل از جسد موجود می‌داند. این اصول بر تفکرات اسپینوزا بسیار مؤثر اتفاق افتاده است. دکارت حقیقت خارجی را که در ذهن متجلی می‌شود هم اندازه‌ی وجود ذهنی کامل می‌داند و هردو را یک سهم از حقیقت قائل است. او می‌گوید تصور ذات نامتناهی را نمی‌تواند از خود بداند و نه از مخلوق دیگر. لذا خداوند وجود دارد. چون خداوند قائم به ذات است، همه کمالات را دارد. انسان که نمی‌تواند به خود هستی بدهد، از همه کمالات بی‌بهره است. سپس به جهان خلقت می‌پردازد. چون فکر اثبات شد، متوجه جسدی می‌شود که فکر ندارد و آن جهان خلقت است.

دکارت چنین نتیجه می‌گیرد که عالم جسمانی نامحدود است، زیرا برای ابعاد حد نمی‌توان تصور کرد و چون حقیقت جسم بعد است، فضا و مکان بی‌بعد معقول نیست و هیچ مکانی بی‌جسم نمی‌شود. دیگر اینکه جزء غیر قابل تقسیم ممکن نیست، چرا که بعد همیشه قابل تقسیم است. اجسام زمینی و اجرام آسمانی از یک جنس‌اند. حرکت اولیه را خداوند به‌وجود آورده و سایر حرکات از برخورد آنچه عالم را پر کرده به‌وجود می‌آید و گردباد دلیل حرکت زمین است.

ریاضیات دکارت

اکثر کارهای علمی دکارت متروک شده است؛ به جز کارهای ریاضی او که پایه فلسفه‌ی اورا تشکیل می‌دادند. هندسه‌ی تحلیلی مهمترین ابداع ریاضی دکارت است. هندسه تحلیلی اشکال را که از مقوله کیفیات هستند به کمیات تبدیل می‌کند که موجب سهولت محاسبات است و کلید اختراع شاخه‌های دیگری از ریاضیات مثل حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه جبری می‌باشد. هندسه تحلیلی پس از کار ویت سومین انقلاب به هم پیوستن هندسه و حساب بود. این شاخه از ریاضیات به یک اعتبار تکمیل هندسه و به اعتبار دیگر تکمیل جبر است.

دکارت هم به نورشناسی پرداخته است و هم کارهایی در پرسپکتیو دارد و هم فرمول شکست نور از او باقی مانده. با وجود استعداد فوق العاده‌ی دکارت در ریاضیات و اعتقاد به استواری این علم، او این فن را مقصد قرار نداده و فقط راه وصول به علم دانسته است. پس از تحقیقاتی در ریاضیات آن را رها نموده و به تحقیقات دیگر پرداخته است. اخلاق دکارت هم بر فرهنگ ریاضی او تأثیرگذار است. به عقیده او چون روح مستقل از بدن است(از نظر دکارت روح همان نفس است) و فنا ناپذیر است، باید به لذات روحانی پرداخت نه جسمانی. در ارتباط با افراد باید منافع خود را تابع منافع حقیقی کل بدانیم. برای این کار باید بر نفس حاکم شد. نفسانیات را شناخت و آن‌ها را کنترل کرد.

دیدگاه‌های دکارت شخصیت متافیزیکی این دانشمند را برای ما روشن می‌کند. ضمناً با علم به خاطر منافع بشریت هم هماهنگی دارد. ریاضیات دکارت انقلابی در تفکر ریاضی است. اما انسان‌شناسی و جهان بینی او به سمت

مادی‌گرایی سوق یافته است، هر چند که او خود عقاید مادی‌گرایانه ندارد. علم‌شناسی او تحت این فلسفه محدود به ذهن می‌شود. اما هنوز اینکه می‌گوید باید علم را از نو بنا کرد و با بدیهات عقلی شروع کرد ایده‌ی مهمی است. ولی نمی‌توان گفت که افرادی چون ابن‌سینا و ابوریحان بیرونی و سایر بزرگان علم در تمدن اسلامی از آن بی‌بهره بوده‌اند. در واقع، انقلاب دکارت، انقلابی در مسیحیت قرون وسطایی و جامعه انسانی متأثر از آن بود.

عثمانیان و صفویان که در این اوقات برسر شیعه و سنی نزاع داشتند، برای بار دوم تمدن غرب را آسوده گذاشتند تا با آرامش به پیشرفت نائل شود. همان اتفاقی که بعد از فیثاغورس بین ایران و یونان افتاد. همین اتفاق هنگام جنگ جهانی اوایل قرن بیستم منجر به فرار دانشمندان غربی به آمریکا شد و در واقع تمدن اروپایی را به آمریکا منتقل کرد.

شاید بتوان گفت که دکارت تفکر اصل موضوعه‌ای هندسه را به الهیات، انسان‌شناسی و شناخت‌شناسی توسعه داد و این کاری بود که مسلمانان که به کاربردها متوجه بودند به آن گرایش نداشتند. همین امروز هم جای آن هست که سرمایه‌های فکری تمدن اسلامی به زبان اصلی موضوعه‌ای بیان شود. یعنی مبانی فکری آن‌ها با کمترین مقدمات ساخته شود. از بین تفکرات دکارت بنا کردن ادراکات نسبی بر ادراکات مطلق با جهان بینی و انسان‌شناسی اسلامی هماهنگی دارد و این راه را برای تفکر اصل موضوعه‌ای باز می‌کند.

فلسفه‌ی فرانسه‌ی قرن هفدهم

فلاسفه‌ی قرن ۱۷ را که تحت تاثیر دکارت بودند، کارتزین می‌خوانند. قرن هفدهم همزمان با شکوفائی تمدن فرانسوی و عصر لویی ۱۴ بود. پاسکال از فلاسفه و ریاضیدانان فرانسوی هم عصر دکارت بود که در کودکی چند قضیه از قضایای هندسه اقلیدسی را پیش خود اثبات کرد و در جوانی رساله‌ای در مشکلات علم هندسه و حساب نوشت و ماشین حساب مکانیکی را اختراع کرد. در حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و حساب احتمالات نیز مقدم بوده است. در هندسه‌ی تصویری هم تحقیقاتی دارد که ادامه‌ی کارهای دکارت است.

پاسکال جهان را نامتناهی می‌داند و علم به مبداء و معاد را فراتر از خرد انسان. محبت را فراتر از عقل می‌داند و محبت به خداوند را، چون به ذات تعلق می‌گیرد نه به صفات، شریف‌ترین نوع محبت می‌داند. اعتقاد دارد که به وجود خداوند دل گواهی می‌دهد. دل دلایلی دارد که در دسترس عقل نیست.

مالبرانش نیز از حکمای دکارتی است که در مابعد الطبیعه بیشتر از سنت آگوستین پیروی می‌کند. منشاء خطای انسان را گرفتاری روح در بدن می‌داند و حواس را مسئول خطاها می‌داند و همچنین توهم، ناشی از آن‌ها. علم و ادراک انسان و اراده و افعال او را از خدا می‌داند. انسان هرچه می‌بیند در خدا می‌بیند. خدا را بدون واسطه می‌بیند و مخلوق را در خدا. روح اتصالش در واقع به خدا است، اما انسان چنان گناهکار شده که روح به تن متوجه گردیده است. مالبرانش در ریاضیات به تحقیقات دکارت اکتفا می‌کند.

اسپینوزای هلندی نیز از حکمای دکارتی است. جمله‌ی او معروف است که من نمی‌دانم که فلسفه ام بهترین است یا نه، ولیکن خود آن را حق می‌دانم. اطمینان من به آن همان اندازه است که شما اطمینان دارید مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است. فلسفه‌ی اسپینوزا به نوعی همان فلسفه قدیمی وحدت وجود است. جالب اینجاست که از فلاطون تا سنت آگوستین و حکمای یهودی و اسلامی که به این فلسفه اعتقاد داشته‌اند و مالبرانش که مقدمات دکارتی را فراهم آورده و اسپینوزا همه حکمای الهی هستند و دانشمند نیستند و این فلسفه به رشد علم کمکی نکرده است. در مورد ملاصدرا هم چنین بوده است البته اسپینوزا روش ریاضی دکارت را پذیرفته و کتاب اخلاق خود را به سبک اصل موضوعه‌ای نوشته است.

فلاسفه‌ی فرانسوی در قرن ۱۷ بیشتر تلاش می‌کردند فلسفه‌ی مادی گرای دکارت را با معنویات پیوند دهند و در نهایت هم موفق نشدند. فقط فلسفه‌ی الهی او را کامل کردند. اما بین علوم الهی و علوم کاربردی پیوند محکمی نساختند. نکته مهم در فلسفه اسپینوزا این است که حکمت او حکمت اشراق است، اما روش او روش مشاء. او فلسفه‌اش را مانند ابن‌سینا بر و اجب الوجود بنا کرد. گوشه نشینی دکارت و اسپینوزا علامت این است که فلسفه ایشان با عصر ایشان هماهنگ نبود، هر چند بر عصرشان بسیار تاثیرگذار بودند.

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات فرانسوی متاثر از فلسفه

دزارگ با کمک هندسه تصویری به همجنس بودن مقاطع مخروطی پی برد. در هندسه‌ی تصویری خطوط موازی در نقطه‌ای در ∞ متقاطع‌اند. پس از او پاسکال قضایای ناوردا تحت تبدیلات افکنشی یا تصویری را بررسی کرد. این‌ها همه تحت تاثیر تحقیقات دکارت در هندسه‌ی تصویری است در پرسپکتیو کاربرد دارد.

فرما و پاسکال مفهوم احتمال را ابداع کردند و درباره‌ی محاسبه‌ی احتمال و ارتباط اعداد مثلث پاسکال با آن احکامی را به دست آورند. هویگنس مسائل چند متغیره با بیش از دو بازیکن را بررسی کرد و به مفهوم امید ریاضی دست یافت. این‌ها تحت تأثیر مسائل مربوط به قمار بودند. احتمال نوعی عددمند کردن شرایط ممکن الوقوع است.

والیس اعداد مختلط را با ایده‌های هندسی مربوط کرد، با این استدلال که اگر عدد منفی هم عدد است، باید بتوان همان محاسبات و مفاهیم را برایش مطرح کرد؛ مثلاً مفهوم میانگین هندسی $\sqrt{-ab}$باید قابل محاسبه باشد. فرما روش نزول نا متناهی را ابداع کرد و برای حل معادلات دیوفانتی به کار برد. این‌ها همه تحت تأثیر اعداد منفی دکارت و حل صحیح معادلات دیوفانتی بدست آمدند.

در ترکیبات، فرما و پاسکال تکنیک‌های شمارش را برای محاسبه احتمال به کار بردند. این محاسبات که در ترکیبات هندی سابقه داشت، توسط لایبنیتز که به فرهنگ‌های شرقی علاقه داشت معرفی شد. این‌ها هم تحت تأثیر رویکرد عددمند کردن دکارتی انجام گرفت. ماشین حساب توسط پاسکال برای سهولت محاسبات تحت تأثیر سنت

ابزارسازی اختراع شد. سپس ماشین حساب تکمیل یافته‌های لایبنیتز ساخته شد که منجر به این ایده که ماشینی برای منطق درست کنیم شد.

تأسیس انجمن سلطنتی لندن در ۱۶۶۲، تأسیس آکادمی علوم فرانسه در ۱۶۶۶ صورت پذیرفتند. تأسیس آکادمی علوم برلین در ۱۷۱۴، تأسیس آکادمی علوم آلمان در ۱۷۰۰ هر دو توسط لایبنیتز و تأسیس آکادمی علوم سن پطرزبورگ در ۱۷۲۴ به پیشنهاد لایبنیتز تحقق یافتند. مجله Eruditorum Acta در ۱۶۸۲ با چاپ کارهای لایبنیتز و برنولی‌ها شروع به کار کرد و در اینجا بود که جوامع علمی شروع به کار کردند و بیشتر دانشمندان به دانشگاه‌ها پیوستند و علم تحت تأثیر دکارت هویت مستقلی در بین ساختارهای اجتماعی به خود گرفت.

لایبنیتز عصاره‌ی ریاضیات فرانسه

لایبنیتز آلمانی بود، اما مانند بسیاری از متفکران اروپایی تحت تأثیر فرانسه و حکمای آن قرار گرفت. او در واقع آغازگر مکتب فلسفی و علمی آلمان بود. در جهت قوت ایالات ضعیف کشورش کوشید و توجه پادشاه فرانسه را به جنگ به عثمانیان به دلایل دینی معطوف کرد. مانند دکارت و نیوتن، لایبنیتز مردی با ابعاد بسیار بود که جز در جوانی بر تحقیقات ریاضی تمرکز کامل نداشت. فلسفه او، بسیاری از مسائل مهم فلسفه دکارت را مورد بحث قرار می‌دهد و او را کم و بیش کارتزین می‌دانند.

لایبنیتز در جوانی سفرهای علمی مهمی کرده که از مهمترین آن‌ها سفر او به انگلستان و شرکت د رجلسات اعضای انجمن سلطنتی بود. ایده‌هایی از مماس‌ها را هم از درس ایزاک بارو استاد نیوتن اخذ نمود. لایبنیتز هندسه و جبر را در چارچوب آنالیز(سری‌های نا متناهی) که پایه حساب دیفرانسیل انتگرال بود، به هم مربوط کرد و از این لحاظ ادامه دهنده‌ی نهضت فرانسوی همنشینی جبر و هندسه محسوب می‌شود. او بی‌نهایت کوچک‌ها را حقیقی می‌دانست و فلسفه‌ای بر مبنای منادها بنا کرد. می‌بینیم که ریشه‌های مهم‌ترین کارهای ریاضی او از تحقیقات انگلیسی‌ها تأثیر پذیرفته، لذا فلسفه انگلیسی در شکوفایی حسابان نقش بسیار مهمی را به عهده داشته است.

فلسفه انگلیس در قرن هفدهم

هابز مانند دکارت و فرانسیس بیکن، از دشمنان حکومت فلسفه اسکو لاستیک بر بنیاد علم بود. هابز از دکارت مادی‌گراتر است. از دیدگاه هابز، فلسفه و علم فقط به جسم می‌پردازد. جسم طبیعی یا جسم اجتماعی و مدنی. فلسفه یعنی تجزیه و ترکیب که تنها به اجسام تعلق می‌گیرد. نفس هم غیر جسمانی نیست. و از اجسام و حرکت آن‌ها معنی پیدا می‌کند. فلسفه یعنی شناخت معلول‌ها به علت و شناخت علت‌ها به معلولشان به وسیله استدلال. در

نتیجه هابز به مسائل سیاسی و اجتماعی انگلیس علاقمند بود و در آن شرکت می‌کرد. با دموکراسی مخالف بود و از شاه طرفداری می‌کرد.

لاک نیز مخالف فلسفه اسکولاستیک بود. لاک در کتاب«تحقیق در فهم و عقل انسانی » به این مسئله که انسان چگونه علم پیدا می‌کند، پرداخت. لاک با فلسفه‌ی معانی فطری دکارت مخالف بود. لاک از مؤسسان روانشناسی علمی است. او اعتقاد ندارد مفاهیم تساوی، یگانگی، جزء وکل جوهر، خدا و پرستش فطری هستند. او آخرین باریکه‌های ارتباط با متافیزیک را قطع می‌کند. لایبنیتز با لاک مخالفت کرد و در مقابل کتاب او«درباره‌ی علم انسان»، کتاب«تحقیقات تازه درباره‌ی فهم و عقل انسانی» را نوشت.

در نظر لاک علم همان درک سازگاری و ناسازگاری تصورات و معانی در ذهن ماست. لاک هم مانند هابز فلسفه اخلاقی و فلسفه سیاسی داشت که بر انسان‌شناسی او بنا شده بود. نتیجه اینکه حکمای فرانسه هیچ کدام به اندازه دکارت مادی‌گرا نبودند، ولی حکمای انگلیسی دکارت را هم پشت سر گذاشتند و عالم انسان را بر حسب جسد و ذهن مادی تبیین کردند.

هابز ریاضیدان قابلی نبود. لاک اصلاً به ریاضی نمی‌پرداخت، فلسفه‌های هابز و لاک تأثیری بر روند تفکر علمی در انگلستان نداشتند. چرا که این فلسفه دانشمندان است که بر حرکت ریاضیات و فیزیک به‌پا کرد که تاصد سال متفکران کور کورانه آراء فلسفی نیوتن را که در کنار مدل‌های ریاضی او وارد عمل شده بود، می‌پذیرفتند. حتی امروز هم نزد عامه تصوری که از علیت و علم و فضا و زمان وجود دارد، تحت تأثیر نیوتن است و صد سال پس از انیشتین، هنوز عامه نتایج فلسفی ریاضیات و فیزیک انیشتین را درک نکرده است.

میوه‌دهی این تفکرات در انگلستان، به این دلیل است که، آن‌ها چندین فیلسوف دانشمند مانند دکارت داشتند که تفکر علمی قرن هفدهم انگلستان را غنی‌تر از فرانسه نمود و در نهایت، این همه همین یک نیوتن را ثمره داد. در صورتیکه فرانسه چندین ریاضیدان توانا ثمره داد که هر یک البته به نیوتن نمی‌رسیدند. شاید بتوان گفت تفکرات متافیزیک در انگلیس اندکی بیشتر تأمل کرد، تا شکوفا شود. می‌گویند، غنچه‌هایی که دیرتر شکوفا می‌شوند زیباترین غنچه‌ها هستند.

فصل ۵

دیدگاه‌های فلسفی مستتر در ریاضیات عصر نیوتن

نیوتن(۱۷۲۷-۱۶۴۲) که عصاره ریاضیات قرن هفدهم در مکتب انگلستان بود، تأثیراتی بسیار تعیین کننده در جهت علوم پایه در قرن ۱۸ گذاشت. از این رو انگلستان قرن ۱۸ را عصر نیوتن نامیدیم. انقلاب نیوتن در ریاضیات موجب خلق آنالیز و در فیزیک سبب آغاز رسمی فیزیک افلاطونی شد. نیوتن تحت تأثیر فلسفه‌ی قرن ۱۷ انگلستان و استادانش به خصوص ایزاک بارو بود. پایه‌های ریاضی فیزیک نیوتنی بر حساب دیفرانسیل انتگرال استوار نشده بود و ۲۰۰ سال طول کشید تا حساب دیفرانسیل و انتگرال ساختار منطقی محکمی پیدا کند. اما پس از آن فیزیک نیوتنی به راحتی بر حساب دیفرانسیل و انتگرال سوار شد. خانواده برنولی(سوئیسی) نقش عمده‌ای در این فرمول‌بندی داشتند.

تحت تأثیر نیوتن، علم چنان از فلسفه کنار کشید و بر پای خود استوار شد، که بهتر است به جای دیدگاه‌های فلسفی مستتر در ریاضیات عصر نیوتن، بگوییم دیدگاه‌های فیزیکی مستتر در این ریاضیات. یاکوب، یوهان و پسرش دانیل برنولی پوش شعارهای نوری که انعکاس یافته‌اند یا شکسته شده‌اند را مطالعه کردند، که منجر به مفهوم خمیدگی یا اغنای خم و بسیاری از خم‌های معروف در حسابان شد. یاکوب مختصات قطبی را معرفی کرد و خم پیچ لگاریتمی را ساخت. یاکوب‌برنولی و تیلور، سری تیلور را از کارهای نیوتن و لایبنیتز استخراج کردند و در حل معادلات دیفرانسیل و مطالعه خم‌های در صفحه استفاده کردند. دالامبر محک نسبت را برای همگرایی سری ارائه کرد و حسابان را به اعداد مختلط توسعه داد.

چند کتاب در سی مهم جایگاه حسابان را محکم کرد. کتاب‌های هوپیتال فرانسوی، اگنسی ایتالیایی و اویلر سوئیسی مهم‌ترین نقش را ایفا کردند. اویلر هندسه تحلیلی در بعد ۲و۳، سری‌های نا متناهی مختلط، و تئوری سیستماتیک توابع جبری و مثلثات مدرن را موضوع کتاب خود قرار داد. در کتاب دیگری نیز به معادلات دیفرانسیل پرداخت. شکل کلی ریاضیات قرن هجدهم تحت تأثیر اویلر شکل گرفت و الهام دهنده بسیاری از ریاضیدانان قرن ۱۹ مانند آبل بود.

این سنت حل معادله چین بود که از طریق خوارزمی به اروپا انتقال یافت و پس از اختراع حسابان به این شاخه ریاضیات نیز حلول کرد. گفتیم که معکوس کردن روند محاسبات حتی در تمدن بابل نیز دیده می‌شد. تأکید ریاضیات قرن ۱۸ مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط حسابان نیوتنی بود و اینکه چه معادلات دیفرانسیل خاصی به طور طبیعی ظاهر می‌شوند و چه توابع خاصی در طبیعت اهمیت دارند. در این بین اعداد مختلط جای خود را به خوبی باز کرد. چه به خاطر کمک‌های منطقی که به استحکام مبانی حسابان می‌کرد، چه به خاطر فرمول‌بندی‌های

ساده‌تر به کمک اعداد مختلط، چه به خاطر ظهور طبیعی در محاسباتی که غیر قابل اجتناب بود. این‌ها مقدمات ظهور تئوری توابع مختلط در قرن ۱۹ را به وجود آورد.

فلسفه‌ی انگلیس در قرن هجدهم

فلسفه انگلیسی در قرن ۱۸ بسیار جلوتر از فلسفه فرانسه در قرن ۱۸ بود که منجر به ظهور کانت، انقلابی بزرگ در تاریخ فلسفه علم گردید. کشیش، باستان شناس جغرافی‌دان، جهان‌گرد و اقتصاددان انگلیسی، برکلی(۱۶۸۵-۱۷۵۳) در جوانی چنان به کمال رسید که در ۲۴ سالگی شروع به نگارش فلسفه‌اش کرد. از مهم‌ترین آثار می‌توان از: در چگونگی ابصار، مبادی علم انسان، خرد و فیلسوف نام برد.

برکلی به نظرات مالبرانش، لایبنیتز و لاک نظر خاص داشته است. ادراک را روحانی می‌دانسته و وجود را فقط برای مدرک و مدرک قائل بوده. لاک وجود را برای بعد و حرکت و شکل حقیقی می‌دانسته، اما برکلی همه را منتسب به حس می‌کرد. معنی مصطلح بین مردم برای کلمه وجود را قبول نداشت. جوهر جسمانی را حقیقی نمی‌دانست. باور داشت که ذهن ایجاد صور می‌کند و آن تحت تأثیر ذات باری تعالی است. محسوسات را معنی و احساسات را چون لفظ می‌دانست. او اعتقاد داشت با این فلسفه روحانی، مذاهب فاسد مادی و انکار روح بی‌معنی می‌شود؛ و شرک و بت پرستی و بی دینی از میان می‌رود و مانند آن.

فیلسوف دیگر هیوم(۱۷۷۶-۱۷۱۱) اسکاتلندی بود که حقوق و تجارت قانعش نکرد. رساله‌ی«درباره‌ی طبیعت انسان» را در ۲۸ سالگی نوشت. به تاریخ نویسی روی آورد و تاریخ اجتماعی هم نوشت. معاون وزیر شد، ولی زندگی سیاسی را نپسندید. هیوم مقدمات را برای انقلاب فلسفی کانت فراهم کرد. او بحث راجع به حقیقت جسم و روح را بی‌حاصل می‌دانست. به نظر هیوم، ابتدا باید دید انسان تا چه حد توانایی دانش و معرفت دارد. علم هر چه باشد نتیجه عقل انسان است. میزان عقل را ابتدا باید به دست داد. در مشخص کردن شرایط حصول علم و حکمت و منشأتصورات فلسفی همان روش تجربه را باید اختیار کرد. مثلاً می‌گفت: «اگر قواعد حرکت ستارگان را می‌توان یافت، چرا باید ناامید بود که قواعد عقل خود را نمی‌توانیم بشناسیم؟ »

هیوم باور داشت که علم انسان خلاصه تجربیات اوست و محدود است به محسوسات او. آنچه که برکلی ذات و جوهر می‌خواند، که نفس یا روح اصل است، هیوم مجموعه‌ای از تصورات می‌خواند. از نظر او حقیقت علیت نیز مشخص نیست. انسان باید به دنبال خوشی باشد برای خوشی باید کار پسندیده بکند و سود خود را در سود دیگران بداند و آنچه نزد همه اقوام پسندیده است مثل راستگویی، دلاوری، جوانمردی و آزادگی اصالت دارد و آنچه در آن اختلاف نظر هست قرار دادی است. در واقع هیوم ناقد فلسفه است. نقادی او تشکیک در وجود و ذات است. نقادی فلسفه و علم را فرانسیس بیکن آغاز کرد و به ترتیب به لاک، برکلی، هیوم و کانت به ارث رسید.

متافیزیک در فلسفه قرن هفدهم بریتانیا

تحت تأثیر بیکن در قرن ۱۶، انگلستان از گرایش‌های کلامی–دینی آسوده‌تر بود. از دیدگاه بیکن علم یک کار تعاونی است و دوری از فرضیات خیال پردازانه باید در دستور کار دانشمندان قرار بگیرد. هابز در راه مخالفت با دکارت، ذهن و اندیشه را هم حرکت دانست، اما از نوع مادی. هندسه را «علم حرکت بسیط» می‌دانست که با آراء انشتین و هندسه مدرن قرن ۲۱ سازگار است. او ارتباط بین ظاهر و باطن، عالم اندیشه و عالم خارج را بسیار مورد تأکید قرار داد، اما با همان دید گاه مادی‌گرا به ذهن. بنابراین«اصل علیت مکانیکی» دکارت را به سراسر عالم طبیعت و اندیشه توسعه داد. هابز سعی کرد که بشر و طبیعت را دوباره توسط ریاضی به هم پیوند دهد، اما موفق نشد. تلاش‌های او به خصوص در روانشناسی و زیست‌شناسی متمرکز بود.

مور«امتداد»را از جنس روح می‌دانست. روح و جسد را متمایز می‌دانست، ولی ثنویت دکارتی را هم نمی‌پذیرفت. می‌گفت، ذرات تجزیه ناپذیر ماده شکلی ندارند. «آنکه عظمتش نامحدود است، شکلی ندارد و آنکه حقارتش نامحدود است، شکل ندارد. » «نفس پس از مرگ در بدن اثیری حلول می‌کند».

نکته مثبت آراء مور این بود که او روح برای ماده قائل شد نه فقط برای انسان که شاید راه حلی برای مشکل گالیله باشد. مور به ابعاد مجرد طبیعت پی برد. روح طبیعت را به مثابه‌ی روح جهانی افلاطون می‌دانست. از نظر او نفس کلی یا روح طبیعت اولین نایب خداوند است. ظهورات روح یکنواخت است، پس قابل مطالعه علم است. نظم عالم گواه بر روح حاکم بر آن است. زمان و مکان محضر ربوبی هستند. توجه کنید که از نظر دکارت ماده و مکان یک چیز هستند.

صفات مشترک بین فضای مطلق و خداوند از دیدگاه مور بدین قرارند: واحد، بسیط، ثابت، ازلی، ابدی، کامل، مستقل از غیر، قائم بالذات، متقرر بالذات، فسادناپذیر، ضروری، واسع، نامخلوق، احاطه ناپذیر، ادراک‌ناپذیر، حاضر در همه جا، غیر جسمانی، حاوی و منتشر در همه چیز، موجود متجوهر، موجود بالفعل، فعلیّت محض.

در مورد مکان سه نظریه از مور به‌جا مانده است: ۱- مکان همان و سعت و حضور همه جایی جوهر ربوبی است. ۲- مکان همان امکان حضور ماده است. ۳- مکان همان خداست. او مکان را موجودی روحانی می‌داند و ظهوری مشوش و نارسا از ذات الهی، نه از افعال و صفات. یعنی مکان همان خداوند است از آن حیث که همه جا حاضر است نه از حیث حیات و قدرت. مور در تفکر مابعد الطبیعی نیوتن تأثیر بسیار گذاشت.

همه این گرایشات فلسفی در انگلستان تحت تأثیر عمیق فرانسیس بیکن اتفاق افتاد. به گفته فرانسیس بیکن موانع سر راه روشنفکر به چهار نوع تقسیم می‌شود: بت قبیله(محدودیت‌های تفکر بشری)، بت غار(تعصبات و تعلقات فردی)، بت بازار(زبان)، بت نمایش خانه(مصادرات و مبادی و اصول فللسفه و منطق)

ایزاک بارو

نیوتن شاگرد او بود و دروس هندسی او را پس از تجدید نظر منتشر کرد و خود یک درس به آن اضافه کرد: ریاضیات چیست؟» عقاید ایزاک بارو در مورد ریاضیات بدین قرارند: ریاضیات به عنوان باطن و فیزیک به عنوان ظاهر مرتب هستند»، علم هندسه بالذات ریاضی است». « جبر، نه جزء ریاضیات، بلکه منطق معمول در آن است». «حساب مندرج در هندسه است»، «ریاضیات علم کمیت‌ها ست».

درک اینکه ریاضی چیست و مراتب هستی آن کدام‌اند، سوال مورد نظر بارو بود. از دیدگاه او ریاضی علم اندازه‌گیری است. بارو ۸ دلیل برای یقینی بودن هندسه ارائه کرد: وضوح تصورات هندسی، چند پهلو نبودن تعاریف و مصطلحات ریاضی، اطمینان قلبی، تصدیق همگانی نسبت به صحت اصول آن، سهولت درک، چگونگی ایجاد مقادیر و کمیت، سهولت تعقیب توالی براهین، و اینکه ریاضی‌دانان از آنچه نمی‌دانند در می‌گذرند.

از دیدگاه بارو سرچشمه اصلی عقل است: دایره کامل را چه کسی دیده است؟ براهین صدق فرضیات را مفروض می‌گیرند و فرضیات وجود اشیاء را فرض می‌کنند. وجود شی مستلزم وجود علت فاعلی و آن مستلزم خداست که علت فاعلی همه چیز است. تمرکز به فلسفه وجود مشخصه‌ی فلسفه‌ی ریاضی او بود. باور داشت که «فضا را مستقل از خداوند دانستن و برای ماده و سعت بی‌نهایت قائل بودن خلاف شرع است»، «زمان و مکان پیش از بنای عالم بوده، اما فقط به عنوان ظرفی برای بقاء». «زمان و مکان مطلق حقیقی است اما نه مادی».

گیلبرت و بویل

همانطور که مور قائل به روح طبیعت بود، گیلبرت نیز قائل به روحانی بودن نیروی مغناطیس بود. چون اثرش بی‌خطا، سریع، موثر در دور است. بلکه اعتقاد داشت روح زمین همان قوه مغناطیس است. غیر جسمانی است، ولی لطیف و جسمانی رقیق است، همچون سیاله‌هایی که تا فواصلی خاص بیرون فرستاده می‌شوند. او تحت تاثیر تفکرات مادی‌گرایانه‌ها بر قرار گرفته بود.

آراء بویل چنین اند: «و ظیفه‌ی ما درک جمیع حقایق و آرائی است که عقل خدا داده و فارغ از تعصبات انسانی می‌تواند به مدد تعلّم، تامل، تمرین و تجربه به آن‌ها برسد». «عقل را باید با تجربه مدد رساند». «طبیعت چون یک مهندس عمل می‌کند». «اصول ریاضی الفبایی هستند که خداوند کتاب طبیعت را با آن نگاشته است». معارف وحیانی را باید چنان تفسیر کرد که با اصول ریاضی ناسازگار نیافتد». «خداوند در خلقت عالم همچون یک ریاضیدان، موافق اصول ریاضی رفتار کرده است». «طبیعت همان حوزه‌ی عمل قوانین مکانیکی است». او تبیین جاذبه و نیرو با روح طبیعت را نمی‌پذیرفت.

بویل در واقع فرض کرد که ما می‌دانیم ریاضیات چیست و باید دانسته‌های دیگر را با آن تطبیق کنیم. بویل ثنویت دکارتی را می‌پذیرد و حوزه انسانی را از حوزه ریاضیات جدا می‌کند. انسان به دلیل عقل و اراده تحت جبر و قهر هیچ آفریده در نمی‌آید. (این عقاید ریشه دینی– کلامی دارد) او با نظر مور مخالف است و روح را جوهری مجرد و بدون امتداد می‌داند. روح غیر مادی و لذا نامیراست. او نسبت به معرفت بشری، نظری بسیار متواضعانه داشت. مردم باید چنان کار علمی کنند که گویی عبادت دینی می‌کنند. از نظر بویل روح آدمی عین ذهن است.

نیوتن و متافیزیک

شخصیت علمی نیوتن در برابر شخصیت مابعدالطبیعی او غالب است. او از حرکت ظاهری شروع می‌کرد و سعی می‌کرد با استنتاج قوانین پشت‌صحنه را کشف کند. می‌توانست از متافیزیک شروع کند و سعی کند آن را با حرکت مربوط نماید. مثلا می‌شود با درک بهتر طبیعت حقایق ریاضی درک قوانینی که ممکن است در طبیعت صدق کنند، پیدا کنند، پیدا کرد. نیوتن استفاده از روش‌های جبری مانند مشتق را در برابر روش‌های هندسی برای درک طبیعت انتخاب کرد. او توانست ریاضیات را برای درک بهتر طبیعت بسط دهد. به ریاضیاتی که چنین نمی‌کرد توجه نداشت.

تاکید نیوتن بر قوانین تجربی و حساسیت او برعلیه فرضیات فیزیکی یا متافیزیکی نشان می‌دهد که او سعی داشته ادراکات ملموس و مجرد را جداگانه بررسی کند و ادراکات هم جنس را در علم به هم مربوط کند. درجه‌ی تعمیم تفکرات فلسفی نیوتن از حیطه‌ی تجربه فراتر نمی‌رفت. روش تجربی ریاضی نیوتن را می‌توان در سه مرحله خلاصه نمود: ۱- ساده کردن پدیدارها به مدد آزمون‌های حسی. ۲- تصرف و تعمل ریاضی. ۳- اجرای آزمون‌های دقیق تا هم درجه‌ی کلیت ریاضیات مربوطه را تخمین بزند و هم فاکتورهای دیگر را شناسایی کند. برای مثال، حقیقت نیرو مورد مطالعه نیوتن نیست، بلکه فقط می‌خواهد روش عمل آن را بفهمد و این با ادراک‌های همجنس و غیر همجنس هماهنگ است.

درباره‌ی انسان و جهان خلقت، نیوتن پیرو گالیله و دکارت بود. باور داشت که انسان تصویری از حقیقت را می‌فهمد و خداوند عین حقیقت را. روح را همان ذهن و محصور در غده‌ای می‌دانست. «من فرضیه نمی‌سازم». جمله‌ی معروف او همان اصل موضوع دکارت است. روش او این بود که راه حل‌های ممکن برای یک مسئله را تصور کند، مشکلات ریاضی آن را برطرف سازد و با محاسبه آن‌ها را بیازماید.

نیوتن کتاب مقدس را با همان شوق و ذوقی که به مطالعه‌ی کیهان داشت، مطالعه می‌کرد. یکی از اسقف‌های اعظم در تحسین او گفته است: «شما الهیات را بیش از همه‌ی ما می‌دانید.» و لاک درباره‌ی دانش او از کتاب مقدس گفت: «کم‌تر کسی را به پایه‌ی وی می‌شناسم». روحانیون ابتدا از تاثیر اصول نیوتن در مذهب سخت بیمناک بودند. ولی دوستان او آنان را قانع کردند که جهان بینی جدید، با تاکید بر وحدت نمایان، نظم و شکوهمندی جهان، به منزله‌ی نشانه‌هایی از خرد، قدرت و جلال خداوند است و تکیه گاهی است برای ایمان مذهبی.

هرچند بسیاری از یکتا پرستان تئوری نیوتن را با یکی دانستن خداوند با طبیعت و قوانیننش پذیرفتند، اما در نهایت تصور عموم این بود که او دنیایی قائم به ذات را تصور کرده و وجود خداوند فقط تسلی دهنده‌ی این ساختار است و نیوتن تنها نقش چاره‌اندیشانه برای خداوند قائل شده است. نیوتن با همه‌ی موفقیت‌های علمی خود، دربرابر اقیانوس حقیقت خود را چون کودکی می‌دیده است.

فضا-زمان از نظر نیوتن

گالیله و دکارت حقیقت مکان و بارو حقیقت زمان را کشف و صورتبندی کرده بودند. نیوتن مفهوم جرم را با وزن تمایز داد و این در درک ریاضی تأثیر فضا و زمان بر پدیده‌های طبیعی مهم بود. به عقیده نیوتن، زمان مطلق خود به خود و بدون نسبت به هیچ امر خارجی جریانی یکنواخت دارد و فضای مطلق همواره حرکت ناپذیر و متشابه الاجزاء است. حرکت مطلق یعنی انتقال در فضای مطلق در بستر زمان مطلق و تغییر در حرکت مطلق به و اسطه نیرو ممکن است.

نیوتن اعتقاد داشت: «در پژوهش فلسفی باید اشیاء را فی نفسه و جدا از مقادیر حسی آن‌ها ملاحظه نماییم.»در اینجا می‌بینیم که باز هم ادراک همجنس و غیر همجنس موجب تعمیق تفکر نیوتن شده است. در نقد فکر نیوتن چنین می‌توان گفت که حرکت مادی در فضای مطلق متشابه الاجزاء معنی ندارد. در تفکر نیوتن فضا و زمان دال بر حضور همه جایی و بقای ازلی و ابدی خداوند هستند. نظریات نیوتن در باب اسماء و صفات الهی بدون شک تحت تأثیر آراء ابن‌سیناست(نیوتن معتقد به تثلیت نبود) در عقاید نیوتن رگه‌های Arianism دیده می‌شود.

در قرن ۱۸ که جامه‌ی متافیزیک علم را در آوردند، فضای مطلق اما تهی باقی ماند و این همان چیزی است که مشکل‌ساز شد. این لزوم ظهور نسبیت انشتین را فراهم کرد. نیوتن قائل است به اینکه سامان و جمال و موزونیت کل کیهان، اگر مستمراً حفظ نشود، زایل می‌شود. در قرن ۱۸ با حذف خداوند و حضور معنوی او مشکلات معرفت شناسانه زیادی سر علم کردند.

مبانی حساب‌دیفرانسیل و انتگرال

فرما سعی کرد کتاب آپولونیوس راجع به مکان‌های هندسی را از توصیفات پاپوس بازسازی کند و این منجر به کشف هندسه تحلیلی شد. در واقع او ایده مکان هندسی را جبری کرد و تبدیل به حل معادله نمود.

او نماد گذاری ویت را به کار برد. اما دکارت با در نظر گرفتن واحد طول دیگر مجبور نبود مانند فرما دیمانسیون دو طرف معادله را یکی کند. او هم با کمک هندسه تحلیلی‌اش، به حل مسائل مکان هندسی پاپوس پرداخت.

سه ایده اصلی حسابان، مشتق، انتگرال و سری‌های نامتناهی است. مشتق برای ماکزیمم و مینیمم، انتگرال برای محاسبه سطح و حجم، و سری‌ها برای محاسبه تابع توانی، لگاریتم و توابع مثلثاتی. در مسائل فیزیک این سه با هم متحد می‌شوند. مشتق برای بیان پدیده‌ها به صورت معادله‌ی دیفرانسیل، انتگرال برای حل آن و سری‌های توانی برای تقریب زدن انتگرال‌هایی که با توابع ابتدایی قابل بیان نیستند. مشتق و شیب دو مفهوم به طور منطقی معادل، اما به طور روانشناسانه متفاوت بودند.

مرحله‌ی اول در تاریخ حسابان این بود که مسائل هندسی مربوط به مماس برخم و حجم محدود شده به خم، با جبر و ایده‌ی حد حل می‌شوند. در مرحله‌ی دوم، تکنیک‌های ایزوله به صورت مجموعه‌ای متحد از الگوریتم‌ها در آمد که منجر به اختراع حسابان شد. مرحله سوم، محکم شدن مبانی ریاضی حسابان و کاربرد گسترده‌ی آن د رمسائل فیزیک و نجوم بود.

مسئله رسم مماس چنین بود: از نقطه‌ای بر خم با کمک خط کش و پرگار مماس رسم کنیم و مستلزم پیداکردن نقطه‌ای دیگر از خط یا زاویه آن با خط دیگری است. روش دکارت، رسم نرمال بود. بدین روش که معادله‌ی دایره‌ی گذرنده از نقطه را با معادله خم اشتراک می‌دهیم و حالتی را در نظر می‌گیریم که فقط یک نقطه اشتراک داشته باشیم. از طرف دیگر در روش فرما برای پیداکردن کمینه و بیشینه، بیشینه خط مماس باید محور xها را قطع نکند. این معادله جواب را می‌دهد.

روش کاوالیری برای محاسبه حجم مبتنی بر این فلسفه است که مساحت مجموع طول‌هاست و حجم مجموع مساحت‌هاست. روش فرسودن به مفهوم انتگرال نزدیکتر است: مساحت مجموع مساحت مستطیل‌هاست. همین تعریف سطح است که منجر به محاسبه سری‌های توانی شد. این روش توسط فرما، پاسکال و کپلر به کار رفت. و الیس(۱۶۱۶-۱۷۰۳) در ۱۶۵۵کتاب حساب نا متناهی را نوشت و به محاسبه سری‌های نامتناهی پرداخت. در قرن ۱۷ چندین فرمول شامل سری‌های نامتناهی توسط و الیس، ویت، منگولی(ایتالیایی) و گریگوری(اسکاتلندی) ارائه شد. نیوتن بسط دو جمله‌ای را در ۲۳سالگی ارائه کرد. ارتباط بین مسئله مماس و مساحت اولین بار در کتاب بارو ظاهر شد که به گریگوری نسبت داده شده بود. همین طور فرمول مشتق زنجیری اولین بار توسط ایزاک بارو مطرح شد: $\int \frac{y}{y} dy = \int y dx$

نیوتن ابتدا فرمول $\int \frac{y}{y'} dy = \int y dx$ را برای r گویا با کمک بسط دو جمله‌ای پیدا کرد. او مشتق و انتگرال را با نام‌های fluxionو fluent به کار برد و مشتق رابا کمک سرعت معرفی کرد؛ به این بهانه که زمان مثال خوبی برای یک متغیر مستقل است و او خمیدگی، مساحت و مماس را برای بسیاری از خم‌های معروف به دست آورد. مشکل فلسفی نیوتن حدهای بی‌نهایت در مقادیر متناهی و موارد مشابه ورود ∞ به محاسبات بود. او با روش‌هایی فلسفی جهت پاسخ به این سؤالات حمله برد، اما تنها در زمان کوشی این مسئله حل شد.

کتاب اصول ریا ضی فلسفه طبیعی

از دیدگاه نیوتن وظیفه کلی فلسفه طبیعی در این نهفته است که نیروهای طبیعت را باید از روی پدیده‌های حرکت تحقیق و بعد، از روی این نیروها، پدیده‌های دیگری را ثابت کرد. وی ترکیبی از ریاضیات و تخیل بود و کسی که این دو را ندارد، نمی‌تواند اورا درک کند. نیوتن در ۲۴ سالگی مشاهده کرد که جاذبه‌ای که ماه را در مدار نگه می‌دارد با نیروی جاذبه در سطح زمین هماهنگ است. از او می‌پرسیدند: قوانین حرکت را چگونه کشف کردی؟ گفت: با اندیشه مداوم به آن‌ها.

قبل از نیوتن ایده جاذبه مغناطیسی توسط گیلبرت مطرح شده بود و نیز اینکه ستارکان برهم تأثیر گذارند. هوک نیز قانون عکس مجذور فاصله را که نیوتن در جوانی کشف کرده بود می‌دانست اما نیوتن چون مطمئن نبود که می‌توان همه جرم را در مرکز ثقل فرض کرد و محاسباتش با تخمین‌های فواصل نجومی هماهنگی نداشت، آراء خود را منتشر نکرد. در دهه ۱۶۷۰ داده‌های نجومی جدید محاسبات او را تأیید کرد و رأی نیوتن برای چاپ نظریه‌اش را برگرداند.

نیوتن به خاطر مشکلاتی که با دیگر دانشمندان بر سر تقدم ایده‌های کتاب اصول داشت، چنین نوشت: «فلسفه همچون زن گستاخ و ستیزه‌جویی است که بهتر است مرد درگیر دعواهای دادگاه باشد تا با او بسازد» اما هالی با وجود فقر مالی هزینه چاپ کتاب را به عهده گرفت و نیوتن را به تکمیل کتاب تشویق کرد. نیوتن در پایان کتاب دوم می‌نویسد: «جاذبه..... بر طبق کمیت ماده جامدی که در آن‌ها وجود دارد عمل می‌کند و خاصیت خود را از هر سو گسترش می‌دهد.... و همیشه به نسبت عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابد».

فرانسه تا اوایل دهه ۱۷۴۰با نظریه گردبادهای دکارت مشغول بود و تا مهر تأیید ولتر در نظریه نیوتن نخورد آن را نپذیرفت. لایبنیتز استدلال کرد که: اگر نیوتن نتواند ثابت کند که مکانیسم گرانش در فضای به ظاهر خالی چه تأثیری بر اشیایی که میلیون‌ها کیلومتر دور از ما قرار دارند می‌تواند داشته باشد، گرانش ارزشی بیش از یک حرف نمی‌تواند داشته باشد. حتی در انگلستان هم چهل سال پس از انتشار کتاب به زحمت ۲۰دانشمند موافق پیدا می‌شد.

نیوتن آشکارا اعتراف کرد که به ماهیت گرانش پی نبرده و با فرض اتر از نیرویی که در خلا تأثیر می‌گذارد فرار کرد. او مادی یا غیر مادی بودن نیروی گرانش را به خوانندگان کتابش سپرد. برای رهایی از اعتراضات مذهبی، شرح کلی در مورد نقش خداوند در دستگاه خود به کتاب اضافه کرد. او اصل بقای انرژی به مدد خداوند ممکن دانست. سرانجام به فلسفه‌ای گرایید که ممکن بود به هر دو وجه مکانیکی و حیاتی تعبیر شود: جاذبه چون روحی است بس لطیف که اجسام جامد قرار گرفته و در آن‌ها پنهان است. اجزاء و ذرات اجسام، بر اثر نیرو و عمل این روح همدیگر را در فواصل کم جذب می‌کنند و اگر به هم نزدیک باشند به یکدیگر می‌چسبند. شعاع عمل اجرام الکتریکی مسافات بیشتر را دربر می‌گیرد و این اجسام اشیای ریز مجاور را، هم به خود جذب و هم از خود دفع می‌کنند. نور پخش می‌شود، منعکس می‌گردد، می‌شکند و منحرف می‌شود، و اجسام را گرم می‌کند و همه احساسات تحریک می‌شوند، و اعضای جسم یک جانور با ارتعاش‌های این روح از مغز به عضلات منتشر می‌شوند.

کتا ب نور شناخت

نیوتن در ۲۴ سالگی از بازار مکاره یک منشور خرید و به تحقیق و به تجربیات نوری پرداخت. در ۲۶ سالگی تلسکوپ‌های متعددی ساخت، به این امید که از عیوب خاص تلسکوپ‌های انکساری در امان باشد. پیش از ساختن تلسکوپ به طیف نور دست پیدا کرده بود. محققان بعدی ثابت کردند که مواد مختلف هنگام سوختن طیف‌های مختلفی از خود ساتع می‌کنند. با مقایسه طیف‌ها با طیفی که از یک ستاره می‌آیند تا حدی شناخت اجزاء متشکله شیمیایی ستاره ممکن می‌شود. حتی با مشاهدات دقیق تر، در مورد سرعت حرکت نسبی آن نسبت به زمین می‌توان قضاوت کرد. نیوتن که به این کارها پی نبرده بود، این کشف را عجیب‌ترین کشف خود دانست نه مهمترین آن.

در ۳۰سالگی نامه‌ای تحت عنوان «نظریه جدید در باره‌ی نور و رنگ»به انجمن سلطنتی فرستاد و چون به تحقیقات هوک ارجاع نداده بود، هوک به مخالفان آن پیوست. هوک از هویگنس که نظریه موجی نور را ابداع کرده بود، پیروی کرد. اما نیوتن اعتقاد داشت که نظریه هویگنس حرکت مستقیم الخط نور را توجیه نمی‌کند و نظریه ذره‌ای نور را مطرح کرد. کتاب نور شناخت را نیوتن در ۶۲سالگی چاپ کرد و نظریات خود در مورد نور را در آن آورد. در پایان کتاب ۳۶ سؤال آورد که در این بین چند سؤال بسیار جلب نظر می‌کنند. سؤال اول «آیا اجسام در مسافتی معین بر نور اثر نمی‌گذارند؟ با عمل خود اشعه آنرا خم نمی‌کنند؟ آیا این عمل در مسافات کمتر نیرو مندتر نیست؟»سؤال ۳۰ام: «آیا ممکن نیست که طبیعت اجسام را به نور و نور را به اجسام تبدیل کند؟»

اوضاع علمی– فرهنگی انگلستان در عصر نیوتن

عامه‌ی اروپاییان قرن ۱۷ ارواح نیک اندیش و بد اندیش را محیط بر طبیعت می‌دانستند و طبیعت را نبردگاه آنان. تساهل و تسامح مذهبی تا اواخر قرن ۱۷ کم‌کم ایده قابل قبولی می‌نمود، بر خلاف اوایل قرن ۱۷. مدارس عمومی و مدارس خیریه برای فقرا در اوایل قرن ۱۸ کم کم پدیدار شد و آموزش و پرورش نقش اجتماعی خود را در آینده جوامع آغاز کرد. خرید و فروش مدارک در دانشگاه‌های اروپا بیداد می‌کرد. شعرا سعی کردند تا در کاربرد تعلیم و تربیت روح تازه‌ای بدمند. پس از استادی نیوتن در کالج ترینیتی علم را در صدر آموزش‌ها قرار دادند. اثر مهم لاک «اندیشه‌هایی چند پیرامون آموزش و پرورش» بر این تغییر دیدگاه‌ها تأثیرگذار بود.

علم در اروپا، از تأکید به ماوراءالطبیعه، به سوی تأکید به تسخیر عالم پیش می‌رفت. عامه و دولتمندان به علوم جدید علاقه‌مند شده بودند. بانوان در کلاس‌های شیمی و کالبدشناسی شرکت می‌کردند و به تماشای شگفتی‌های نیروی مغناطیس مشغول می‌شدند. بعضی ثروتمندان آزمایشگاه شیمی شخصی داشتند. دانشگاه‌ها از این نهضت عقب مانده بودند. اولین آکادمی‌های اسرار طبیعت در ۱۶۵۰ ناپل، ۱۶۵۷ فلورانس، ۱۶۵۲شراینفورت، ۱۶۷۲آلتدروف، ۱۷۱۰اوپسالا، ۱۷۰۰ برلین گشوده شدند.

آکادمی علوم فرانسه بنیادی دولتی بود، ولی آکادمی‌های علمی انگلستان خصوصی بودند و این موجب پیشرفت علم شد. نه تنها دانشمندان بلکه از شاعران، معماران، لردها و اسقف‌ها نیز در آن عضو بودند. کسی فکر نمی‌کرد که علم به زودی ابزار ناسیونالیسم و سپس امپریالیسم و سپس در خدمت شهرت قرار گیرد. در پایه‌های حسابان که ارشمیدس احتمالاًبه آن نظر کرد و کپلر به آن نزدیک شد و فرما آن را کشف کرد، ولی کشفیاتش را منتشر نکرد، افراد بسیاری شریک بودند: کاوالیری و توریچیلی در ایتالیا، پاسکال و روبرو در فرانسه جان و الیس و ایزاک بارو در انگلستان، جیمز و دیوید گریگوری در اسکاتلند، و سرانجام نیوتن و لایبنیتز کار را به پایان رساندند.

هویگنس دانشمند برجسته در عصر پس از نیوتن می‌گفت: «دنیا کشور من است، و تکامل علم آیین من است». او روش جدیدی را برای ساییدن عدسی ابداع کرد و تلسکوپ‌های بهتری ساخت و حلقه‌ی زهر و چند قمر و ستاره دیگر را کشف کرد و در ساعت آونگی نوآوری کرد. در رساله«قانون اجسام و کوبش» به ادامه مطالعات و تحقیقات گالیله، دکارت و والیس پرداخت. قانون بقای انرژی از این تحقیقات نتیجه شد. در کتاب «رساله نور» آزمایش باریکه نور را انجام داد. تئوری موجی بودن نور را مدرک کرد. او اولین موتور گاز سیلندر و پیستون دار را ساخت که با نیروی منبسط شونده باروت منفجرشده کار می‌کرد.

دانشمند بر جسته دیگر رابرت هوک بود که به همراه پاسکال و گریکه هواسنج را کامل کرد. عکس و جذور فاصله را مستقلاًکشف کرد. شاید ۱۰۰ راه امید بخش تحقیقاتی راباز کرد اما سرمایه وقت و برد باری ان را نداشت که تحقیقاتش را کامل کند. همراه بویل در تئوری حرارت کار کرد. اعتقاد داشت سرعت نور متناهی است، اما آنقدر زیاد که نمی‌توان اندازه گرفت. ساعت موتوری که از تلمبه بادی کمک می‌گرفت به او نسبت داده شده. سر انجام سیوری و نیوکامن انقلاب صنعتی را آغاز کردند.

جدال نیوتن و لایبنیتز بر سر تقدم کشف حسابان

در ۱۶۶۹ نیوتن نظریه فلوکسیون خود را برای دوستانش باز گفت و در ۱۷۰۴ انتشار داد. لایبنیتز در ۱۶۷۱ نامه‌ای حاوی نطفه حسابان به آکادمی علوم فرستاد. لایبنیتز در ۱۶۷۳ به لندن سفر کرد و با بویل و اولدنبرگ ملاقات کرد. نیوتن در ۱۶۷۶ به تقاضای اولدنبرگ نامه‌ای برای لایبنیتز فرستاد و روش خود را برای او شرح داد. لایبنیتز نیز در ۱۶۷۷ طی نامه‌ای به اولد نبرگ، فرق روش حساب دیفرانسیل و انتگرال و سیستم علامتی خود را با حساب نیوتن شرح داد. سپس در سال ۱۶۸۴ در مجله‌ی ارودیتوروم حساب خود را شرح داد.

نیوتن د ر۱۶۸۷ در چاپ اول «اصول» ظاهراً کشف مستقل لایبنیتز را پذیرفت. در ۱۶۹۹ ریاضیدانی سوئیسی نامه‌ای به انجمن سلطنتی فرستاد و ابراز عقیده کرد که لایبنیتز روش خود را از نیوتن گرفته و لایبنیتز نیز در ۱۷۰۵ طی نقدی که به طور ناشناس بر کتاب «نور شناخت» نیوتن نوشت، اشاره کرد که فلوکسیون نیوتن تقلیدی است از محاسبات لایبنیتزی. انجمن سلطنتی در ۱۷۱۲ کمیته‌ای را مسئول رسیدگی کرد که تقدم نیوتن را گواهی

کرد اما اصالت یا ابتکار لایبنیتز را جوابگو نبود. در ۱۷۱۶ لایبنیتز به یک کشیش ایتالیایی در لندن نوشت که تفسیر نیوتن در کتاب اصول، موضوع اختلاف را فیصله داده است و در همان سال فوت کرد. بلافاصله نیوتن منکر شد که تفسیر او نتیجه بدهد لایبنیتز اختراع حسابان را مستقل از نیوتن انجام داده و تفسیر را در ۱۷۲۶ در چاپ سوم «اصول»حذف کرد. این نزاع هرگز در خور این دو فیلسوف نبود؛ چرا که فرما و ایزاک بارو بر هر دو مقدم بودند.

منتقدان فلسفه‌ی نیوتنی

برکلی در رساله «مبانی علم انسانی»۱۷۰۱ اظها رتأسف کرده بود که نیوتن مکان، زمان و حرکت را به منزله چیزهای مطلق و ظاهراً جاودانی و دارای وجودی مستقل از تکیه گاه الهی فرض کرده است. برکلی(۱۷۵۳- ۱۶۸۵) مقاله یا در ۱۷۳۴ به نامAnalyst در نقد حسابان نوشت که در آن مفهوم خط و نقاط آن را زیر سؤال برد و اینکه آیا خط می‌تواند از بینهایت جزءکوچک تشکیل شده باشد.

برکلی در برابر کسانی که سعی می‌کردند گزاره‌های دینی را از اعتبار و روشنی ساقط بدانند سعی کرد نشان دهد که گزاره‌های ریاضی هم هیچ از گزاره‌های دینی در عدم روشنی کم ندارند. در مقاله‌ای به نام Discourse به بینهایت کوچک‌ها حمله کرد و نشان داد جاهایی با آن‌ها چنان برخورد می‌شود که گویی صفر هستند و در جایی دیگر گویی اعداد متناهی هستند. او نمی‌خواست ریاضی را بی‌اعتبار کند بلکه می‌خواست بگوید با وجود مشکلاتی چون حد نسبت بی‌نهایت کوچک‌ها ریاضیات به نتایج درستی منجر می‌شود و در دین هم همین طور است.

نرخ تغییر لحظه و بی نهایت کوچک‌ها چنان مشکل‌دار شدند که ریاضی‌دانان سعی کردند از روش‌های دیگران همان محاسبات را انجام دهند. یکی از این منتقدان لاگرانژ بود که حسابان را دوباره فرمول‌بندی کرد. او توابعی را به کار برد که نمایش سری تونی دارند. این مربوط به اصل متافیزیکی معروف است که اطلاعات کامل در مورد حرکت اجسام در یک بازه متناهی برای پیشگویی آینده سیستم کافی است. همان اتفاقی که برای توابع تحلیلی می‌افتد که مورد تأکید لاگرانژ بودند.

منتقدان فیزیک نیوتنی

هوک به خاطر اختلاف برسر عکس مجذور فاصله، در مسئله موجی– ذره‌ای نور از هویگنس طرفداری کرد. لایبنیتز اعلام کرد که تا هنگامی که نیوتن اثبات نکند جاذبه چگونه از وراء خلا موثر است، تئوری او نباید پذیرفته شود. فرانسه به گردش یا گردبادهای دکارتی چسبیده بود تا وقتی که ولتر از آن ستایش کرد. ولتر اعتقاد داشت ۴۰ سال پس از چاپ، «اصول» حتی در انگلستان به سختی ۲۰دانشمند موافق دارد. در فرانسه فکر می‌کردند این نظریه به اندازه‌ی کافی مکانیکی نیست، ولی در انگلستان انتقادات عمدتاً مذهبی بود.

نیوتن در چاپ دوم کوشید تا منتقدان را تسکین دهد لایبنیتز و فرانسویان را متقاعد کرد که گرانژ را نیرویی که از دور تأثیر می‌کند نمی‌داند. شرح کلی در مورد نقش خداوند در دستگاه خود را اضافه کرد. جنبش اولیه این ماشین بزرگ را از خدا دانست. به علاوه به این قائل شد که بی‌نظمی‌های منظومه شمسی را هرزچند گاه خداوند تصحیح می‌نماید و سر انجام به این فلسفه گرایید که بلکه جاذبه پدیده‌ای روحانی است. از بین برنولی‌ها که مبانی حسابان را بر فرمول‌بندی و حل معادلات دیفرانسیل بنا کردند، که در قرن ۱۸ اتفاق افتاد، یوهان برنولی از گردبادهای دکارتی پیروی کرد و سال‌ها پذیرش مکانیک نیوتنی را عقب انداخت. بزرگترین منتقد نیوتن انیشتین بود. که به گفته پلانک، انقلاب بزرگی در ایده‌های نیوتن را منجر شد.

میراث نیوتن

ایده جاذبه که سر انجام بر گرداب‌های دکارتی پیروزی یافت از نیوتن به یادگار مانده است. هرچند حقیقت این نیرو مکشوف نیست. اینکه کلیه جهان خلقت به عنوان یک دستگاه مکانیکی و ماشینی خود به خود عمل می‌کند. تجزیه نور به اجزا، و ایده نور ذره‌ای که در برابر تئوری موجی هویگنس قرار دارد، روش حسابان که برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی که در حال حرکت هستند بسیار مفید واقع شد، رده بندی شکل خم‌های متغیره درجه سوم که چندین صفحه از مجموعه آثار نیوتن را تشکیل می‌دهد، و مهمتر از همه، از هم جداکردن ادراکات همجنس و غیر همجنس و بررسی جداگانه آن‌ها رئوس میراث علمی نیوتن را تشکیل می‌دهند.

نیوتن به اندازه بنیان گزاران ادیان جهانی و فلاسفه طراز اول بر تمدن بشری تأثیر گزار بود. تصور عامه از ماشین مکانیکی و تبیین مکانیکی حرکت در جهان خلقت از اوست. تصور عامه از زمان و مفاهیم حال و گذشته و آینده از اوست. تصور عامه از مکان و ارجاع مطلق به مکان در صورتی که مکان نسبی است از اوست. عمیق‌تر از همه، روش علمی او که از طبیعت به سمت ماورا الطبیعه می‌رفت و همین طور ایده‌های پایه در مورد نسبیت که نمی‌دانیم بر افکار انشتین تأثیر گذاشته یا نه! نتیجه‌ی تلاش‌های او شکوفایی ریاضیات کاربردی و وصل کردن ریاضیات مدرن به سرچشمه‌های فیزیک و کاربرد بود. او ایده‌هایی نیز در آموزش ریاضی دارد که با علوم تجربی هماهنگ است.

فصل ۶

دیدگاه‌های فلسفی مستتر در ریاضیات عصر لایبنیتز

از آنجا که حرکت‌های فلسفی قاره اروپا با مرکزیت فرانسه مستقل از جزیره انگلستان اتفاق افتاده، هر چند با انقلاب‌های علمی در انگلستان مرتبط بوده است، تأثیرات این جریان‌ها در ریاضیات را در قرن پس از لایبنیتز که آن را عصر لایبنیتز نامیده‌ایم، مستقلاً شایسته بررسی می‌دانیم.

لایبنیتز فیلسوف‌تر از نیوتن بود و نیوتن فیزیکدان‌تر از لایبنیتز. از این رو تأثیرات فلسفی شخصیت لایبنیتز بیش از نیوتن بود. و تأثیر فلسفی او بر ریاضیات عصر خود قابل مقایسه با تأثیرات فیزیک نیوتن و ریاضیات عصر نیوتن می‌باشد. فلسفه لایبنیتز فلسفه واحدی نیست. یکی آن که به تأثیر عامه و برای خوش آمد ایشان بیان می‌شد. و دیگری فلسفه‌ای بسیار محکم و منطقی که از لابلای نوشته‌های شخصی او کشف شد که او خود آن را پنهان می‌کرد. لایبنیتز برخلاف نیوتن دغدغه مبانی ریاضی را داشت.

برجسته‌ترین فیلسوف این عصر کانت است که در ابتدا دنباله رو لایبنیتز بود و پس از به دست آوردن استقلال فکری تفکرات او بر ذهن همه‌ی فیلسوفان بعدی سایه افکنده است. و برجسته‌ترین ریاضیدانان این عصر خانواده برنولی، اویلر و لاگرانژ هستند که همه‌ی آن‌ها تحت تاثیر نیوتن شدیداً فیزیکی هستند تا اینکه تحت تاثیر لایبنیتز فلسفی باشند. از این لحاظ، ریاضیاتی که تحویل قرن ۱۹ شده‌است، بیش‌تر نیوتنی است تا لایبنیتزی. فلسفه‌ی بینهایت کوچک‌های لایبنیتز همچنان پشت‌صحنه است، تا وقتی که گرایش‌های فلسفی قرن ۲۰ به آن می‌پردازند و سعی می‌کنند مبانی آن را محکم یا آن را اصلاح کنند. این که چقدر ریاضیات فلسفی لایبنیتزی قرن ۲۰ پشت‌صحنه است و چقدر جلوی صحنه، موضوع بحث مهمی است که در وقت آن به این مسئله خواهیم پرداخت.

منظور از «موناد» لایبنیتز بذرهای خردی است که خداوند آن‌ها را مستقیماً آفرید و بعداً به صورت‌های گوناگون ماده و حیات درآمدند و اینکه هر جزء کوچک ماده، از یک دنیا موجودات آفریده شده و هر جزء آن از دنیایی دیگر و همین طور الی غیرالنهایه؛ که ایده‌ای بسیار سرگیجه آور است. او حقیقت نهایی ماده را انرژی دانست و دنیا را متشکل از مراکز نیرو. لایبنیتز واحدهای بدون بعد نیرو را موناد نامید. باور به مونادها منجر به ایده‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها و ریاضیات مربوط به آن شد، اما مبانی فلسفی آن، چنان زیر سؤال رفت که ریاضیدانان بیشتر سعی می‌کردند حسابان را مستقل از آن بنا کنند و این ایده ماوراءالطبیعی را دور بزنند تا ریاضیات آنان زیر سؤال نرود. بعدها، ایده‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها دقیق شد و منجر به ظهور رشته آنالیز غیر استاندارد در قرن ۲۰ گردید.

ایده‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها در آموزش بسیار کارآمد بود، برای همین هرگز به فراموشی سپرده نشده. به علاوه نیوتن هم در کتاب «اصول» خود چندین استدلال بی‌نهایت کوچک که هندسه‌ی اقلیدسی را به کار برده بود و فیزیک او بر این مبانی استوار شده بود و ۲۰۰ سال طول کشید تا کم‌کم فیزیک نیوتنی را بر ریاضیات حسابان بنا

کنند. بنابراین کارکردن با بی‌نهایت کوچک‌ها در قرن ۱۸ لابد من بود و لااقل بسیاری سعی می‌کردند ابتدا احکامی را توسط بی‌نهایت کوچک‌ها به دست بیاورند. سپس برهانی برای این احکام بیابند که بی‌نهایت کوچک‌ها را دور بزند. قهرمان رهایی از بی‌نهایت کوچک‌ها وایراشتراس بود که در قرن ۱۹ می‌زیست. پس از این به تحقیقات او خواهیم پرداخت.

فلسفه‌ی اروپا در قرن هجدهم

فرانسه قرن هجدهم عصر فیلسوفان است. اما بیشتر فیلسوفان به امور سیاسی و اخلاقی می‌پرداختند تا حکمت نظری. در ریاضیات از نیوتن و در فلسفه مادی‌گرای خود از لاک و هیوم و در سیاست از انگلیسی‌ها پیروی می‌کردند.

فونتنل دبیر آکادمی علوم پاریس در عمومی‌سازی علم نقش مهمی داشته است. این که بشر چقدر حقیر و عالم خلقت چقدر عظیم است؛ و این که قدماء اجرام آسمانی فسادناپذیر دانسته بودند نظیر آن است که بوستان که ۵ روزه عمری دارد، بگوید هرگز ندیده‌ام که باغبانی بمیرد؛ چه خود پسندی است اگر انسان گمان کند همه‌ی طبیعت برای مصرف او خلق شده و خورشید و ماه برای روشنی چشم ما و ستارگان برای حظ چشمان ما هستند؛ علم بشر چه اندازه محدود و عقل او چقدر عاجز است؛ شاید در کرات دیگر موجوداتی باشند که حواس ظاهر و باطنشان بیش از ما و بر معرفت حقایق تواناتر از ما باشند.

ولتر که در واقع بیشتر ادیب است تا فیلسوف از لاک و نیوتن طرفداری کرد و عقاید آنان را در فرانسه بسط داد. کتاب‌های ولتر که بیشتر شعر و نمایشنامه هستند، به راحتی یک کتابخانه را تشکیل می‌دهند. روسو که او هم ادیب است و به نقد زندگی مدرن و پیشرفت علم و تکنولوژی و آثار آن بر باطن بشر و رشد باطنی او پرداخت. بزرگترین عامل ترویج علم، دایره‌المعارف دِیدرو بود که دالامبر ریاضیدان، و سایر طرفداران تفکر جدید در آن مقاله داشتند. دیدِرو را بسیار اذیت کردند. وضع سایر روشنفکران هم همین بود. تا آنکه پس از انقلاب کبیر فرانسه، آزادی عقاید به دست آمد و خداپرستانی که عیسی پرست نبودند گرامی شدند.

سرگذشت لایبنیتز

لایبنیتز به اکثر کشورهای اروپای غربی مسافرت کرد و نفوذش را حتی تا روسیه و چین گسترش داد. هم مذهب کاتولیک را پذیرفت و هم پروتستان را. پدر او استاد فلسفه‌ی اخلاق در دانشگاه لایپزیگ بود. در ۱۵ سالگی وارد دانشگاه شد و در ۲۰ سالگی دکترای حقوق گرفت. رساله‌اش چنان درخشان بود که به او کرسی استادی پیشنهاد کردند. اما او آینده‌ی دیگری در سر داشت. تمام مکاتب فکری زمان خود را در بین سردمدارانش چشید. در پاریس، هویگنس را ملاقات کرد و توسط او به ریاضیات عالی سوق یافت. در لندن با بویل آشنا شد. ماشین حسابی

بهتر از ماشین حساب پاسکال ساخت که جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را به راحتی انجام می‌داد. در ابتدا به عنوان مشاور اصلاح قوانین در استخدام اسقف اعظم مانیتس بود و پس از مرگ او به عنوان کتابدار به استخدام دوک برونسویک درآمد.

با و جودی که علوم گوشه‌ای از زندگی لایبنیتز بود، سخت به آن دلبستگی داشت. گفته بود که اگر دوباره زنده شود یک زیست شناس خواهد شد. او که به قانون اتصال و پیوستگی اعتقاد داشت همه‌ی این حقیقت را در درون ذهن خود واقعیت داده بود. زیرا از هر دانشی بهره‌ای داشت. تاریخ ملت‌ها و تاریخ فلسفه را می‌دانست. در امور سیاسی چندی از دولت‌ها دست اندر کار بود. با اتم و خداوند آشنا بود. می‌گفت: «سیاره‌ی ما زمانی یک کره فروزان بوده که تدریجاً خنک و منقبض شده و قشر آن سفت شده است. در حین سرد شدن بخار آب اطراف آن اقیانوس‌ها را به وجود آورده که در اثر انحلال کانی‌ها شور شده‌اند. تغییرات بعدی زمین ناشی از فرسایش و انفجار گازهای زیرزمینی بوده است. باید معتقد بود که در جریان دگرگونی‌های عظیم در پوسته‌ی زمین حتی انواع جانوران نیز دستخوش تحولاتی بوده است». او حتی احتمال می‌داد که اولین جانوران در دریا می‌زیسته‌اند.

به فلسفه چین پرداخت. کتاب «آخرین خبرهای چین» شامل همه‌ی گزارش‌های بازرگانان، مبلغین مذهبی و هیئت‌ها بود. احتمال می‌داد در فلسفه، ریاضیات و پزشکی کشفیاتی داشته باشند که کمک بزرگی به تمدن غرب باشد. به ارتباط فرهنگی با روسیه به عنوان گشایش رابطه با شرق اصرار داشت. هر سال حدود سیصد نامه می‌نوشت که از آن‌ها ۱۵۰۰۰ نامه بر جای مانده است. مکاتبات ولتر از نظر کمیت با این رقابت می‌کند اما نه از نظر تنوع فکری. پیشنهاد کرد یک بررسی یا مبادله بین المللی فرهنگی به‌وجود آید تا دانشمندان بتوانند نوشته‌ها و عقایدشان را با یکدیگر مبادله کنند و نیز طرح یک زبان جهانی را ریخت که در آن هر اندیشه‌ی فلسفی و علمی حرف یا نمادی مخصوص به خود داشت تا همه متفکران بتوانند مثل ریاضیدانان با هم ارتباط برقرار کنند و لذا به پیدایش منطق ریاضی یا سمبولیک نزدیک شد.

آکادمی علوم برلین و آلمان و سن‌پطرزبورگ وجود خود را مدیون لایبنیتز هستند. او پس از مسافرت‌ها و دست اندرکارهای سیاسی لذت خلوت کتابخانه‌اش را برگزید. دوستانش را به سبب آن که دشمن وقت و کارش هستند از خود دور کرد. غالباً تا دیروقت مطالعه می‌کرد و جز برای تحقیق بیرون نمی‌رفت. در قرن ۱۸ او را پیامبر خوشبینی می‌دانستند. او با فرض ذهنی بودن ماده(نه مادی بودن ذهن) شکاف بین ماده و ذهن را پر کرد. آلمان را در توسعه تمدن غرب مقام ارجمندی بخشید. فلسفه‌اش به زودی رواج یافت و هستند کسانی که او را بزرگترین فیلسوف غرب دانسته‌اند.

فلسفه لایبنیتز

لایبنیتز از پیروزی آشکار آزاد اندیشان متأسف بود: «در روزگار ما بسیاری از مردم به مکاشفه‌ی الهی یا معجزات کمتر احترام می‌گذارند»، «دین طبیعی رو به ضعف می‌رود. بسیاری معتقدند که ارواح جسمانی هستند. دیگران معتقدند که خداوند هم جسمانی است». لایبنیتز در سفرهای خود با اسپینوزا ملاقات کرد و اعتماد او را جلب کرد تا به او کمک کند مذاهب کاتولیک و پروتستان را به هم پیوند دهد تا متفقاً آزادی فکر را از میان برندارند. اسپینوزا به او اعتماد کرد و به او اجازه داد دست نوشته‌ی «اخلاق» او را بخواند و حتی قسمت‌هایی را یادداشت کند. پس از مرگ اسپینوزا، سخت کوشید نفوذ این یهودی را بر خود پنهان نگه دارد. این گفته‌ی لایبنیتز معروف است که «من همیشه به عنوان یک فیلسوف آغاز می‌کنم و به عنوان یک دانشمند الهیات به پایان می‌رسم».

نیمی از آثار لایبنیتز «استدلال علیه دشمن» در نقد آراء لاک بود. شرح آثار لاک را به دلیل مرگ او ناتمام گذاشت و چاپ نکرد و به همین دلیل نتوانست مانع نفوذ لاک بر ولتر و سایر روشنفکران فرانسوی شود. این کتاب به زبان مکالمه‌ی فیلانتس(دوستار حقیقت) که نمایانگر لاک است و تئوفیلوس(دوستار خداوند) که نمایانگر لایبنیتز است، نوشته شد. از نظر لایبنیتز، ذهن دستگاه پیچیده‌ای است که با ساختمان و عمل خود دانسته‌های احساس را شکل می‌دهد، نه آن طور که لاک می‌گفت که ذهن لوحی پاک است. به عقیده‌ی لایبنیتز است، نوشته شد. از نظر لایبنیتز، ذهن دستگاه پیچیده‌ای است که با ساختمان و عمل خود دانسته‌های احساس راشکل می‌دهد، نه آن طور که لاک می‌گفت که ذهن لوحی پاک است. به عقیده‌ی لایبنیتز مفاهیم هستی، ذات، وحدت، ایزومرفیسم، علت، ادراک و عقل همه فطری هستند و در ساختمان ذهن جای داده شده‌اند.

ایده‌ی موناد‌های لایبنیتز نتیجه می‌دهد که ماده همه جا آکنده از حرکت، فعالیت و زندگی است. چقدر این نظرات شبیه نظرات ملاصدرا است! جالب آنکه این ساختار منطقی تنها در قرن ۲۰ بر پای خود استوار گشت و موارد عملی کاربرد آن در ریاضیات فقط نیم قرن از ما فاصله دارند. موناد روحی است که از درون تشخیص و تشخص دارد و علیه هر چیز خارجی عکس العمل نشان می‌دهد. جهان پر است از نیروهای انفرادی که فقط با قوانین کل یا خداوند یگانه هماهنگ می‌شوند. همانطور که ارواح متمایزند، هر موناد از سایر آن‌ها تمایز دارد و بی همتاست. همان طور که هر روح می‌تواند حقیقت اطراف خود را درک کند، هر موناد هم می‌تواند جهان را تا درجه‌ای، هر چند ناخودآگاه احساس کند. هر موناد آینه‌ای است که دنیا را کم و بیش منعکس می‌کند. از آنجا که هیچ ذهن انفرادی نمی‌تواند در ذهن دیگری نظر کند، هیچ مونادی نیز نمی‌تواند درون دیگری را ببیند.

مونادها تغییر ناپذیرند، چون تغییر و دگرگونی ضروری زندگی آن‌هاست. همان طور که هر نفس دارای خواهش و اراده، هر موناد نیز اراده‌ای درونی دارد. این همان نیرو است. نیرو و اراده، دو صورت یا درجه‌ی یک حقیقت اساسی است. انسان هم مجموعه‌ای از مونادهاست(سلول؟) که هر یک گرسنگی، نیاز مندی‌ها و مقاصد خاص خود را دارد. این اجزاء بر اثر راهنمایی موناد حاکم که به اعتباری روح انسان است، به اجتماعی یک پارچه تبدیل می‌شوند. هر گاه این روح به سطح عقل برسد آن را ذهن می‌نامند و هر گاه نظام و ذهن جهان را در یابد، به آیینه‌ای خداوندی بدل می‌شود. خداوند موناد نخستین، ذهن محض و کاملاً آگاه و و ارسته از جسم است.

ریاضیات لایبنیتز

از عمیق‌ترین ریاضیدانان عصری بود که ا زریاضیدانان بسیاری برخوردار بود. مفهوم ذهنی او از انرژی بودن ماده یک ایده متهورانه مابعد الطبیعی به حساب می‌آمد، اما امروزه بسیار پذیرفته است. همچنین همانند امروز ایده‌ی حرکت مطلق نیوتن را رد می‌کرد و قبل از کانت، توالی مکان و زمان را ذهنی می‌دانست، نه عینی و حقیقی و این در نسبیت تأیید شده است. می‌ترسید که نظریه‌ی گرانشی نیوتن بر الحاد و گسترش آن تأثیر بگذارد که چنین شد. در زیست‌شناسی تکامل را به صورت مبهم می‌دید. قانون اتصال را مانند بسیاری از حکمای قبل و بعد خود حاکم بر دنیای ارگانیک می‌دانست، اما آن را به دنیای فرضی غیر ارگانیک هم بسط داد. هر چیز نقطه یا مرحله‌ای از یک رشته بی‌پایان است و به وسیله تعداد بیشماری از صورت‌های و اسطه یا چیزهای دیگر مر تبط می‌شود:

«هیچ چیز ناگهانی انجام نمی‌شوند و این یکی از اصول بزرگ من است که طبیعت جهش نمی‌کند. این قانون اتصال اعلام می‌دارد که ما به وسیله‌ی و اسطه، درجه‌به‌درجه و قسمت‌به‌قسمت از کوچکی به بزرگی می‌رسیم و برعکس. انسان با حیوان و آن با گیاهان و این با سنگ و اره‌ها و آن‌ها نیز به نوبه خود با اجسامی که حس و تخیل آن‌ها را به صورت کاملاً مرده و غیر ارگانیک به مانشان می‌دهند، بستگی دارد.»

روشن است که، همان طور که انشتین نابغه‌ای بود که روی دست نیوتن بلند شد، پلانک نابغه‌ای بود که روی دست لایبنیتز بلند شد. جالب است بدانید که انشتین نسبت به پلانک بسیار متواضع‌تر بود تا نیوتن در برابر لایبنیتز. زیرا نیوتن ریاضیدانان را اصیل‌تر از فیلسوفان می‌پنداشت و خود را در ریاضی برتر از لایبنیتز می‌دانست.

برای قبول بی‌نهایت‌های کوچک لایبنیتز باید این اصل اقلیدس که یک پاره خط را می‌توان چندان به دو نیم کرد که از طول داده شده کوچک‌تر شود را رد می‌کرد. اما این اصل مبنای روش فرسایش بود که بسیار در محاسبه‌ی حجم وسطح کار آمد بود. مفاهیم dy،y، و $\frac{dy}{dx}$ توسط لایبنیتز معرفی شد. مثلثی به اضلاع ds,dy,dx که سومی تغییر بینهایت کوچک dx روی طول خم بود قلب حسابان او را تشکیل می‌داد. dA=ydx قضیه اساسی حسابان نتیجه می‌داد. لایبنیتز با سری‌های نامتناهی هم کار کرد و سری تیلور ln x,cosx,sinx و e^x را به دست آورد. دلیل اصلی علاقه‌ی او به حسابان، تربیع دایره بود: نسبت دایره به مربع محاط برابر است با. ۱/۱-۱/۴+۱/۹-۱/۱۶+۱/۲۵-۱/۳۶+. : ۱ که فرمولی است که تقریب را بسیار آسان می‌کند.

لایبنیتز که با فرهنگ‌های شرقی آشنایی داشت، دترمینان را از ژاپنی‌ها آموخت و در اروپا رواج داد. البته کسی به او توجه نکرد، تا اینکه در قرن بعد دترمینان دوباره کشف گردید. نمادگذاری لایبنیتز برای مفاهیم حسابان بسیار ساده‌تر از نیوتن بود، اما به خاطر اختلاف بین آن‌ها انجمن سلطنتی انگلستان تا ۱۰۰سال نمادهای نیوتن را به کار بردند تا اینکه سر انجام تسلیم شدند. پیروان سبک ریاضی لایبنیتز، برادران برنولی، اویلر، و لاگرانژ بودند. هر چند در توجه به مسائل فیزیکی یه جای فلسفه از نیوتن پیروی کردند. فلسفه بی‌نهایت کوچک‌های لایبنیتز موجب سهولت فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیلی شد که در طبیعت ظاهر می‌شوند.

اوضاع سیاسی اروپا در عصر لایبنیتز

در زمان لایبنیتز لویی چهاردهم قصد داشت راین را اشغال کند و ایالات متفرق آلمان را تحت تصرف در آورد. لایبنیتز ۲۴ ساله هم نقشه وحدت ایالات آلمان را در سر پروراند و هم لویی ۱۴ را تشویق کرد که مصر را از تصرف عثمانی در آورد تا بر راه‌های بازرگانی هلند به شرق تسلط پیدا کند، خاک فرانسه را از جنگ در امان دارد، به خطر امپراطوری عثمانی برای مسیحیت پایان دهد و به لقب نجات دهنده اروپا مفتخر شود. اگر این پیشنهاد عملی می‌شد به جای انگلستان، فرانسه هند را تسخیر می‌کرد.

لایبنیتز به شاهزاده‌گان آلمانی هشدار داد که حسادت‌های تفرقه‌آور آن‌ها و تعمدشان در تضعیف امپراطوری آلمان را به میدان نبرد فرانسه، انگلستان و اسپانیا مبدل کرده است. یکصد نقشه سیاسی، اقتصادی، دینی و اصلاح روش آموزشی داشت. حمایت فلسفی لایبنیتز از دین مؤثر نیفتاد و عصر لایبنیتز خواستگاه طلوع لیبرالیسم در سیاست و فلسفه بود. حال باید دید تحولات سیاسی اجتماعی در این فلاسفه چه تأثیری گذاشته و اینکه ایشان بر این تحولات چگونه مؤثر بودند. چون بین اندیشه‌ها و زندگی عملی ایشان فعل و انفعال متقابل برقرار است.

توجه کنید که ما لیبرالیسم قدیمی یعنی قبل از انقلاب کبیر فرانسه را در نظر داریم که محصول انگلستان و هلند بود. از آزادی مذهبی دفاع می‌کرد و فی نفسه پروتستان بود. برای آزادی تفسیر و تعبیر مذهبی قائل بود. بیشتر به طبقه متوسط و در حال رشد جامعه توجه داشت. این منجر به تأکید بر تعلیم و تربیت در برابر اصل و نسب شد. لیبرالیسم قدیمی، خوشبینانه، فعال و فلسفی بود و نماینده نیروها یی بود که رو به رشد بودند و به احتمال فراوان پیروز می‌شدند و در نتیجه سود فراوانی به بشریت می‌رساندند.

لیبرالیسم قدیمی، در موضوعات فکری و نیز در اقتصاد فردگرا بود، اما از لحاظ عاطفی و اخلاقی حمایت کننده‌ی تمایلات فردی نبود. این نوع لیبرالیسم بر انگلستان قرن ۱۸، نویسندگان قانون اساسی امریکا و اصحاب دایره المعارف فرانسه حکومت می‌کرد. تجلیات این فردگرایی یکی در دستگاه مذهب پروتستان بود که گفت شوراهای عمومی ممکن است مرتکب خطا بشوند. لذا تعیین حقیقت از یک امر اجتماعی به یک امر فردی بدل شد و تعیین حقیقت مذهبی که نه در مجامع اسقف‌ها، بلکه در میدان جنگ صورت می‌گرفت، از اختلاف آراء نجات یافت.

فلسفه دکارت هم بر پایه «من می‌اندیشم پس هستم » قرار گرفته بود، پایه معرفت را برای هر شخصی متمایز ساخت. چون برای هر کس نقطه شروع خود او بود و بعد از دکارت بیشتر فلاسفه دارای این فردیت فکری بودند. شاید جهان بینی کاشفان علمی، نوعاً دارای کمترین مقدار فردیت باشد. چنین کاشفی چون به یک نظریه جدید می‌رسد، به مرجع و مرشد، ارادت نمی‌ورزد. چون اگر می‌ورزید، پذیرش نظریات پیشینیان را ادامه می‌داد. او در عین حال به آن دسته از قوانین حقیقت اتکا دارد که قبول عام دارند و امیدوار است که دیگران را هم قانع کند. منتهی نه به حکم مرشد و مرجع، بلکه به وسیله براهینی که برای افراد قانع کننده باشد. در علم تصادم فرد و جامعه ذاتاً

گذران است، چون اهل علم به طور کلی موازین عقلی مشابهی را می‌پذیرند و بنابراین مناظره و تحقیق معمولاً به پدید آمدن برهان منجر می‌شود.

اوضاع علمی فرهنگی اروپا در عصر لایبنیتز

نیمه دوم قر ن۱۸جولانگاه رمانتیسیسم در نقاشی، ادبیات، فلسفه و سیاست بود. اساس آن طغیان بر ضد موازین اخلاقی و زیبایی‌شناسی معمول و بنیان‌گذاری مبانی جدیدی بود. رمانتیسیسم از بعد اخلاقی در معنای ریاضی‌دان و از بعد زیباشناسی بر تحقیقات ریاضی می‌توانست تاثیرگذار باشد. نیمه اول قرن ۱۸ متأثر از خاطره‌ی جنگ‌های مذهبی، جنگ‌های داخلی فرانسه و انگلستان و آلمان بود. مردم نسبت به حرج و مرج حساس بودند و اهمیت امنیت و قربانی‌هایی که برای به دست آوردن آن لازم است را می‌دانستند. عقل را بزرگترین سلاح بر ضد متعصبان خرابکار می‌دانستند. جهان منظم نیوتن نمونه‌ای خیالی از یک حکومت خوب بود و مقید کردن احساسات، هدف عمده تعلیم و تربیت و نشانه مسلم نجابت و شرافت بود. مردم کم‌کم از امنیت خسته شدند و به شور و هیجان گرایش یافتند و انقلاب کبیر فرانسه و ناپلئون این حس مردم را ارضا کردند. هدف رمانتیک‌ها زندگی فردی سودایی و پُرشور بود. این هدف با نظام صنعتی که در حال شکل گرفتن بود هماهنگی نداشت؛ نه در اخلاق و نه در زیبایی‌شناسی.

مکتب رمانتیک زیبایی‌شناسی را به جای بهره‌جویی می‌گذارد. این مکتب از آلمان شروع شد و یک مکتب جوان پسند بود. جوانانی که عواطف تند را از هر نوع که باشد و به هر نتیجه‌ای که منجر شود تحسین می‌کنند. بیشترین تجلیات این تفکر در رمان‌هایی است که پیروان آن می‌نوشتند. اوضاع و احوال اروپای قرن ۱۸ از دید گاه اجتماعی از این قرار بود، اما داستان فلسفه که همیشه پیشتر از تحولات اجتماعی است چیز دیگری است.

فلسفه‌های لاک، بارکلی و هیوم در خود تناقضاتی داشتند و آن بین روحیات این دانشمندان و عقاید نظری آن‌ها بود. ایشان افرادی اجتماعی بودند که به هیچ وجه در پی تحمیل عقاید خود به دیگران نبودند و علاقه بیش از اندازه‌ای به قدرت نداشتند و طرفدار جهان آزادی بودند که مردم در چهار چوب قانون کمال پیدا کنند. اما فلسفه نظری آن‌ها منجر به اصالت ذهن می‌شد که در فلسفه لایبنیتز به اوج رسید.

در فلسفه لاک تضاد در مرحله نظری بود. هیوم ذهن را نتیجه تأثیرات خارجی می‌دانست و بارکلی جهان خارج ذهن را منکر شد. هیوم، نظر بارکلی را پذیرفت و در مفهوم علیت شک کرد. او اثرگذاری را متفاوت از علیت می‌دانست. هیوم نشان داد که فلسفه تجربی انگلستان به نتایجی منجر می‌شود که کمتر کسی می‌تواند به قبول آن راضی شود، زیرا تمایز میان اعتقاد عقلی و خوش باوری را از بین می‌برد. اگر معرفت توافق میان اندیشه‌ها باشد پس شخص مجذوب و شخص متعقل در یک سطح هستند.

در عصر لاک مردم از جاذبه فکری خسته شده بودند، پس او عقل‌گرایی را بسط داد. در عصر روسو که مکتب رمانتیک در اوج بود، مردم از عقل خسته شده بودند و او اشتیاق و جاذبه فکری را نشر داد. این تناقض در آلمان

منجربه تأسیس ایده‌آلیسم آلمانی توسط کانت شد که تأثیراتی انقلابی داشت. در صورتی که واضعان آن مثل کانت و هگل انقلابی نبودند و آراء اخلاقی ایشان از حدود دین بیرون نمی‌رفت.

سرگذشت کانت

کانت ۱۷۲۴-۱۸۰۴ در یک خانواده مذهبی آلمان متولد شد و تمام عمر خود را به علم اندوزی و تألیف و تصنیف گذراند. در دانشگاه ریاضیات، فلسفه طبیعی، هیئت و نجوم و فلسفه اوانی را رشته اصلی خود قرار داد. او هم مانند دکارت، نیوتن و لایبنیتز متأهل نشد. پیرو کامل اصول اخلاقی بود؛ «از مرگ باک ندارم و اگر به من خبر بدهند که امشب می‌میری، خواهم گفت: فرمان خداراست. اما خدا نکند کسی به من بگوید: «یک تن به سبب تو روزگارش تلخ شده است.» از این رو مورد احترام خاص و عام بود و دولتیان با او مهربان بودند.

کانت در دانش جویی خود جز درک حقیقی منظوری نداشته و از خودنمایی و شهرت‌طلبی و کسب جاه و مال دور بود. جز آنچه حقیقت می‌دانسته، نمی‌نوشته. نوشته‌هایش غالباً دشوار است و آنرا به شتاب انجام می‌داد. جوانان آلمانی زمان او، شهر او، گونیگسبرگ را کعبه حکمت می‌دانستند و به کانت به عنوان مرشد و مرجع می‌نگریستند تا جایی که مردم حتی در تکالیف مذهبی از او استفتاء می‌کردند.

کانت بیش از هشتاد رساله و کتاب بزرگ و کوچک دارد و در اکثر مسائل علمی ریاضی و طبیعی و جغرافیای طبیعی و زمین‌شناسی و هیئت و هواشناسی، همچنین منطق و الهیات و دیانت و سیاست چیز نوشته و مهمترین اثر او «نقد خرد محض» است. رساله‌ای هم در دنباله آراء نیوتن در باب هیئت عالم و چگونگی حدوث و خلق جهان نوشته که مبنی بر این است که فضای عالم در آغاز پر بوده از ماده متشابهی که شکل منظم نداشته، ولی تراکم آن در نقاط مختلف کم و بیش بوده است. به مقتضای جاذبه به دوران افتاده و این همه گرد هسته‌ای مرکزی به گردش در آمده‌اند. در جرم خورشید، تصادم موادی که همواره به آن ملحق می‌شوند، احداث حرارت می‌کنند و ستاره‌های ثابتی که بالاتر از سیارات هستند، هر یک خورشیدی مانند خورشید ما هستند. این عقاید منشأ نظریه‌ی لاپلاس شد.

کانت تاقبل از نقد خرد محض، تحت تأثیر لایبنیتز و لاک قرارداشت. در قرن ۱۸، طرفداران فلسفه تجربی، طرفداران فلسفه اولی را که می‌خواستند تنها با برهان عقلی مجهولات را معلوم کنند به استهزاء می‌گرفتند. کانت به فرق بزرگ ریاضی و فلسفه اولی پی برد: این که موضوعات ریاضی همه درون ذهنی هستند. اما جسم و جان، چون مخلوق ذهن نیستند، به برهان عقلی حقیقتشان به دست نمی‌آید. لذا از درک ذات نا امید شد و حس و تجربه را تنها وسیله علم دانست و در اخلاق قائل شد به این که اعتقادات مذهبی و عمل صالح و مبدأ و معاد مبانی فلسفی نمی‌خواهد. بلکه پاکی سرشت لازم است تادل به لزوم پرهیز از بدی گواهی دهد و وجدان پاک منجر به ایمان به غیب شود و اگر پاک سرشتی نباشد، با فلسفه ایمان درست نمی‌شود.

کانت به آزادی عشق داشت: «چیزی و حشتناک‌تر از این نیست که کارهای انسانی تابع اراده انسان دیگری باشد.» رساله‌ای در مورد جلال و جمال نوشت که در زمان او بسیار مد بود. مثل آنکه شب جلیل و روز جمیل است. دریا والاست و زمین زیبا. مرد والا ست و زن زیبا و مانند آن. نظرات کانت در اخلاق در این جمله اونمایان است: «فقط مطابق دستوری عمل کن که بتوانی در عین حال اراده کنی که آن دستور قانون عمومی گردد. یا چنان عمل کن که گویی دستور عملی تو به وسیله‌ی عمل تو یک قانون عمومی خواهد شد. »

فلسفه کانت

کانت دو وجه تمایز را که در فلسفه لایبنیتز در هم آمیخته‌اند، جدا می‌کند: یکی تمایز قضایای تحلیلی و ترکیبی، و دیگر تمایز میان قضایای از پیشی و تجربی. تحلیلی یعنی از تعاریف درونی مفاهیم نتیجه شود و ترکیبی غیر آن است. همه قضایایی که تنها از راه تجربه به آن علم داریم، ترکیبی هستند. اما بر خلاف لایبنیتز و دیگران، قبول نمی‌کند که همه‌ی قضایای ترکیبی تجربی هستند. قضیه از پیشی، قضیه‌ای است که ممکن است توسط تجربه استخراج شود، اما بعد معلوم می‌شود که مبانی آن فراتر از تجربه است. همه‌ی قضایای ریاضی محض به این معنی از پیشی است.

هیوم ثابت کرده بود که قانون علیت تحلیلی نیست و کانت ادعاکرد که ترکیبی است، اما علم به آن به طریق از پیشی حاصل می‌شود. اما چگونه حکم ترکیبی به طور از پیشی ممکن است؟ این همان مسئله‌ای بود که او ۱۲ سال روی آن فکرکرد. از دیدگاه کانت، دنیای خارج فقط مایه‌ی احساس می‌شود اما دستگاه ذهنی خودمان، آن را در زمان و مکان تقسیم می‌کند و تصوراتی را که ادراکات تجربی هستند، فراهم می‌کنند. کانت می‌گوید: زمان و مکان تصور نیستند، بلکه اشکالی از «دید» هستند. اما تصورات از پیشی هم وجود دارند و آن مقولات دوازده گانه است که از منطق قیاسی گرفته شده است:

۱) مقولات کمی: وحدت، کثرت، کلیت

۲) مقولات کیفی: ایجاب، سلب، حصر

۳) مقولات اضافی(یا نسبی) : جوهر و عرض، علت و معلول، تقابل یا مشارکت

۴) مقولات وضعی: امکان، و جود، ضرورت

کانت در نقد «نقد خرد محض» به رد همه براهین عقلی محض در اثبات وجود خدا می‌پردازد و در رساله دیگری «نقد عقل علمی» می‌گوید که فقط سه برهان برای اثبات وجود خدا موجود است:

۱) برهان بودشناسی: خدا واقعیترین هستی است و موضوع همه محمول‌هایی است که دال بر هستی مطلق هستند.

۲) برهان جهان‌شناسی: اگر اصلاًچیزی وجود داشته باشد، هستی واجب مطلق باید وجود داشته باشد و این هستی باید همان واقعی‌ترین هستی باشد.

۳) برهان طبیعی الهی: همان برهان نظم است. جهان، نشان دهنده‌ی نظمی است که بر غرض دلالت دارد.

در مورد برهان سوم می‌گوید که ناظم را ثابت می‌کند و نه خالق را. در اعتراض به دو برهان دیگر می‌گوید که وجود محمول نیست. می‌توان وجودی را تصور کرد که همه محمول‌های واقعی بر آن‌ها قابل حمل باشد. کانت می‌گوید: «خداوند، اختیار و بقا سه اندیشه عقلی هستند، ولی خود عقل نمی‌تواند واقعیت آن‌ها را اثبات کند. قوانین اخلاقی مستلزم عدالت است. فقط خداوند می‌تواند این مطلوب را تضمین کند و مسلم است که در این دنیا تضمین نکرده است. بنابراین خدا و زندگی بعدی وجود دارند و اختیار هم باید باشد؛ زیرا در غیر اینصورت فضیلت معنی ندارد و سعادت متناسب با فضیلت که عدالت است معنی ندارد. »

کتاب نقد خرد محض

کانت ۱۲ سال روی فلسفه خود کار کرد و در پایان، نوشتن آن بیش از چند ماهی طول نکشید. غرض آن این است که معرفت از حدود تجربه نمی‌تواند فراتر رود و این حدود را می‌توان دقیقاً تعیین کرد و ادعا کرد که انقلابی کوپر نیکی در فلسفه بوجود آورده است: «به جرأت می‌توانم بگویم که دیگر حتی یک مسئله ما بعد الطبیعی که حل نشده باشد، یا لااقل کلید حل آن به دست نیامده باشد، وجود ندارد.» کانت سعی داشت متممی بر «منطق» ارسطو بنویسد و البته تأثیراتی که از این کتاب گرفته، آشکار است.

بخش اعظم «نقد خرد محض» بر ملا نمودن خطاهایی است که از انطباق دادن زمان و مکان بر آنچه به تجربه در نمی‌آید حادث می‌شود. همه این تناقضات از «تز» و «انتی تز» تشکیل شده‌اند. این دید گاه بسیار بر فلسفه هگل تأثیر گذاشته که دیالکتیکش تماماً از تناقضات گرفته شده است.

کانت می‌گوید ما قضایایی داریم که به ظاهر قابل اثبات هستند، اما همدیگر را نقض می‌کنند. در تناقض اول اثبات می‌کند «جهان زماناً آغاز دارد و مکاناًمحدود است. »وهمینطور نقیض آنرا که «جهان زماناًبی آغاز و مکاناً نا محدود است و از هر دو لحاظ نا متناهی است». تناقض دوم اثبات می‌کند که ماده مرکب از اجزاء بسیط تشکیل شده است و هم نشده است. تناقض سوم اثبات می‌کند دو نوع علیت داریم: یکی مطابق قوانین طبیعی و دیگری مطابق اختیار و متناقضاً ثابت می‌کند فقط علیت طبیعی داریم. تناقض چهارم ثابت می‌کند وجود واجب مطلق هم هست و هم نیست.

کانت معتقد است که موضوعات بلاواسطه ادراک، پاره‌ای منبعث از چیزهای خارجی‌اند و پاره‌ای از دستگاه درک خود ما. کانت آنچه ضمن احساس بر ما ظاهر می‌شود «نمود» می‌خواند که از دو جزءتشکیل شده، یکی جزءمنبعث از موضوع مطالعه که آن را احساس می‌نامد، و دیگر جزء منبعث از دستگاه ذهن ما که «از پیشی» است و وابسته به تجربه نیست. صورت محض احساس «دید محض» نامیده می‌شود. احساس دو صورت محض دارد که عبارتند از مکان و زمان. یکی مربوط به حس درونی و دیگری مربوط به حس بیرونی.

برای اثبات این ادعا که زمان و مکان پیشینی هستند کانت دو نوع برهان می‌آورد: یکی برهان مابعدالطبیعی و دیگری معرفت شناختی یا به اصطلاح خودش متعالی. برهان اول مستقیماً از ماهیت مکان و زمان گرفته شده‌اند و نوع دوم به طور غیر مستقیم از امکان ریاضیات محض استفاده می‌کند. او برهان مکان را مبسوط‌تر ذکر می‌کند و برهان زمان را مشابه آن می‌داند. برهان متعالی راجع به مکان از هندسه گرفته شده است. کانت عقیده دارد که علم ما به هندسه اقلیدسی از پیشی است. هر چند این هندسه ترکیبی است، یعنی از منطق محض قابل استنتاج نیست. براهین هندسه متکی بر شکلند و این تصورات مربوط به اشکالی هستند که از پیش در ذهن ما کاشته شده‌اند. براهین مربوط به زمان اساساً همان براهین مربوط به مکان است. جز اینکه، به موجب این انتقاد که هنگام عمل شمارش زمان مصرف می‌شود، حساب جای هندسه را می‌گیرد.

میراث ریاضی کانت

براهین مکانی کانت چنین اند(متوجه تأثر آن‌ها از نظرات نیوتن و تأثیرگذاری آن‌ها بر مفهوم فضا باشید.):

۱) مکان، تصور تجربی مشتق از تجربه‌های بیرونی نیست. زیرا که فرض مکان مقدم است بر رجوع به احساسات منبعث از یک چیز بیرونی، و تجربه بیرونی فقط به و اسطه نمایش مکان امکان دارد.

۲) مکان یک نمایش ضروری از پیشی است که پایه ادراکات تجربی را تشکیل می‌دهد. زیرا ما نمی‌توانیم تصور کنیم که مکان نباشد در حالی که می‌توانیم تصور کنیم هیچ چیزی در مکان نباشد.

۳) مکان یک تصور پراکنده یا عمومی از روابط عموم چیزها نیست. زیرا فقط یک مکان وجود دارد و آنچه ما مکان‌ها می‌نامیم، اجزای آن مکان است نه مصداق‌های آن.

۴) مکان به شکل مقداری بی‌نهایت، اما معینی جلوه می‌کند که تمام اجزای مکان را در بر می‌گیرد. این رابطه غیر از رابطه تصور با مصداق‌های آن است و لذا مکان تصور نیست، بلکه «دید» است.

این‌ها براهین مابعدالطبیعی کانت هستند. حال به نقد برهان متعالی او می‌پردازیم. هندسه دو معنی دارد. یکی هندسه محض که از استنتاج از اصول موضوعه تشکیل شده، بی‌آن که در پی صحت این اصول باشد. دیگر، هندسه‌ای

که در فیزیک کاربرد دارد که اصول آن با اندازه‌گیری تعیین می‌شوند، چنان که در نسبیتِ‌عام دیده می‌شود. یکی از این‌ها از پیشی است، اماتر کیبی نیست، دیگری از پیشی نیست، اما ترکیبی است.

در فیزیک مسلم انگاشته می‌شود که شباهت ساختمانی خاصی میان منظومه ادراک‌ها و منظومه‌ی علت‌ها وجود دارد. مطابق این نظر دو مکان داریم: یکی مکان ذهنی که فقط استنباط می‌شود و یکی عینی که تجربه می‌شود. در مورد زمان مسئله طور دیگری است. زمان عینی، مجبور است عین زمان ذهنی باشد و گرنه مشکلات بیشتری پیدا می‌شود. پس این فرض که همه چیز در ذهن ما تجلی چیزهای بیرونی است، باید کنار گذاشته شود. هر فلسفه‌ای که از کانت منبعث می‌شود، باید یا به سوی تجربه پیش می‌رفت یا به سوی مطلق چون بند علیت که بین این دو بود پاره شده بود.

تازمانی که هگل زنده بود، فلسفه در جهت مطلق حرکت کرد و سپس تجربه غالب گشت. از نظر کانت، امکان معرفت ریاضی که خصلتاً ترکیبی از پیشی است، فقط بر حسب این نظریه که مکان و زمان پیشینی محض هستند، قابل تبیین است. این با نظر افلاطون در پیشینی بودن تطابق دارد جز اینکه افلاطون برای آن به عالم مثال نیازمند است، اما برای کانت ذهن کافی است. از نظر لایبنیتز ریاضی تحلیلی است. اما از نظر کانت ترکیبی و محتاج شهود است. به نظر کانت هندسه مظهر بصیرتی است در ماهیت ذاتی مکان که در یک شهود ذهنی پیشینی نمایان می‌گردد.

اویلر و تفکر الگوریتمی

اویلر درخشان‌ترین چهره از ریاضیدانان سوئیسی قرن ۱۸ و از تأثیر گذارترین چهره‌ها در اواخر قرن ۱۸ است. او را آنالیز مجسم می‌نامیدند. کارهای آنالیز او را در داستان آنالیز قرن ۱۹ بررسی خواهیم کرد. در قلمرو ایجاد دستورهای ریاضی و روش‌های تازه محاسبه، هیچ کس در تاریخ بر اویلر پیشی نگرفته است و شاید هیچ کس به قدرت او نزدیک نشود.

اویلر یک ریاضی‌دان مسئله حل کن بود و سعی او این بود که روش‌های خاصی برای حل مسائل خاصی پیشنهاد کند، به عبارت دیگر الگوریتم‌هایی برای حل مسائلی خاص ارائه نماید. حجم آثار اویلر چنان زیاد است که در ۱۹۰۹ جامعه سوئیسی علوم طبیعی موفق به چاپ مجموعه آثار او نشد. $\frac{2}{3}$ مقالاتی که در قرن ۱۸ در مجلات به چاپ رسیده از آن اویلر است و بسیاری آثار خطی به چاپ نرسیده هم دارد.

حتی راه‌حل‌های اویلر برای مسائل علمی، چنان مجرد بود که در عمل ناکارآمد می‌نمود. توجه کامل او به ریاضیات اورا از مفهوم واقعیت دور کرده بود. با اینکه تمام مسائل مورد توجه اویلر کاربردی بودند، او با آن مسائل به عنوان مسائلی در ریاضیات محض بر خورد می‌کرد. شاید بتوان گفت، شخصیت اویلر یک تنه مسئول گذر از عهد

ریاضیات کاربردی به ریاضیات محض بود. البته رگه‌های تفکر محض‌تری در ریاضیات یونان هم دیده می‌شود، اما مفهوم ریاضی‌دان محض پس از اویلر معنی یافت.

اویلر از جمله ریاضیدانانی بود که می‌توانست در همه جا و تحت هر شرایطی به کار بپردازد. کودکان را دیوانه و ار دوست می‌داشت و غالباًهنگامی که مشغول تهیه و تحریر آثارش بود، یکی از کودکان بر روی زانوی او بود و دیگران در اطرافش به بازی مشغول بودند. اویلر تمام عمر خود را صرف تحقیق در ریاضی نمی‌کرد. کتب درسی ریاضیات مقدماتی برای مدارس روسیه نوشت. در یکسان‌سازی اوزان و مقادیر کوشش می‌کرد و راه‌های تازه و عملی برای شناخت آزمایش صحت ترازو ابداع کرد.

کتاب بزرگ مکانیک او همان کاری را کرد که دکارت برای هندسه انجام داد. مکانیک را تبدیل به دانشی تحلیلی کرد و مقدمات تحقیقات لاگرانژ را فراهم آورد و برای اولین بار تمام قدرت حساب بی‌نهایت کوچک‌ها را در دانش مکانیک به کار برد.

اویلر کلمه‌ای از فلسفه نمی‌دانست. ولتر همراه بسیاری دیگر، غالباً اویلر را در پیچ و خم مسائل ماورا الطبیعه قرار می‌داد و از ناراحتی اویلر تفریح می‌کرد. اما او هرگز به دل نمی‌گرفت و همراه دیگران به ساده‌لوحی خویش می‌خندید. کار زیاد منجر شد که اویلر ابتدا یک چشم خویش و سپس هر دوچشم خودرا از دست بدهد. اما او اکثر آثار ریاضی خود را در همین دوران نابینایی نوشت. ریاضیاتی که باطن آن با فلسفه گره می‌خورد، تحت تأثیر اویلر ریاضیاتی شد که باطن آن فیزیک بود.

لاگرانژ

لاگرانژ هم مانند اویلر یک شخصیت آنالیزی داشت. او از هندسه رویگردان بود و در ۲۳ سالگی با پایه ریزی حساب تغییرات، مقدمات مکانیک تحلیلی خود را پایه‌ریزی کرد. او ثابت کرد که اگر از ابتدا روش‌های کلی تحلیلی را در مکانیک به کار برند، قدرت انعطاف و قوت محاسبه‌ای به دست می‌آید که قابل مقایسه با روش هندسی نیست. روش لاگرانژ، بعداز آنکه یک بار کسی آن را به درستی آموخت، تبدیل به چیزی پیش پا افتاده می‌شود، به طوری که طبق اظهار نظر بسیاری از ریاضیدانان، معادلات لاگرانژ که بر تمام دانش مکانیک احاطه دارد، بهترین مثال علمی از هنر استخراج چیز مهمی از هیچ است.

لاگرانژ از مجادله و مباحثه تنفری عمیق داشت و بسیار در فلسفه متواضع بود. این در تواضع ریاضی او نیز تأثیر گذاشته بود. «من همواره ملاحظه کرده ام که در مورد هر کسی شدت ادعا و خود ستایی، تناسب معکوس با میزان لیاقت وی دارد و این موضوع را برای خویش همچون اصلی اخلاقی پذیرفته ام». لاگرانژ تلاش عمده‌ی خود را صرف صیقل دادن تئوری مکانیک تحلیلی خود کرد که کار اویلر را به کمال می‌رساند. لاگرانژ تحقیقاتی نیز در حل

معادلات دیوفانتی و حل معادلات چند جمله‌ای دارد که نشان می‌دهد علاقه او به آنالیز ریشه‌های جبری دارد. ایده‌ی هندسه تحلیلی چهار بعدی مکان– زمان در واقع از لاگرانژ به ما رسیده است.

ریاضیات در اواخر قرن هجدهم

در قرن ۱۸، دانشگاه‌های اروپایی مرکز تجسس علمی نبوده است. سنت‌های کلاسیک مانع پیشرفت علوم بوده‌اند. تأکید به تحقیق در این دانشگاه‌ها وجود نداشت و تحقیق دانشمندان تأثیری در میزان حقوق ایشان نداشت. پیشرفت علوم توسط آکادمی علوم کشورهای مختلف مدیریت می‌شد. این آکادمی‌ها توسط پادشاهان حمایت مالی می‌شد. آکادمی برلین که توسط لایبنیتز بنیان‌گذاری شد، و پس از ۴۰ سال رو به سستی و ضعف می‌رفت. توسط اویلر دوباره زنده شد و آکادمی سن پطرزبورگ، که پطر کبیر نتوانسته بود آن را مطابق سلایق لایبنیتز پایه‌گذاری کند، توسط اویلر بر مبنای محکمی استوار شد.

مدیران این مؤسسات تحقیقی، اجازه می‌دادند علم راه خود را برود و اعتقاد داشتند ریاضیدانانی که گاه‌گاهی با یکدیگر ارتباط علمی دارند، می‌توانند ریاضیاتی تولید کنند که روزی به کار آید. این آغاز گرایش به ریاضیات محض بود. روشن است که پادشاهانی که به آکادمی‌ها کمک مالی می‌کردند، انتظاراتی داشتند. در اواخر قرن ۱۸، هدف پادشاهان سیطره بر دریاها و پیشرفت کشتی رانی بود. آنان باید می‌توانستند محل خود در دریا را با دقتی بسیار عالی تخمین بزنند و گرنه در میدان جنگ خود را در وضعیتی نا مساعد می‌یافتند.

اویلر اولین کسی بود که توانست راه حل قابل محاسبه‌ای از مسئله سه جسم(خورشید، زمین و ماه) ارائه دهد که اگر چه راه حلی تقریبی بود، اما نیازهای امپراطوری‌های دریا را برآورده می‌کرد.

ریاضیات در آستانه قرن نوزدهم

شاید بتوان وضعیت ریاضیات در آستانه قرن ۱۹ را با کمک وضعیت هندسه، جبر، آنالیز و حساب به خوبی روشن کرد. در یونان باستان از ازدواج جبر و حساب علم معاملات دیوفانتی را پدید آورد که در قرن بیستم مجدداً با هندسه ازدواج کرد و هندسه حسابی را بوجود آورد. در قرن ۱۹ حساب مجدداً با جبر ازدواج کرد و نظریه‌ی جبری اعداد را ساخت.

در قرن ۱۸، ازدواج هندسه و جبر شاخه آنالیز را به وجود آورد. ازدواج حساب و آنالیز نظریه تحلیلی اعداد را در قرن ۱۹ به وجود آورد و ازدواج هندسه و آنالیز، مکانیک تحلیلی و نظریه خمینه‌ها را در قرن ۱۹و۲۰ بوجود آورد، که باید آنرا ادمه‌ی مکانیک تحلیلی دانست.

ساختار ریاضیات در اویل قرن ۱۹ به اندازه کافی پیچیده شده بود که مسائل درون ریاضی ریاضیدانان را تا سال‌ها به خود مشغول سازد و منت‌های کوشش فلسفی ریاضی‌دانان سعی در محکم‌سازی مبانی حسابان بود که در قرن ۱۹ به بار رسید و با تلاش‌هایی در محکم‌سازی مبانی کل ریاضیات در قرن بیستم به بار رسید. در قرن ۱۸ تفکر فلسفی مربوط به ریاضی، همان تفکر فیزیکی بود. اما در قرن ۱۹ ریاضیات آنقدر غنی شد که فلسفه‌اش را هم درون خود داشت.

شکل‌گیری مبانی آنالیز در ریاضیات قرن نوزدهم

نیمه اول قرن نوزدهم شاهد تحولاتی در سیاست، بازرگانی، صنعت و هنر، و بستر تغییر دیدگاه‌هایی در تفکر دینی، فلسفی یا علمی بود. در ریاضیات نیز تحولات عمیقی در چیستی ریاضیات و مبانی آن و ساختارهای آموزشی این دیسیپلین به و قوع پیوست. در بین این تحولات، انقلاب کبیر فرانسه که ریشه‌های سیاسی داشت و انقلاب صنعتی که در بریتانیا مرکزیت داشت، مهمترین نقش را داشتند. تأکید این تحولات، بر ارتقا جوامع بشری از کوتاهترین مسیر ممکن بود و ریاضیات مرکزیت خود را در برابر پیشرفت دیگر علوم و مهندسی‌ها که مایه رشد صنعت یا کسب قدرت بودند، از دست داد. این تأکیدات آموزشی انقلاب کبیر فرانسه بود که ریاضیات را نجات داد. مدرسه نظامی Ecole polytechnique در این میان نقش بسیار مهمی را ایفا کرد که تأثیرات آن تا پراگ، وین، استوکهلم، زوریخ، کپنهاک، و حتی آمریکای جوان پیش رفت و تا سال‌ها پاریس مرکز ریاضیات در سراسر جهان بود.

انقلاب آموزشی دیگر تشکیل مدرسه‌ی Ecole Normale بود که ابتدا مدرسه آموزش دبیر بود و بعد جایگزین آکادمی علوم فرانسه شد که ناپلئون خود عضوی از آن محسوب می‌شد. در نتیجه بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ فرانسه فعالیت‌های سیاسی نیز داشتند؛ بر خلاف ریاضی‌دانان آلمانی که تنها در محیط دانشگاهی فعالیت می‌کردند. از شاخه‌های ریاضیات Ecole polytechnique کتاب‌های درسی ریاضی آن مدرسه بود که پدر بزرگ کتاب‌های درسی امروزی محسوب می‌شدند. این سنت به سرعت در اروپا همه گیر شد. انقلاب‌های ریاضی قرن ۱۹ در مبانی ریاضی، بسیاری از طریق همین کتاب‌های درسی شکل گرفت.

از شاخصه‌های دیگر این عصر، حرکت به سوی تخصصی شدن بود. نه‌تنها ریاضیات محض و کاربردی از یکدیگر جدا شدند، هر چند هنوز هم پل‌های ارتباطی محکمی بین آن‌ها وجود داشت، بلکه هر چه به پایان قرن ۱۹ نزدیک‌تر می‌شویم، شاخه‌های جبر، هندسه، و آنالیز هویت مستقل تری پیدا می‌کنند. این حرکت به سوی تخصصی شدن در کشورهای مختلف با سر عت‌های متفاوتی صورت می‌پذیرفت. در آمریکا حتی تا دهه ۶۰ به تعویق افتاد. این گرایش به تخصصی شدن بر نظام آموزشی و هم بر بازار کار تأثیر گذاشت و البته مهمترین خواستگاه آن تحقیقات بود. بسیاری از ریاضی‌دانان با عنوان‌های جبردان، هندسه‌دان، و یا آنالیست مشغول به تحقیق بودند که منجر به شکل‌گیری استانداردهای مستقلی از دقت ریاضی در هر یک از این شاخه‌ها شد. حتی مسائل اساسی مبانی ریاضی در هر یک متفاوت بود. در جبر، شناسایی ساختارهای جبری کلیدی، در هندسه، تحولات مفهوم فضا و در آنالیز بالا بردن استاندارد دقت ریاضی مورد تأکید بود.

این تغییرات اساسی، نیازمند حمایت ساختارهای اجتماعی بود. علی‌الخصوص، طبقه اجتماعی و پرستیژ یک ریاضی‌دان باید چنان می‌بود که این تحولات را نیرو ببخشد. مفهوم«ریاضی‌دان محض» از طریق ابزار «آموزش

ریاضیات عالی» شرایط لازم را برای این تحولات فراهم کرد. هر چند که در کشورهای مختلف، با توجه به شرایط سیاسی و اقتصادیشان، این حمایت‌ها از قوت وضعف متفاوتی برخوردار بود. سؤال مهم اینکه، برای درک همه‌ی این تحولات، چه دیدگاهی به ریاضیات تناسب دارد؟

ریاضیات پیشینی

دکارت، لاک، بر کلی، کانت، فرگه، هیلبرت، براوئر، و کارناپ همه پیشینی‌گرا بودند، ولی اختلافات داخلی داشتند. برای تعریف ریاضیات پیشینی، بر تئوری‌های روانشناسانه و ضد آن از معرفت تکیه می‌شود. مثلاً پوزیتیویست‌های منطقی می گویند معرفتی پیشینی است اگر و تنها اگر مورد باور باشد و هم آنکه تحلیلی باشد. اگر فقط معرفت تحلیلی ابتدایی، مثل قوانین منطق و نتایج اولیه تعاریف را در نظر بگیریم، نظر پوزیتیویست‌های منطقی در جهت در ستی تعدیل شده است. اما این همه ریاضیات را دربر نمی‌گیرد. بنابر تئوری‌های روانشناسانه معرفت شاخه‌های روند تشکیل معرفت است که باور را از معرفت متمایز می‌کند. تعریف ریاضیات پیشینی، منجر به تعریف شاخه‌های پیشینی تشکیل معرفت می‌شود.

از دیدگاه کانت:

۱) همان روند مستقل از تجرید باید ممکن باشد.

۲) و باید شاخه‌های تشکیل معرفت را داشته باشد.

۳) و باور صحیح را مستقل از تجربه تولید کند.

معروفترین شاخصه‌ی پیشینی تشکیل معرفت، مفهوم اثبات ریاضی است. البته اگر معنی اثبات را فراتر از تئوری‌های استاندارد فرمال بدانیم. از دید پیشینی‌گرایان، اثبات، روند تفکری است که معرفت پیشینی تولید می‌کند. به عبارت دقیقتر، روند تفکری که مستقل از تجربه باشد، به ناچار معرفت پیشینی به دست می‌دهد.

این سؤال پیش می‌آید که چرا این روند خطاپذیر است؟ چرا ریاضی‌دان در صحت اثبات‌های خود شک دارد و نیاز به تأیید همکاران خود برای صحت اثبات دارد؟ آیا این سؤالات به پایه‌های دیدگاه پیشینی نسبت به ریاضیات صدمه می‌زند؟ دکارت نظر می‌دهد که خطاپذیری به علت طولانی شدن اثبات است. طول اثبات وقتی بیش از حدی است که بتوانیم همزمان آن را در نظر بگیریم، موجب شک در صحت روند اثبات می‌شود. دکارت پیشنهاد می‌کند که برای رهایی از همین ضعف است که ریاضی‌دان ناچار است انباری از باورهای پیشینی بسازد تا در روند اثبات آن‌ها را یک به یک به خاطر آورد. اما به راحتی می‌توان قبول کرد که ظرفیت شناختی ریاضی‌دان محدود است و تمریناتی که دکارت پیشنهاد می‌کند، مشکل ریاضی پیشینی را حل نمی‌کند.

پیشینی‌گراها اختلاف نظر دارند که صحت منطق، تعاریف ریاضی، اصول موضوعه هندسی، اصول موضوعه حسابی، یا اصول نظریه مجموعه‌ها حقایق اولیه‌ای را تشکیل می‌دهد که ریاضی بر آن استوار شده است. دیدگاه پیشینی‌گرا به فراریاضی نیز توسعه می‌یابد. مثلاً در مرکز برنامه‌ی ساختارگرایی هیلبرت این سؤال هست که چطور می‌توان به صورت پیشینی دانست که سیستمی از اصول موضوعه هماهنگ و بدون تناقض است.

ساختارگرایی ریاضی، واقع‌گرایی ریاضی و مفهوم‌گرایی ریاضی

ساختارگرایی ریاضی، بر پایه شهود محض کانت بنیان‌گذاری شده. کانت برای توضیح شهود محض خود، مثال هندسی می‌آورد؛ اما در مورد ریاضیات غیر هندسی سکوت می‌کند. اگر ریاضیات از موجودات ذهنی شخصی آفریده می‌شود، پس چرا گزاره‌های صادق در مورد آن‌ها وابسته به زمان یا افراد نیست و چرا این قدر با واقعیت هماهنگی دارد و اگر موضوع شهود محض می‌تواند از آن‌ها ریاضیات تولید کند؟ جواب کانت این است که ساختارهای ذهنی بر تجربه حکومت دارند و لذا آنچه مستقل از تجربه کشف می‌کنیم، با تجربه توافق دارد. در اینجا چند مسئله مطرح می‌شود:

۱) مسئله تشخیص: از کجا بفهمیم چه ابعادی از موضوع مورد مطالعه به ساختار ذهنی مربوطند و چه ابعادی نیستند.

۲) مسئله عدم امکان عملی: از کجا بفهمیم دنباله‌های روند تفکر که به طور عملی ممکن نیستند(به دلیل محدودیت قدرت تصور ما) ساختار ذهنی ما را نمایش نمی‌دهند و پیشینی نیستند. مثال: تقسیم متوالی پاره خط

۳) مسئله دقت: از کجا بفهمیم که موجودات مورد مطالعه دقیقاً همان خواصی را دارند که ما فرض می‌کنیم.

جواب کانت این است که بین ساختارهای ذهنی ما و حقیقت ریاضی مورد مطالعه فاصله‌ای وجود دارد. واقع‌گرایان هم بر مفهوم شهود تکیه می‌کنند، اما شهودی که به موجودات مجرد تعلق می‌گیرد نه مفاهیمی که از احساسات ناشی می‌شوند. اما ارتباط علّی موجودات مجرد و روند تفکر ذهنی چگونه است؟ مشکل اول اینکه شهود یک فرض تئوریک می‌شود که بر تئوری افلاطونی حقیقت ریاضی بنا شده است. دوم اینکه آنچه در مورد شهود می‌دانیم، چیزی است که تئوری به ما می‌گوید. اما بسیاری از ریاضی‌دانان در مورد شهود در بستر حل مسئله به عنوان یک تجربه واقعی صحبت می‌کنند. خلاصه آنکه، آنچه شهود می‌نامند، منظور نظر پیشینی‌گراها را برآورده نمی‌کند و ریاضیات را پیشینی توصیف نمی‌کند.

مفهوم‌گرایی بسیار بر زبان‌شناسی تکیه می‌کند، در صورتی لزومی ندارد چنین باشد. ایده‌ی اصلی این است که دانش ما از بعضی عبارات، از درک ما از زبان نتیجه می‌شود. به طور تاریخی، مفاهیم «حقیقت بر مبنای معنی» و مانند آن از یک مشکل معرفت شناسانه پدید آمد: لاک، هیوم، کانت و دیگران به این نتیجه رسیدند که سهمی از دانش ما، فقط بر مبنای درک ما از مفاهیم قابل توصیفند. هم تئوری‌های روان‌شناسانه و هم غیر آن برای

مفهوم‌گرایی معرفی شدند. تئوری‌های غیر روانشناسانه همه به نوعی افلاطونی هستند. تئوری‌های روانشناسانه بر این تاکید دارند که با توجه به توانایی‌های زبانی ما، بعضی سیستم‌های باورها ارج نهاده می‌شوند. ایده‌ی کلی این است که مهارت پیدا کردن در کاربرد زبان، منجر به تغییرات روانشناسانه و این منجر به تولید باورهای جدید تحت روندهایی که شاخص‌های لازم را دارند، می‌شود. منظور از مفهوم‌گرایی، این نیست که مهارت در کاربرد زبان، منجر به درست شدن موزه‌ای از ایده‌ها در ذهن ما می‌شود که باعث شود علم ما به مفاهیم ریاضی پیشینی گردد.

بعضی استدلال می‌کنند هر علمی که بر توانایی‌های زبانی استوار شود، پیشینی است. ارتباط‌های مفهومی در زبان ذخیره شده‌اند و کاربرد مفاهیم در زبان منجر خواهد شد که سر آخر ارتباطات واقعی مفاهیم را کشف کنیم. حداقل این است که زبان بر مکالمات ما و لذا بر کاربرد مفاهیم حکومت می‌کند و با این پل سعی می‌کنیم ساختارهای مفهومی ذهن مخاطب را درک کنیم. در این صورت ریسک این که علم پیشینی ما بی‌اعتبار باشد، بالاست.

ریاضیات تجربی

جان استوارت میل، پانتام و لاکتوش به پیشینی‌گرایی حمله کردند. یک قدم عقب‌گرد از پیشینی‌گرایی این خواهد بود که ریاضیات پیشینی مستقل از تجربه نیست، بلکه اگر فرصت کافی برای تجربه به دست بیاید، حقایق پیشینی خود را سرانجام نشان خواهند داد. آنچه بیش از همه تفکر پیشینی‌گرا را تهدید می‌کند، دیدگاه جامعه‌شناسانه به علم است.

این که ما در یادگیری، تحت تاثیر اظهار نظرهای دیگران و حمایت آنان هستیم، اینکه تسلط معلمانمان را بر علمی که به ما آموزش می‌دهند می‌پذیریم، اینکه تاریخ ریاضی ریشه در کاربردهای روزمره دارد، یا اینکه آموزش ما از عدد به هیچ وجه با مفهوم مجرب عدد شروع نمی‌شود، همه دلایلی هستند که یک تئوری تکاملی از ریاضیات را تائید می‌کنند. منظور این است که چگونه فعالیت ریاضی به وجود آمد و چطور توسعه یافت. اگر ما بخواهیم دقیقا بدانیم روند تولد تفکر ریاضی چیست، شاید کاری غیر ممکن باشد. به عبارت دیگر، احتمالا دیدگاه‌های پیشینی‌گرا زیادی ساده انگارانه هستند.

شاید این که علم ریاضی چیست، سوالی نیست که از پیش ما نظر خود را راجع به آن ثابت کنیم و سپس به مطالعه‌ی چگونگی توسعه‌ی ریاضیات بپردازیم، بلکه همین روند توسعه است که استانداردهای علم ریاضیات را تعریف می‌کند. با چنین دیدگاهی به ریاضیات تاریخ ریاضی بسیار اهمیت پیدا می‌کند. هم مثال‌های تاریخی تائید کننده برای یک اظهار نظر فلسفی لازم است و هم اینکه پرسپکتیو ریاضیات هر عصری در لابه‌لای این مثال‌های تاریخی گم نشود. سوال این که آیا تاریخ ریاضی اگر فرصت دیگری پیدا کند، همین طور تکرار می‌شود؟ بنابر تفکر پیشنی، تاریخ ریاضیات تقریبا یک معجزه است، اما دیدگاه تکاملی به ریاضیات، این ادعا را نمی‌پذیرد.

واقعیت ریاضی و سیر تحولی آن

چه چیز باعث می‌شود یک گزاره ریاضی صحت داشته باشد؟ اولا باید در مورد اشیاء مستقل از زبان و ثانیا مستقل از فعالیت فکری ما باشد. این دیدگاه افلاطونی را پیش می‌نهد که گزاره‌های صحیح به خاطر خصوصیات اشیاء مجرد صحت دارند. اما این که «چرا حقایق ریاضی به کار ما می‌آیند» باید نتیجه مستقیم یک تئوری در مورد واقعیت ریاضی باشد. برای کارآمدی، صحت نقش مهمی ایفا می‌کند که در دیدگاه افلاطونی پر رنگ نیست. مگر این که بگوئیم ریاضیات علم مطالعه ساختارهای مجردی است که در واقعیات فیزیکی حضور دارند.

صحت ریاضیات بر پایه‌ی ساختار واقعیت، و صحت ریاضیات بر پایه‌ی ساختار تفکر انسان دو صورت از یک باطن‌اند. شاید بتوان ریاضیات را یک ایده‌آل‌سازی ساختارهای واقعی دانست که در این صورت خواسته‌ی ما بر آورده شده. می‌توان از تجرد ایده‌های ریاضی کاست اگر به جای مجردسازی، مفهوم دسته اشیاء با ساختار ریاضی مشترک را بگذاریم و همین دسته‌ها را نیز می‌توان موضوع دسته بندی قرار داد چنان که لایه‌های مختلف تجرید ساخته می‌شود.

بنابراین دانش ریاضی از کاربردها و جهان واقعی آغاز می‌شود و مشاهده‌ی منظم و رده بندی شده‌ی این واقعیات، پایه‌ی اولیه‌ی شکل‌گیری دانش ریاضی است، و برای آنکه یک تئوری تکاملی از ریاضی ارائه دهیم، می‌ماند که در این فرمالیسم، سیر تحول ریاضی از این صورت ابتدایی به آن چه به امپراطوری بزرگی در عالم ذهن تبدیل شده را تبیین کنیم.

تحول در ریاضیات و حتی در صحت ریاضی پدیده‌ای غیر قابل انکار است. مثلا در قرن ۱۵ باور نداشتند که هر چند جمله‌ای با ضرائب گویا حتما ریشه دارد! با این که لایبنیتز تصور می‌کرد $\frac{1}{2}$=.. . + ۱− ۱ + ۱− ۱. زبان ریاضی نیز دچار تحول شد. تغییر در سبک نگارش، استانداردهای استدلال، تغییر در تاکیدات روی نوع مسائل، یا حتی تغییر دیدگاه‌ها راجع به این که ریاضیات چیست، همه مصداق‌هایی از این تحولات هستند. سوال این که چرا این تحولات رخ می‌دهند؟

آیا تغییرات در ریاضیات، مشابه تغییرات در علم است؟ تفاوت‌های اساسی، یکی در اهمیت تجربه در تحولات علوم و دیگری طبیعت افزایشی علم ریاضی است. در مورد اول، هم محاسبات و بررسی مثال‌های خاص روند تفکرب ریاضی را خیلی دور از تعجربه نمی‌کند و همین تعمق در انقلاب‌های بزرگ علمی تجرد ریاضی را بسیار نزدیک به روش علمی و تحولات آن نشان می‌دهد. در مورد طبیعت افزایشی ریاضیات هم باید گفت که اثبات و ابطال هر دو در روند تفکر ریاضی مشاهد می‌شود که درست مانند علوم دیگر است. اما در بیشتر مواقع مشکل با فرمول‌بندی جدید حل می‌شود. دیدگاهی صحیح‌تر به موضوع مورد مطالعه، محتویات اصلی تئوری‌ها را حفظ می‌کند.

اینجاست که دیدگاه‌های جامعه‌شناسی علم و همچنین جامعه‌شناسی معرفت می‌تواندمورد پذیرش قرار گیرد و می‌توان تحولات ریاضی را در این قالب بررسی نمود. مهمترین تئوری در جامعه شناسی علم، دیدگاه Kuhn در مورد انقلاب‌های علمی است. یک سبک انجام ریاضی شامل زبان، گزاره‌های پذیرفته شده، سؤالات اساسی و دیدگاه‌های ریاضی خاص است. Kuhn از مفهوم سبک انجام یک علم، مفهوم پارادایم را بیرون می‌کشد، که تاریخ را به بازه‌های طولانی قابل مطالعه تقسیم می‌کند و عمیق‌ترین تحولات عملی را به ما می‌شناساند. این تحولات می‌تواند مربوط به ابعاد مختلفی از سبک انجام ریاضی باشد.

الگوهای تحول ریاضیات

آنچه باید درست درک شود، چگونگی تحول یک مفهوم ریاضی است. کاربرد زبان به کار رفته در یک شاخه ریاضی در دو زمان مختلف می‌تواند غیر هماهنگ یا غیر قابل ترجمه باشد. این باعث می‌شود تحولات مفهومی از تحولات زبانی ناشی شوند. البته این دیدگاه، مفاهیم را اسیر زبان می‌داند و با تصور افلاطونیان از مفاهیم مجرد همخوانی ندارد. برای مثال، تاریخ تحول مفهوم تابع، تاریخ تحول $\sqrt{-1}$، تاریخ تحول انتگرال و تاریخ تحول مشتق را می‌توان در نظر گرفت. در این دیدگاه، یک مفهوم با یکسری مراجع اولیه مشخص می‌شود که زبانی هستند و با تغییرات زبان به ناچار جایگزین می‌شوند، یا بعضی از این مراجع به فراموشی سپرده می‌شوند.

تحول در گزاره‌های یک شاخه ریاضی چگونه است؟ جواب ساده این است که گزاره‌ها رد یا قبول می‌شوند. زبان، یک شاهراه بازسازی و تحول گزاره‌های ریاضی است. همیشه گزاره‌ها باید به زبان جدید ترجمه شوند.

تحول در روش‌های استدلال از کجا ناشی می‌شوند؟ استدلال وسیله کسب دانش جدید از دانش قدیمی است. بعلاوه درک ما را از تئوری ساخته شده بالا می‌برد. استدلال‌هایی که غیر از اثبات هستند، مانند استدلال بر پایه‌ی مشابهت، گسترده‌تر از استدلال یا اثبات تولید کننده‌ی دانش هستند. این حوزه وسیع استدلال‌ها شامل اثبات‌های نادقیق می‌شود. نادقیق نیز یعنی حداقل یک بعد شناخت ما در آن ناقص است. اثبات‌هایی هم هستند مثل استقرا ءکه درک عمق ریاضی موضوع مورد مطالعه را ممکن نمی‌سازند. می‌توان تکنیک‌های حل مسئله و تکنیک‌های اثبات را دو دسته متمایز انگاشت. بعضی اوقات استدلال‌هایی حذف می‌شوند و یا اضافه، و بعضی اوقات در دسته جدیدی قرار می‌گیرند، مثلاً به عنوان اثبات پذیرفته می‌شوند.

مسائل مهم چگونه تحول می‌یابند؟ بعضی سؤالات درک ما از موضوع را عمیق‌تر می‌کنند و بعضی نقش ابزاری دارند و ما را قادر می‌سازند سؤالات بیشتری بپرسیم. یک سؤال ممکن است جواب داده شده و حذف شود(یا به نظر برسد که جواب داده شده). گاهی پیش فرض‌های یک سؤال غلط می‌شوند و سؤال حذف می‌شود. یک راه اضافه شدن سؤالات، تحولات زبانی است که مشابه سؤالات پیشین را مطرح می‌سازد. تحولات در گزاره‌های پذیرفته شده، منجر به مطرح شدن سؤالات در مورد اشیاءبررسی شده می‌شوند.

تحول در دید گاه‌های ریاضی چگونه رخ می‌دهد؟ فرا ریاضی و پشت صحنه‌ی یک سبک انجام ریاضی هنگام تحول دیدگاه‌های ریاضی روشن می‌شود. چون ریاضی‌دانان سعی می‌کنند در پاسخ به مخالفان، سبک ریاضی خود را تعریف کنند. در غیر این صورت، دیدگاه ریاضی یک سبک، پشت‌صحنه است. تحولات دیدگاهی، با تحولات عمده در دیگر مؤلفه‌ها بوجود می‌آیند. تغییر زبان و گزاره‌ها می‌تواند نتیجه دقیق‌سازی اثبات‌های نادقیق و این به نوبه خود نتیجه‌ی تولید سؤالات جدید باشد.

تولید سؤالات جدید می‌تواند از حل یک مسئله و معرفی یک زبان جدید ناشی شود. قدرت این زبان در پاسخ به سؤالات می‌تواند منجر به پذیرش زبان جدید و تولد سؤالات جدیدی شود.

یک ریاضی‌دان برای کمال باید تمام این مراحل را در تحقیقات خود بگذراند:

۱- پاسخ به سؤالات.

۲- تولید سؤال.

۳- تعمیم.

۴- دقیق‌سازی.

۵- سیستم‌سازی و نظم بخشی تئوری‌ها.

سیستم‌سازی و نظم بخشی تئوری‌ها، یکی از طریق اصل موضوعه‌سازی است: یعنی ارائه تعاریف جدید و اثبات‌های جدید برای یک تئوری کوتاه‌تر اصل موضوعه‌ای. روش دیگر از طریق مفهوم‌سازی است: مثلاً تغییرات در زبان که مشابهت دو شاخه را نشان می‌دهند، یا مشخصه مشترک دو روش اثبات را نمایان می‌کند.

پذیرش حسابان

شکل‌گیری حسابان از نیمه دوم قرن ۱۷ تا پایان قرن ۱۹ تأثیراتی سرتاسری بر ریاضیات گذاشت. تغییرات بنیادی در زبان ریاضی، گزاره‌های مورد قبول، سؤالات مهم و استدلال‌های مورد قبول تا حد زیادی تحت تأثیر آنالیز بود. حسابان که توسط نیوتن، لایبنیتز، برنولی‌ها و هوپیتال پایه‌گذاری شده بود، تا اوایل قرن ۱۹ شاخه آنالیز را پدید آورده بود. با کمک حسابان، نیوتن و لایبنیتز سؤالاتی را که پیشینیان مطرح کرده بودند، پاسخ گفتند.

از آنجا که حسابان نیوتن و لایبنیتز از طبیعت متفاوتی برخوردار بودند، دلایل پذیرش حسابان آن‌ها نیز متفاوت بود. در آن زمان مسائلی به جا مانده از یونانیان، مانند مسائل مماس‌ها، نرمال‌ها، طول خم، مساحت، کمینه و بیشینه مورد توجه بود. نیوتن و لایبنیتز در عصری به حل این سؤالات پرداختند که:

۱) سؤالات قابل فرمولبندی کلی به نظر می‌رسیدند.

۲) خم‌های خاصی اهمیت فیزیکی هم داشتند.

۳) هندسه دکارت روشی برای جبران‌سازی و حل مسائل در یک جمله را پیشنهاد می‌کرد.

قبل از نیوتن و لایبنیتز هیچ روش عمومی برای حل این مسائل وجود نداشت و ارتباط بین این مسائل مورد توجه قرار نگرفته بود. روش‌های آن‌ها، الگوریتمی عمومی برای حل چنین مسائلی ارائه می‌کرد که موفقیت بزرگی محسوب می‌شد.

نیوتن از مفهوم fluxion متغیر و نرخ تغییر استفاده کرد. مسئله نیوتن محاسبه تغییر با داشتن نرخ تغییر و محاسبه‌ی نرخ تغییر با داشتن متغیر بود. او همه‌ی مسائل باستانی مذکور را به این دو بر گرداند. روش نیوتن این بود که مسائل هندسی را به زبان Kinematic ترجمه می‌کرد و سپس آن‌ها را با روش‌های فلوکسینی حل می‌کرد. بی‌نهایت کوچک‌ها و سری نامتناهی در روش نیوتن نقش مهمی را ایفا می‌کنند. سؤال اساسی اینکه چرا نرخ تغییر در بازه‌های کوتاه زمانی ثابت می‌ماند؟ نیوتن که از تعریف حدی مشتق استفاده می‌کرد، توابع را بسط می‌داد تا شبیه چند جمله‌ای شوند و پاسخ سؤال بالا روشن شود. او بین حل مسئله و ارائه اثبات دقیق به طور جدی تمایز قائل می‌شد.

لایبنیتز بر خلاف نیوتن با کمک Kinematic فکر نمی‌کرد. او یک حساب جامع و فاضل ارائه کرد که از معادلات جبری معادات جدیدی تولید می‌کند. لایبنیتز از $f(x,y) = ۰$ یک معادله دیفرانسیل می‌سازد: $g(x,y,dx,dy) = ۰$ که $\frac{dy}{dx}$را به دست می‌دهد. او روش خود را روش بی‌نهایت کوچک‌ها می‌خواند:

$$F(x+dx)-f(x) =(A(x) +B(x,dx)\, dx \quad \Rightarrow dy/dx=A(x)$$

لایبنیتز در اولین مقاله حسابان، ادعا کرد این روش برای حل مسائل بسیاری، مانند پیدا کردن کمینه و بیشینه، مفید واقع شود. اما روش لایبنیتز مشکلات فلسفی بسیاری پیش می‌آورد. مثلاًدر $\frac{dy}{dx}$باید $dx \neq ۰$. لایبنیتز برای توجیه روش خود، فلسفه بی‌نهایت کوچک‌ها را توسعه داد که راجع به آن صحبت کردیم.

جریان حسابان نیوتنی در برابر جریان حسابان لایبنیتزی

پیروان لایبنیتز، بخصوص برنولی‌ها، بر سر کاربرد روش لایبنیتز برای حل مسائل فیزیکی رقابت می‌کردند. سؤالاتی هم در کنار این تحقیقات مطرح می‌شد. لایبنیتز متوجه شد که روش او منجر به محاسبه‌ی بعضی سری‌های نامتناهی می‌شود. پیروان او این محاسبات را ادامه دادند. همچنین لایبنیتز و برنولی سعی کردند مشتق مرتبه گویا را هم معنی بدهند، و به امید این که این تعمیم به حل معادلات دیفرانسیل کمک کند.

هوپیتال که از پیروان اوست و ژان برنولی سعی کردند فرمول‌بندی بینهایت کوچک‌ها را دقیق‌تر کنند. البته هنوز تناقضات به کار بردن اعمال جبری بر روی بینهایت کوچک‌ها وجود داشت. نیوتن در مقابل، مسئله دقت ریاضی را بسیار جدی گرفت. او باور داشت راه حلی هندسی برای حل مشکل بی‌نهایت کوچک‌ها وجود دارد. نیوتن تا نزدیک مفهوم حد در کتاب پرینسیا پیش رفت. او حد افزایشی را به کار می‌برد. اما در نهایت عدم دقت حسابان نیوتنی، به دلیل مفهوم همگرایی است که دقیق نشده بود، نه مفهوم بی‌نهایت کوچک.

بعد از اینکه دعوای تقدم بین نیوتن و لایبنیتز فروکش کرد، پیروان انگلیسی نیوتن کم کم به حساب لایبنیتزی گرویدند و به خاطر محاسبات جبری با نمادهای خالی مورد حمله قرار گرفتند. به همین دلیل گرایش به لایبنیتز، وقتی برکلی دقت روش نیوتن را زیر سؤال برد، از او بسیار استقبال شد. در نتیجه مکلورن که از قوی‌ترین بازماندگان حلقه نیوتن بود، ناچار شد بیشتر به مباحثات فلسفی با برکلی بپردازد تا توسعه روش هندسی خود برای دقیق نمودن روش نیوتن.

برای نیوتن، دقت، در خدمت ارائه دادن تعبیر هندسی برای تکنیک‌های جبری بود، اما برای مکلورن که تحت تأثیر انتقادات برکلی داشت و از روش جبری رویگردان بود، دقت منجر به عقب افتادن ریاضیات انگلیسی از ریاضیات قاره اروپا شد. در حالی که تکنیک‌های لایبنیتز مشغول توسعه بودند، انگلیسی‌ها به مسئله دقت ریاضی پرداختند که تحت تأثیر نیوتن انجام شد.

دالامبر و اویلر در برابر دو جریان حسابان

لایبنیتز نشان می‌دهد $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ وروش سری‌های نامتناهی را به کار برد تا از $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ نتیجه بگیرد که $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$. اویلر این روش را به یک هنر تبدیل کرد که جمع‌های نامتناهی را محاسبه می‌کند. او می‌دانست که کاربرد کور کورانه روش لایبنیتز منجر به پارادوکس می‌شود. مثلاً از $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود حلقه لایبنیتز به این تساوی اعتقاد داشت و آن را بر هم نهی دو روش $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ پرانتزگذاری آن می‌دانست.

اویلر برای حل این معضل به تقریب زدن سری پرداخت. $\sum_1^m a_n$ رابه جای $\sum_1^\infty a_n$ به کار برد او این مسئله همگرایی را مهم تشخیص داد و روی آن تأکید کرد. اما همچنان به کاربرد سری‌های و اگرا ادامه داد. مسئله دیگر که مورد تأکید اویلر بود، حل عمومی معادله دیفرانسیل رشته طناب بود: $y = f(x+ct) + g(x-ct)$. دالامبر معادله دیفرانسیل را این چنین بیان کرده بود: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. این اولین مسئله جدی معادلات دیفرانسیل بود و حلقه لایبنیتز باور کرده بود که روش او کلید شناخت طبیعت است.

اختلاف اویلر و دالامبر بر سر شرایطی بود که gof باید در آن صدق می‌کردند. دالامبر شرط مشتق پذیری را لازم می‌دانست، اما اویلر توابع قطعه قطعه مشتق پذیر را نیز جواب می‌دانست(حتی ناپیوسته). اعتراض دالامبر این بود که در نقاط ناهمواری حتی معادله دیفرانسیل معنی ندارد. برای حل دعوا برنولی جوابی داد که یک سری مثلثاتی بود، ولی اویلر از قبل فکر می‌کرد کاربرد توابع مثلثاتی جواب‌ها را محدود می‌کند. این مسئله اساسی مطرح شد که چه توابعی می‌توانند به صورت یک سری مثلثاتی نوشته شوند که نقش مهمی در تعاریف جدید و اصول جدید ریاضی قرن ۱۹ داشت.

سهم کوشی

کوشی در دهه‌ی ۱۸۲۰ چندین تعریف مهم را ارائه کرد که تقریباً بلافاصله پذیرفته شدند و شکل آنالیز را به طور جدی تغییر دادند: اینکه مفاهیم پیوستگی، مشتق، و جمع سری‌ها باید با کمک مفهوم حد دقیق شوند. سئوال اینکه چرا کوشی چنین پیشنهادی کرد و چرا پذیرفته شد؟ کوشی پس از تعاریف معروف خود بلافاصله مفهوم بی‌نهایت کوچک را تعریف کرد $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ وپیوستگی را دو باره بر این مفهوم بنا کرد: تغییر بی‌نهایت کوچک $f(x)$ را موجب می‌شود. کوشی زبان قدیمی بی‌نهایت کوچک‌ها را نجات داد، کاری که نیوتن سعی کرد به انجام برساند. البته بسیاری از مشکلات فلسفی و محاسباتی کار با بی‌نهایت کوچک‌ها باقی ماند. سؤال اینکه چرا کوشی سعی کرد از این طریق وارد شود؟ جواب این سؤال با توجه به بحث‌هایی که داشتیم روشن است. سوال دیگر این که چرا در اوایل قرن ۱۹، ناگهان دقت ریاضی، این چنین مسئله حساس و فوری‌ای شد؟

کوشی اهمیت سری‌های نامتناهی را در توسعه آنالیز در می‌یابد، اما این روش با تکنیک‌های جبری آن زمان گاهی به نتایج غلط منجر می‌شد. روش برنولی در قرن ۱۸ پذیرفته نشد، اما در دستان فوریه در اوایل قرن ۱۹، یک روش مهم برای حل معادلات دیفرانسیل گردید. او روشی داد که برای هر تابع دل‌خواه بسط مثلثاتی بدهیم و نشان داد چگونه این روش را در ریاضی–فیزیک به کار ببریم. سؤال فوریه که آیا هر تابعی بسط فوریه دارد، ریاضی‌دانان را دوباره دعوت به تفکر در مورد مسئله دقت ریاضی کرد. بررسی اینکه مجموع سری نامتناهی از توابع پیوسته یک تابع پیوسته می‌دهد یا نه، نیاز به دقیق کردن مفهوم حد و مفهوم پیوستگی داشت. بنابراین ناچار بودند مفهوم پیوستگی را به آن نواحی که تفکر هندسی کار نمی‌کنند توسعه دهند. پس مشتق تعریف جدیدش را یافت. بنابراین دقیق‌سازی بی‌نهایت کوچک نبود که دلیل اصلی تعریف‌های کوشی بود .

تعریف حدی مشتق توسط $L'Huilier$ قبلاً ارئه شده بود، اما فراموش شده بود و در زمان کوشی دوباره مورد توجه قرار گرفت. چرا؟ چون حد در فرمول‌بندی جدید آنالیز مرکزیت یافته بود. محک‌های کوشی برای حد داشتن سری‌ها نقش مهمی در آنالیز قرن ۱۹ ایفا کرد. استفاده از بی‌نهایت کوچک‌ها منجر به اشتباهاتی در نتایج کوشی شد. یکی اینکه مجموع نامتناهی از توابع پیوسته همیشه پیوسته است، لذا توابع ناپیوسته سری فوریه ندارد با

وجود این اشتباه، روش کوشی برای حل معزل آنالیز پذیرفته شد. حل مسئله او منجر شد که او را به عنوان فردی بشناسند که می‌داند ریاضی باید چگونه انجام شود.

مشکل دیگری که در کار کوشی بود این بود که محک‌های او شرط لازم و کافی برای همگرای را نمی‌دادند و تئوری اعداد حقیقی دچار خدشه شده بود. این مشکل توسط پرسش‌های ددکیند حل شد تا وقتی که و ایراشتراوس روش کوشی را نجات دهد. مسیری را که کوشی ترسیم کرده بود، روشنگر راه آنالیز دانان قرن ۱۹ بود.

سهم آبل

آبل پس از آشنایی با کار کوشی در زمینه همگرایی، در سفرش به پاریس در نامه‌ای به دوستش Holmboe می‌نویسد: «در سرسر ریاضیات به ندرت یک سری نامتناهی پیدا می‌شود که مجموع آن به دقت محاسبه شده باشد. به عبارت دیگر، اساسی‌ترین بخش ریاضیات بدون مبانی رها شده است. » اویلر به سری نامتناهی واگرا نیاز داشت تا بعضی سری‌های همگرایی خود را به دست آورد، اما کوشی و آبل آماده بودند که اعلام کنند سری‌های واگرا مجموع ندارند و نتایج بسیاری از اویلر را از حوزه آنالیز خارج کنند. آن‌ها برای دقیق کردن بسط فوریه به چنین قربانی احتیاج داشتند. اویلر از امکان این انتخاب آگاه بود، اما او طرف دیگر ترازو را سنگین‌تر دید. آبل نشان داد سری $Sinx-\frac{1}{2}Sin2x+\frac{1}{3}Sin3x-...$ در $x=(2m+1)\pi$ ناپیوستگی دارد و اشکال داشتن استدلال کوشی را نشان داد. ولی پیدا کردن اشتباه استدلال او به این سادگی نبود. بعدها معلوم شد که مشکل اثبات یک شکل منطقی بوده که صورها را با هم جابه‌جا نموده. این اشتباه در پشت زبان بینهایت کوچک‌ها پنهان شده بود. حل این معضل را مدیون دیریشله، Seidel و وایرا شتراوس هستیم.

وایراشتراوس برای حل معضل استدلال کوشی روش دقیقتر $\varepsilon-\delta$ ارائه کرد که برای دانشجویان و حتی دانش آموزان امروز بسیار شناخته شده است. آبل کوشی را چنین توصیف می‌کند: «کوشی رفتار معقولی ندارد و غیر ممکن است بتوان حرف خود را به او شنواند، اگر چه در این لحظه او آن مردی است که می‌داند چگونه باید ریاضی انجام داد. آنچه انجام می‌دهد عالی است، اما بسیار در هم و برهم و پریشان است. »

دقت وایراشتراوسی

آبل، ژاکوبی، دیریشله و دیگران هر کدام سهمی در شکل‌گیری آنالیز داشتند، اما تغییرات معرفی شده توسط وایراشتراوس، از دیگران اساسی‌تر و تعیین کننده‌تر بود. وایراشتراوس را خالق آنالیز مدرن می‌دانند. این نظر میتاگ لفلر، پوانکاره و هیلبرت است. البته تحقیقات وایراشتراوس هرگز مبنای سیستماتیکی برای آنالیز را مستقیماً معرفی

نمی‌کند و باید ایده‌های او را در بین انبوه مقالات او جست. حتی مقاله‌ای به هدف دقیق کردن و پایه‌گذاری مبانی آنالیز ندارد. او تمام مبحث بی‌نهایت کوچک را حذف نمود و به جای آن $\varepsilon - \delta$ گذاشت.

چرا نظرات وایراشتراوس بلافاصله پذیرفته شد؟ او معضل کار کوشی را با جداسازی مفاهیم پیوستگی و پیوستگی یک نواخت حل نمود. موفقیت او در توسعه‌ی کارهای آبل و ژاکوبی در مورد توابع بیضوی حل مسئله‌ای بود که شهادت به قدرت تکنیک‌های او می‌داد.

وایراشتراوس که تا۴۰ سالگی معلم دبیرستان بود، با کمک تحقیقات خود به درجه استادی رسید. در سال‌های آخر عمر به این نتیجه رسید که از روش‌های جبری خود دست بکشد و به فرمول‌بندی تئوری توابع بپردازد و او قانع شده بود که روش‌های او روش صحیح انجام آنالیز است و این را در نامه‌ای به شوارتز خاطر نشان کرد. وایراشتراوس بی‌نهایت کوچک‌های لایبنیتز را دور ریخت، در حالی که حتی کوشی سعی در زنده نگه داشتن آن‌ها داشت.

دیدگاه ددکیند

این ایده که دنباله‌های مختلفی که به دل‌خواه به هم نزدیک می‌شوند حد مشترکی دارند و می‌توان آن‌ها را یکی گرفت، توسط کوشی ارائه شد. اماچون دیدگاه‌های همگرایی او هنوز به زبان $\varepsilon - \delta$در نیامده بود، مبانی اعداد حقیقی را مشکل‌ساز می‌کرد. ددکیند از دیدگاه هندسی دوباره فرار کرد و گفت باید عبارت‌های کاملاًجبری را برای تعریفR به کار برد. ددکیند، وایراشتراوس و دیگران تصمیم گرفتند اعداد حقیقی را بر مبنای کاملاً جبری بنا کنند. در این میان Bolzano در مقالات فلسفی نیاز به بازنگری در مفهوم اثبات در آنالیز را مطرح کرد. ددکیند مفهوم پیوستگی را با مفهوم «بدون رخنه بودن» جایگزین کرد. او با کمک مفهوم «برش» اعداد حقیقی را تعریف کرد.

تحت تأثیر وایراشتراوس و ددکیند، آنالیز از هندسه دور و به جبر نزدیک می‌شود و این همان گرایشی است که امروز در آنالیز کلاسیک دیده می‌شود. البته آنالیز هندسی هم بعدها در قرن۲۰ به وجود آمد. آنچه کوشی نتوانسته بود ثابت کند، این بود که دنباله افزایشی که از بالا کراندار است حد دارد. کار ددکیند یک انقلاب در زبان آنالیز بود که حل مسائلی نظیر بالا راممکن می‌ساخت. البته کار ددکیند خود مسائل جدیدی مطرح کرد. مثلاًاین سؤال که وجود چنین مجموعه‌هایی که شرایط ددکیند را برآورده کنند چگونه ثابت می‌شد؟

تحلیل سیر تحول آنالیز در قرن نوزدهم

تحقیقات کوشی، آبل، وایراشتراوس و ددکیند، نشان می‌دهند که سیر تحول آنالیز در پاسخ به نیازهای تحقیقات ریاضی‌دانان شکل گرفته است و تأکید آنالیز دانان بر افزایش دقت، محصول عوامل دیگری بوده است. اما این خود منجر شد که یک حرکت و نهضت دقیق‌سازی در ریاضیات شکل بگیرد. فرگه نیاز به این تحولات را گوشزد کرد اما

ریاضی‌دانان نپذیرفتند. او به جای ادامه خط مبانی دقت یک بر نامه‌ی جدید در دقت ریاضی را مطرح کرد که بر مبانی حساب توجه داشت.

فرگه برای جلب توجه ریاضی‌دانان شروع به نقد تحقیقات آنان کرد، اما باز هم توجه ریاضی‌دانان جلب نشد، چون نکاتی را که او به آن‌ها تأکید داشت و نقد می‌کرد مانع پیشرفت تحقیقات ریاضی نبودند. از آنجا که تفکر دقیق و نظام معرفتی او توسط ریاضی‌دانان پذیرفته نشد، می‌توان نگاه اجتماعی به علم و تحولات آن را به نگاه پیشینی به آن ترجیح داد. چرا که در عمل موضع گیری‌های اجتماعی دانشمندان مسیر علم را مشخص می‌کند.

سر انجام تلاش‌های کانتور و ددکیند برای حل مسائل نظریه مجموعه، منجر به پارادوکس‌هایی شد که روش فرگه می‌توانست برای رفع آن‌ها نجات بخش باشد. این جا بود که راسل، صاحب پارادوکس راسل، فرگه را به ریاضی‌دانان باز معرفی کرد. ولی فرگه به این خط تحقیق نپیوست و به راه‌هایی که از پیش برای خود طراحی کرده بود ادامه داد.

تاریخ خلاصه آنالیز این که، پاسخ به سؤالات و نظم بخشی به پاسخ‌های گذشته، منجر به بازسازی حسابان شد. روش لایبنیتزی انجام ریاضیات، منجر به سؤالاتی شد و در دستان اویلر تغییرات زبانی خاصی را باعث شد تا سبک انجام ریاضی و استدلال تغییر کند. سؤالات مورد توجه، تحت تأثیر ریاضی– فیزیک تغییر کردند و پاسخ فوریه مسئله قدیمی دقت ریاضی را دوباره پیش کشید. مسئله فرمول‌بندی دقیق سری‌های نامتناهی برای کوشی و آبل اهمیت پیدا کرد. فرمالیسم دقیق‌تر کوشی پذیرفته شد، چون احتیاجات تحقیقات ریاضی رابرآورده کرد. اما زبان جدید کوشی سؤالات جدیدی پیش پا گذاشت و مسائل جدید دقت ریاضی را مطرح کرد که توسط وایراشتراوس و دد کیند حل شد. این روند بر خلاف این تصور است که ریاضی‌دانان، دانش پیشینی از اصول موضوعه و تعاریف موجودات مجرد ریاضی دارند.

سر نوشت فرگه نشان می‌دهد که دغدغه‌های فیلسوفان و ریاضی‌دانان چقدر تفاوت دارند و پاسخ به این سؤال که راسل و فرگه فیلسوفند یا ریاضی‌دان بسیار سرگیجه‌آور خواهد بود. حال می‌توان نگاه تاریخی داشت به این که چگونه تحقیقات نیوتن و لایبنیتز را می‌توان از عقب تا ریاضیات یونانی دنبال کرد و این که چگونه ریاضیات وایراشتراوس و ددکیند ذات خود را در ریاضیات بورباکی به نمایش گذارد. در واقع تصویرسازی نیوتن تعمیم پیدا می‌کند که پیوسته غول‌های ریاضی یکی بر پشت دیگری می‌نشینند و کسی که آنقدر خوشبخت است که در بالا قرار گیرد، فاصله بسیار دوری را مشاهده می‌کند.

تأثیرات تحولات مبانی آنالیز در سایر شاخه‌های ریاضیات

تحولات مبانی آنالیز، نه تنها منجر به شکل‌گیری بسیاری از زیر شاخه‌های بین آنالیز و جبر و هندسه و نظریه اعداد را هم شکل داد. با این حال هنوز آنالیز دان، هندسه‌دان و جبردان دغدغه‌های خود را داشتند. تأکیدات

آنالیزدانان بر دقت ریاضی، سیر تحقیقات آنالیز را هدایت کرد. اما هندسه‌دانان و جبردانان سؤالات مبانی ریاضی خود را داشتند.

هندسه‌دانان دغدغه‌ی توسعه و درک مفهوم فضا را داشتند. هرچند از تحقیقات آنالیزدانان استفاده کردند، اما دیدگاه‌های آنالیزدانان بر مبانی ریاضی به هیچ وجه بر آنان تأثیر نگذاشت. جبردانان دغدغه شناخت ساختارهای عددی و بازسازی مفهوم گروه را داشتند. تشخیص ساختارهای جبری کلیدی در ریاضیات آنان را تشکیل می‌داد و به هیچ وجه تحت تأثیر آنالیزدانان به دقت ریاضی تأکید نداشتند.

در واقع فرگه و راسل اشخاصی همچون لایبنیتز بودند که فلسفه، پشت‌صحنه ریاضی آنان را تشکیل می‌داد. اینان ریاضی‌دانان قرن هفدهمی بودند. از دل تحقیقات این ریاضی‌دانان، منطق ریاضی شکل گرفت. اما این دیسیپلینی بسیار متفاوت از سایر ریاضیات بود که بسیاری شک داشتند که آن را جزءریاضی محسوب کنند یا نه! سر انجام منطق به حل بسیاری از مسائل مطرح در قرن ۲۰کمک کرد و جای خود را در ریاضیات باز نمود.

فصل۸

شکل‌گیری مبانی هندسه در ریاضیات قرن نوزدهم

تفکرمدرن در هندسه بعد از کشف هندسه‌های نا اقلیدسی شکل گرفت، اما ظهور تفکر هندسی با ظهور تفکر فلسفی در یونان باستان تطابق دارد. روش استدلالی، خودنقاد و خودپردازی که یونانیان فلسفه نامیدند، به یافته‌های هندسی تمدن مصر و بابل روح بخشید و علم هندسه را ساخت. هر از چند گاه، هندسه توجه فیلسوفان را به خود جلب می‌کنند تا نبوغ معرفت شناختی و قوه تخیل پیشگام خود را به مبارزه بطلبند.

در مدت کوتاهی، اثبات در تمدن یونان از نگاه کردن به یک شکل خاص و نتیجه گرفتن گزاره‌های کلی با توجه به فقط بعضی ابعاد شکل، ارتقا یافت و به درک معنای کلمه یا کلماتی در یک یا چند جمله و لذا قابل کاربرد در حساب گردید. درک امکان وجود طول‌هایی که نسبت گنگ دارند، منجر شد هندسه‌دانان برای هر گزاره اثباتی دقیق طلب کنند. این موجب شکل‌گیری فرهنگی شد که مفهوم علم از آن در دستان ارسطو متولد شد. از آنجا که دوایر و سلسله نامتناهی در تعاریف مورد قبول نیستند، هر علمی مفاهیم تعریف نشده دارد.

این دیدگاه در اصول اقلیدس تجلی یافت و از آنجا که فلاسفه یونانی هر موجودی را ساختنی می‌دانستند، اما هر ساختی را لزوماً موجود نمی‌دانستند، اقلیدس به وجود و ساختن در هر گزاره به طور جداگانه بخشی را اختصاص داد. اصول اقلیدس با نجوم ارسطویی هماهنگی نداشت، چه در چنین مدلی از آسمان هر خط راستی به طور پیوسته بدست نمی‌آمد و هر نقطه‌ای مرکز دایره‌ای به شعاع دل‌خواه نبود. لذا اقلیدس اصول موضوعه‌ی خود را مستقل از نجوم ارسطویی برگزیده بود و استحکام منطقی هندسه او در قرن ۱۷ منجر شد که فضای نامتناهی اقلیدسی، جایگزین مدل متناهی ارسطویی برای آسمان شود. ارسطو از امکان عدم تطابق مدل خود با هندسه آگاه بود.

اما ارسطو اعتقاد داشت بی‌نهایت در هندسه نتیجه ایده‌آل‌سازی ریاضی‌دانان است و کاربرد عملی ندارد، در واقع هندسه‌ی مدل ارسطو کروی بود و از آنجا که اصول موضوعه‌ای اقلیدسی را نقض نمی‌کرد، جزء هندسه‌های اقلیدسی محسوب می‌شود. در نجوم ارسطویی، هرچند هندسه با پیش‌گویی آینده با کمک گذشته به کار می‌رفت، اما قرار نبود کارکرد طبیعت را تبیین کند. این تحت تأثیر افلاطون بود که لایه‌های تجرید ریاضیات و اهمیت آن در تربیت معنوی مورد تأکید قرار گرفته بود تا کاربرد آن در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی. این در مدل ائودوکسوس و پیروانش هویداست.

در طی قرون، بسیاری با این مدل آسمان مشکل فلسفی داشتند. اما کسی که فهمید آنچه همه‌ی منجمان به دنبال آن هستند ارائه توصیفی زمینی از پدیده‌های آسمانی است، کپلر بود و همین کار را هم آغاز کرد. هم او بود که آسمان را تحت حکمرانی فیزیک و آن را تحت حکومت هندسه و عدد قرار داد. ایده دوم به طور مستقل توسط گالیله نیز مطرح شد. اما اولین کسی که جهان بالای سر ما را نامتناهی دانست دکارت بود. چرا که بدون آن قانون اینرسی دکارت ممکن نمی‌شد. دکارت این بی‌نهایت را مادی می‌دانست، اما فیلسوفان پس از او آن را فضای خالی از ماده که

منجر به فضای مجرد شد گرفتند. این تجرید ذهنی بود یا اینکه مستقل از ماده وجود داشت؟ این منجر به نظریات کانت در مورد فضا شد که در واقع آغاز معرفت شناسی هندسه بود. از دیدگاه کانت، فضا یک ایده‌آل‌سازی ذهنی برگرفته از طبیعت است.

اینجا بود که کانت هندسی اقلیدسی را پیشینی دانست و هندسه تبدیل به علم فضاها شد. این ایده توسط روش مختصات دکارت حمایت گردید که بسیاری از فرزندان فلسفی خود را به همراه آورد.

پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی

مسئله توازی خطوط و مشکلات آن مورد توجه ارسطو قرار گرفته بود و با ارائه اصل پنجم اقلیدس این مسئله حل شده بود. پروکلوس و بطلمیوس و تحت تأثیر اینان بسیاری از ریاضی‌دانان اسلامی سعی کردند اثباتی از این اصل ارائه کنند. والیس اصل پنجم را از وجود مفهوم تشابه نتیجه گرفت(۱۶۹۳) ساکری چهار ضلعی معروف خود را ابداع کرد و برای هر یک از سه حالت آن چندین معادل منطقی یافت(۱۷۳۳). دالامبر به این نکته دقت کرد که یکی از دو حالت اضافی روی کره و دیگری احتمالاًروی کره‌ی موهومی باید صدق کنند(۱۷۶۶). او به مفهوم مدرن مدل برای اصول موضوعه نیز دست یافت. در اواخر قرن ۱۸ و اویل قرن ۱۹ چندین نفر از جمله لژاندر راجع به تئوری توازی‌ها رساله نوشتند و سر انجام د ر۱۸۱۸ schweikart رساله‌ای به گاوس تقدیم کرد که «هندسه نجومی» نامیده بود و در آن مجموع زوایای مثلث کمتر از 2π می باشد.

کشف هندسه اقلیدسی به طور مستقل به ریاضی‌دانان مشهور روس، لوبا چفسکی(۱۸۳۰)، یانوش بولیایی(۱۸۳۲) از مجارستان و در زمان نامعلومی به گاوس ریاضی‌دان مشهور آلمانی نسبت داده می‌شود. گاوس از ۱۷۹۸ روی این مسئله کار می‌کرد. لباچفسکی بر خلاف schweikart آن را هندسه موهومی نامید گاوس اعتقاد داشت درک هندسه‌ی جهانی که در آن زندگی می‌کنیم نه در این دنیا با درک انسانی ما، بلکه در جهان دیگر بر ما آشکار خواهد شد. لذا بهتر است فعلاً هندسه را نه بر اساس حساب، بلکه براساس مکانیک پایه‌گذاری کنیم.

از لحاظ معرفت شناسی، ثابت گرفتن تمام فرضیات آشکار و پنهان هندسه اقلیدسی به جز اصل پنجم بسیار اهمیت دارد و این همان کاری است که خالقان هندسه‌ی نااقلیدسی به دقت انجام دادند و تمام نتایج هندسی آنرا استخراج کردند. تعریفی که گاوس، لباچفسکی و بولیایی در توازی ارائه می‌دهند، ناچار است تقارن را بشکند و توازی در دوجهت یک خط را متمایز کند. خطوط موازی عمود مشترک ندارند و از یک سو به طور مجانبی به هم میل می‌کنند.

مجموع زوایای هر مثلث عددی کمتر از 2π اما متغیر است. مفهوم تشابه دیگر وجود ندارد و هر مثلث با زوایای آن به طور یگانه مشخص می‌شود. علی‌الخصوص، مساحت مثلث با مجموع زوایای آن مشخص می‌شود. مثلثات هذلولی جایگزین مثلثات اقلیدسی می‌شود. پیش از این، تشابه مثلثات کروی و اقلیدسی مورد توجه مسلمانان قرار

گرفته بود، اما اکنون این سه مثلثات تبدبل به سه تئوری موازی مثلثات شدند. قضیه فیثاغورس به طور خاص، قضیه کسینوس‌ها. قضیه‌ی سینوس‌ها، همه در هر سه تئوری معنی دارند.

نکته‌ای که قبلاًمورد توجه نبود اینکه هندسه اقلیدسی حد هندسه‌های کروی است وقتی شعاع بزرگ می‌شود. هندسه‌های نا اقلیدسی هم یک خانواده‌ی پیوسته از هندسه‌ها هستند که در حد به هندسه اقلیدسی میل می‌کنند. به همین دلیل بعضی فلاسفه اعتقاد دارند که شهود بی‌گمان هندسه‌ی اقلیدسی را ترجیح می‌دهد. اما لباچفسکی اعتقاد داشت، در هندسه نااقلیدسی(هذلولی) حرکت از متناهی به نامتناهی پیچیدگی کمتری دارد و با شهود هماهنگ‌تر است. شاید دلیل تعویق کشف هندسه‌ی هذلولی توسط بلترامی ساخته شد که توجه کرد مثلثات کره‌ی موهومی شبیه مثلثات هذلولی است.

نگاهی فلسفی به بنیان گذاران هندسه اقلیدسی

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی از دیدگاه فیلسوفان دو سیستم منطقی سازگارند و این سؤال که کدام حقیقی است یا کدام صحت دارد را نمی‌توان داخل این تئوری‌ها مورد بررسی قرار داد. هر چند چنین دیدگاهی فرمالی به اصول موضوعه توسط دالامبر و نویسندگان قرن ۱۸ مطرح شده بود، اما مخالفان هندسه جدید به دنبال علم فضا و مبنایی جدید برای علوم فیزیکی بودند و صحت فیزیکی این هندسه را مورد نقد قرار می‌دادند.

یک نکته جالب کاربرد مفهوم خط مستقیم است که با وجود اینکه تفکر متریک و مفهوم ژئودزیک هنوز معنی نداشت، مورد تأکید گاوس، لباچفسکی و بولیایی قرار گرفت. این تأییدی بر تفکر فیزیکی آن‌هاست. کاربرد موفق هندسه دکارتی نشان داد که ثابت هندسه هذلولوی در صورت صحت باید عددی بسیار بزرگ باشد. لباچفسکی برای محاسبه این عدد محاسباتی نجومی انجام داد و اختلاف هندسه جهان با هندسه اقلیدسی در چار چوب خطای محاسبات او قابل نمایش نبود. لباچفسکی از نظریات جوانی کانت پیروی می‌کرد که تنها ادراک ذهن ما در خلق مفهوم فضا، حرکت است و هندسه فضا را طبیعت نیروهاست که مشخص می‌کند. پس چرا نباید بتوان دو هندسه برای کنترل دو نوع از نیروهای طبیعت داشت؟

نکته دیگر این که از کجا گاوس، لباچفسکی و بولیایی آنقدر مطمئن بودند که هندسه جدید تناقضی در بر ندارد؟ این شباهت تئوری‌های اقلیدسی، کروی و هذلولی است که آن‌ها را به این باور رساند که هندسه هذلولوی حداقل همان قدر درست است که هندسه‌های اقلیدسی و کروی بدون تناقض هستند. به عبارت دیگر مفهوم عدم تناقض منطقی اصول موضوعه بر آن‌ها آشکار نبود. بنابراین فرم کلی معادلات جبری صادق در این هندسه‌ها آن چیزی است که مستقل از اصل موضوع پنجم اقلیدس می‌باشد.

مثلثی به اضلاع a,b,c و زوایای A,B,C را در نظر بگیرید.

در مثلثات کروی:

Sin a sin B= sinb sin A

Cos A sin b sin c= cos A-cos b cos c

Cos a sin B sin C= cos a- cosB cos C

Cot Asin C= cos C cos b–cot a sin b

تبدیلات لباچفسکی چنین است:

$$\sin\pi(\text{ia}) = \frac{1}{\cosh ia} = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cos\pi(\text{ia}) = \tanh \text{ia} = I \tan a$$

$$\tan\pi(\text{ia}) = \frac{1}{\sinh ia} = \frac{1}{i\sin a}$$

اگر تابع $\pi(x)$ با فرمول‌های بالا تعریف شود، فرمول‌های مثلثات هذلولی چنین می‌شود:

$$\tan\pi(a) \sin A = \tan\pi(b) \sin B$$

$$\cos A \cos\pi(b) \cos\pi(c) = ۱ - \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)}$$

$$\cos C + \cos A \cos B = \frac{\sin A \sin B}{\sin\pi(c)}$$

$$\cot A \sin B \sin\pi(c) = \cos B - \frac{\cos\pi(c)}{\cos\pi(a)}$$

تابع$\pi(x)$ در هندسه هذ لولی تعبیر هندسی نیز دارد.

خم و رویه و مفهوم خمیدگی

مطالعه خم‌ها توسط یونانیان شروع شد و در قرن ۱۷و ۱۸ زیر سایه هندسه دکارتی توسعه یافت. مطالعه جهت خم در اکتشاف حسابان نقش مهمی ایفا کرد. این ایده‌ها منجر به تعریف طول خم و مفهوم خمیدگی شدند. در قرن ۱۸ خم‌ها در فضای سه بعدی و سپس رویه‌ها بررسی شدند و مفهوم خمیدگی به این حالت‌ها توسعه داده شد. تغییرات بردار سرعت وقتی که خم با طول پارامتزه شده باشد، همان مفهوم خمیدگی را در خود دارد.

برای رویه‌هایی که در فضای اقلیدسی نشسته باشند، مفهوم مقطع نرمال را تعریف می‌کنند و همان طور که اویلر ثابت کرد، مقدار $k_{\max}$ و $k_{\min}$ به عنوان خمیدگی این مقاطع روی دو مقطع عمود بر هم احراز می‌شوند. در فضای مماس $k = k_{\max}\cos^2\varphi + k_{\min}\sin^2\varphi$ فرمول خمیدگی در جهت مشخص شده با زاویه φ را نشان می‌دهد.

مفهوم خمیدگی کل که کل تغییرات خمیدگی را محاسبه می‌کند $k_t(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k(s)ds$ که همانطور تصویر نگاشت مشتق خم می‌باشد. از اینجا گاوس خمیدگی رویه را تعریف می‌کند:

خمیدگی گاوسی اگر ϕ نگاشت پارامتری ساز رویه و n نگاشت گاوس باشد:

$$k(p) = \lim_{s \to p} \frac{n(s)}{\phi(S)}$$

برای این کار نیاز به یک تئوری مساحت برای رویه‌ها داریم.

گاوس ثابت می‌کند $k(p) = k_{\max}k_{\min}$. به علاوه نشان می‌دهد علامت $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ در یک مثلث بینهایت کوچک بستکی به خمیدگی رویه و علامت آن دارد(۱۸۲۷) که پیشنهاد می‌کند رویه‌های با انحنای منفی می‌توانند مدلی برای هندسه هذلولی باشند که ۴۰ سال بعد توسط بلترامی ثابت شد.

به علاوه گاوس نشان داد بسیاری از خواص رویه‌ها به تحدید متریک روی آن‌ها بستگی دارند نه به طرز نشستن آن‌ها در فضای اقلیدسی. مثلاً اگر قضایای هندسه اقلیدسی راروی کاغذ دیواری چاپ کنیم، درستی آن‌ها ربطی به لوله شده بودن یا روی دیوار بودن کاغذ دیواری ندارد. مهمترین نتیجه از این نوع Theorema egregium است که نشان می‌دهد مفهوم خمیدگی گاوسی فقط به تحدید متریک بستگی دارد:

$$\text{Ds}=\left| (Edu^2 + 2fdudv + Gdv^2)^{1/2} \right|$$

ماتریس $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ در هرنقطه برای ما کاملا اطلاعات ذاتی intrinsic رویه، علی‌الخصوص خمیدگی گاوسی را می‌دهند. از این جا، مفهوم نقشه‌ی موضعی برای رویه و متریک القایی روی تصویر آن مطرح می‌شود که یک فرمول‌بندی کلی با کلیت کافی برای بازهای فضای اقلیدسی به دست می‌آید که با به هم چسباندن این نقشه‌های موضعی می‌توان رویه را بازسازی کرد.

تئوری ریمان از فضادر ۱۸۵۴ تحت تأثیر این تصویر هندسی که گاوس از هندسه‌ی رویه‌ها به دست آورد، شکل گرفت. ریمان که شاگرد گاوس گوتینگن بود، برای کامل ساختن habilitation خود در یک سخنرانی عمومی در برابر هیئت علمی دپارتمان فلسفه، این سؤال را مطرح کرد که «ساده‌ترین روشی که بتوان روابط متریک در یک فضا را به دست آورد چیست؟ »ریمان ادعا می‌کند که در پاسخ به این سؤال، تنها از چند نکته از مقاله‌ی گاوس و بعضی تحقیقات فلسفی herbart او را یاری کرده‌اند.

خمینه، فضای مماس و مفهوم متریک ریمانی

ریمان مفهوم کمیت n- بعدی توسعه یافته که در صورت وجود نگاشت‌های یکسان‌سازی پیوسته، خمینه پیوسته و در غیر این صورت، خمینه‌ی گسسته خواهد بود، معرفی کرد. همین طور حالت‌های متناهی و نامتناهی بعدی را هم در نظر گرفت. مفهوم فضایی که ریمان معرفی کرد با اندک تغییر همان مفهوم خمینه امروزی است.

ریمان مثال روزمره فضایی که یک جسم یا اجسامی اشغال می‌کنند معرفی می‌کند، هر چند خاطر نشان می‌شود که در ریاضیات محض چندین مصداق از خمینه یافت می‌شود. به طور دقیق از یک خمینه یک بعدی و یک خمینه n- بعدی، یک خمینه$(n+1)$- بعدی می‌سازد و بر عکس یک خمینه–n بعدی را به یک$(n-1)$- بعدی و یک بعدی تجزیه می‌کند.

ریمان با بی‌دقتی فرض کرد یک باز IR^n نمی تواند با یک باز IR^m همان ریخت باشد. به طور شهودی، این حکم بدیهی به نظر می‌رسد، اما تنها در ۱۹۱۱ توسط براوئر ثابت شده است. مفهوم فضای مماس خمینه به سادگی می‌توانست از تعمیم فضای مماس خم‌ها و رویه‌هایی که در IR^3 می‌نشینند، به عاریت گرفته شود، اما در سخنرانی ریمان فضای مماس بسیار ضمنی وارد شده است. ریمان به دست آوردن اطلاعات کمی در مورد خمینه‌ها را وابسته به «اندازه‌گیری» می داند. از نظر او، اندازه‌گیری بر هم نهی کمیت‌هایی است که مقایسه می‌شوند. این جمله سال‌ها بر فیلسوفان فیزیکدان گران آمد، چرا که اندازه گیری‌های فیزیکی هرگز در چنین محکی صدق نمی‌کنند. ریمان نتیجه گرفت که در خمینه باید نسبت‌ها مستقل از مکانشان معنی داشته باشند. یک برداشت می‌تواند این باشد که طول خط، مستقل از روش نشاندن خط در خمینه است. طول خط را چنین تعریف کنیم: $\int_a^b \|c\|dt$ که مستقل از پارامتریزه‌سازی خم است. پس روی هر فضای مماس نُرم احتیاج داریم.

ریمان مطالعه را محدود می‌کند به خمینه‌های ریمانی که روی هر فضای مماس، یک فرم متقارن دو خطی ناتکین مثبت معین تعریف شده است که به طور هموار تغییر می‌کند. توجه کنید که در نسبیت انشتین، خمینه‌های نیمه ریمانی مورد نیاز است که در آن طول بردار می‌تواند منفی باشد. نکته اینکه، درخمینه‌های ریمانی یک فضای متریک داریم، اما در خمینه‌های نیمه ریمانی چنین نیست.

ریمان با همین فرمولبندی، مفاهیم خمیدگی، ژئودزیک، خمینه تخت، خمینه انحنای ثابت را از رویه‌ها به ابعاد بالا تعمیم می‌دهد و نشان می‌دهد که تنها در خمینه‌های با انحنای ثابت وجود جسم صلب ممکن است. پس رویه‌های با انحنای ثابت را مطالعه می‌کند و سپس به کار بردهای تئوری خود در باب مفهوم فضا می‌پردازد. از دیدگاه ریمان، فرض خمیدگی صفر علمی نیست و فقط می‌توان فرض کرد خمیدگی در $(-\varepsilon,\varepsilon)$ تغییر می‌کند. حتی اگر خمیدگی یک ناحیه صفر باشد در مقیاس بی‌نهایت کوچک خمیدگی فضا ممکن است به شدت متغیر باشد. این اولین قدم به سمت نسبیت انشتین است. فرض مهم دیگر ریمان نامتناهی بودن فضا است. به علاوه ریمان متذکر

می‌شود صحبت درباره خواص سرتاسری اهمیت فیزیکی چندانی ندارد، بلکه نوشتن صحیح خواص موضعی است که در فیزیک و پیچیدگی‌های آن ممکن است نقش جدی ایفا کند و خواص متریک از این نوع است. ریمان در اینجا از انشتین پا فراتر می‌گذارد و به شکست مفهوم فضا در کوانتوم اشاره می‌کند.

هندسه تصویری و متریک تصویری

همزمان با خلق هندسی نااقلیدیسی چندان معروفیت نیافت، پونسله هندسه تصویری را بنا نهاد و با اینکه بسیاری از مبانی فلسفی هندسه اقلیدسی را زیر پا می‌گذاشت و به نظر هندسه‌ای بدون متریک می‌رسید، به دلیل شباهت ظاهری سبک آن با هندسه اقلیدسی به سرعت رواج یافت و با نام «هندسه مدرن» در دانشگاه‌ها تدریس می‌شد، تا اینکه در ۱۸۷۱ کلاین با کمک کیلی روی این فضا متریکی طبیعی گذاشتند اما به نظر می‌رسید با تغییرات غیر کلیدی در این متریک هندسه این فضا شبیه اقلیدسی، هذلولوی یا کروی می‌شد.

ریشه‌های هندسه تصویری از پرسپکتیو رنسانس نشأ ت گرفته که ایده‌های آن توسط نقاش ایتالیایی آلبرتی، استاد لئوناردوداوینچی برای اولین بار مطرح شد. اولین ریاضی‌دان که چنین ایده‌ای را ریاضی کرد کپلر(۱۶۱۴) بود و دزارگ آن را با موفقیت در حل مسائل هندسه به کار برد، که خود تحت تأثیر پاسکال قرار گرفته بود(قرن۱۷). در قرن ۱۸ موفقیت هندسه تحلیلی هندسه‌ی تصویری را تحت الشعاع قرار داد و در قرن۱۹ مونژ و شاگرد او پونسله در فرانسه نهضت هندسه‌ی مدرن را هدایت می‌کردند.

ایده‌ی اصلی هندسه تصویری، تصویر کردن هندسه صفحه و خطوط آن بر هندسه صفحه‌ای دیگر و خطوطی روی آن صفحه است که نسبت به یک نقطه که مرکز تصویر است، انجام می‌شود. صفحه تصویری از اضافه کردن خطی تصویری در بینهایت به دست می‌آید که جهت پذیر نیست. خط تصویری با نقطه‌ای که دو سر آن را در بی‌نهایت وصل می‌کند، بسته شده است. فضای سه بعدی تصویری از اضافه کردن یک صفحه تصویری در بی‌نهایت به‌دست می‌آید.

پاش در ۱۸۸۲ یک صورت بندی تحلیلی از هندسه تصویری ارائه کرد که آن را به عنوان زیر فضاهای خطی یک فضای برداری معرفی می‌کرد. این صورت بندی اصل دو گانی را که ژرگون در ۱۸۲۵ به آن اشاره کرده بود، ثابت می‌کرد. بنابر اصل دو گانی، یک گزاره در صفحه تصویری، با تبدیل خط به نقطه و نقطه به به خط باز هم صحیح خواهد بود. صورت بندی تحلیلی پاش، راه را برای صفحه تصویری مختلط که توسط کلاین معرفی شد باز نمود. تبدیلات تصویری، قطب و قطبی، نسبت همساز همگی در صفحه تصویری مختلط تعمیم پیدا کردند.

کلاین به هر مقطع مخروطی روی $p^2(c)$ یک متریک روی متمم مقطع نسبت داد که با نسبت همساز تعریف می‌شد. این متریک، تابع فاصله‌ای با مقادیر مختلط بود که در $d(p,Q)=-d(Q,p)$ و $d(p_1,p_2)+d(p_2,p_3)=d(p_1,p_3)$ صدق می‌کرد. کیلی توجه کرد که این متریک می‌تواند به عنوان زاویه تعبیر

شود و روی فضای دوگان یک زیر فضای متریک وابسته به مقطع بدهد. کلاین این زیر فضا را دقیقاً مشخص کرد و سه هندسه هذلولوی، سهموی و بیضوی را تشخیص داد. کلاین اینجا توقف نکرد و محاسبات خود را به بعد سوم $p^3(c)$ تعمیم داد.

مدل کلاین، یک مدل تصویری از هندسه نااقلیدسی بود. اندکی قبل از کلاین، بلترامی با کمک شبه کره مدلی اقلیدسی از هندسه نااقلیدسی ارائه کرد. او متوجه شد که ژئو دزیک‌های روی شبه کره در مرز تکینگی دارد و هیلبرت بعدها نشان داد هر مدل از هندسه نااقلیدسی در فضای اقلیدسی چنین است. با کمک شبه مدل دو مدل دیگر توسط پوانکاره ساخته شد.

برنامه‌ی ارلانگن

کلاین نشان داد که هندسه‌های تصویری او همان خمینه‌های با انحنای ثابت ریمان است. البته کلاین اجازه می‌داد خمینه‌های مختلط نیز در نظر گرفته شوند. به علاوه او هندسه‌های تصویری خود رادر یک چارچوب کلی‌تر گروه‌های تبدیلات دید. او برای یک پارچه کردن تحولات هندسه در قرن ۱۹، به دنبال یک مفهوم همه‌گیر بود که سرانجام گروه تبدیلات را انتخاب کرد. هر فرمول، نقطه، زیر فضا یا موجود ریاضی دیگری که تحت عمل گروه تبدیلات ناوردا باشد، در این دیدگاه حائز اهمیت است. او برای $H \subseteq G$ تئوری G- ناورداها را با H- ناورداها ارتباط داد و سعی کرد با کمک این ایده‌ها هندسه را رده‌بندی کند. اولین قدم تعریف هم ارزی دو هندسه بود.

دیدگاه مجرد کلاین قدمی به سوی روش اصل موضوعه‌سازی هیلبرت و شاگردانش بود. در اویل قرن ۲۰بعد از تحقیقات ریچی و لویچیویتا رویه‌های ریمانی اهمیت پیدا کرد و بعد از ارائه نسبیت عام سعی شد برنامه کلاین به رویه‌های ریمانی و نیمه ریمانی توسعه پیدا کند. کارتان هم سر آخر نقش مهمی در کاربرد گروه‌ها در هندسه داشت که البته در چارچوب برنامه ار لانگن نمی‌گنجید. کلاین در ۱۸۷۳ این سؤال مهم را مطرح کرد که «آیا می‌توان هندسه تصویری را بدون فرض اصل توازی و بدون کمک فضای برداری ساخت؟» او با نشان دادن صفحه شهودی خود در صفحه تصویری و کامل‌سازی آن به روش شهودی این کار را ممکن ساخت. کلاین تأکید خاصی به شهود هندسی و نقش آن در پیشرفت هندسه داشت که آن را در بسیاری از تحقیقات خود ابراز کرد. این شهود بر خلق تصویرهای هندسی در ذهن بر اساس الگوی داده شده استوار است.

او به یک«شهود اصلاح شده»هم اعتقاد داشت که مثلاً در اثبات گزاره‌های هندسی اقلیدسی لازم است. این شهود دوم به کلی منطقی است و از تجزیه نتیجه نمی‌شود. از دید کلاین شهود اول یک مرز دقت دارد که وابسته به مرز احساس است که یک مفهوم روانشناسی است. با توجه به این دیدگاه‌ها کلاین پیشنهاد پاش برای اصل موضوعه‌سازی هندسه را رد کرد. او کار با اصول موضوعه را هندسه نمی‌دانست، چون از دیدگاه او اصول موضوعه شهود هندسی را درگیر نمی‌کرد.

کلاین در تئوری شهود هندسی خود نتیجه گرفت که، همه فضایی که می‌تواند مورد شهود قرار گیرد، محدود است و فضاهای هندسی نامتناهی، ایده‌آل‌سازی ادراکات دقیق شده‌ی موضوعی ما هستند. کلاین نتیجه می‌گیرد که ما نمی‌توانیم اطلاعات سرتاسری در مورد هندسه فضا داشته باشیم.

کلیفورد فضاهای واقعاً اقلیدسی غیر اقلیدسی ساخت و این منجر به مسئله رده‌بندی همه فضاهایی شد که موضعاً هندسه اقلیدسی، کروی یا هذلولی دارند. این منجر به تحقیقات بعدی کلاین و پوانکاره در باب گروه‌های کلاینی و سر انجام تبدیل به یکی از خط‌های اصلی تحقیقات در هندسه شد. اخیراً رده بندی خمینه‌های سه بعدی هذلولوی کامل شده است.

کلاین اعتقاد دارد «اقتصاد ذهن»آن چیزی است که باید تصمیم بگیرد کدام یک از این هندسه‌ها که موضعاً با تجربه هماهنگی دارند، باید به عنوان هندسه‌ی کل فضا انتخاب شود. کلاین تا۱۹۲۵ زنده ماند تا حاصل تحقیقات انشتین را در طول عمر خود مطالعه کند.

هلمهولتز و ریمان و مفهوم فضا

حال به مبانی هندسه می‌پردازیم. چرا که اطلاعات تخصصی از دیدگاه افلاطون فقط وقتی علم محسوب می‌شوند که با آگاهی از مبانی علم همراه شوند. اما از افلاطون تا کانت در مورد مبانی هندسه چندان آموخته نمی‌شود، چون همه آن‌ها اصول هندسه اقلیدسی را پذیرفته بودند. هگل در ۱۸۰۰ ادعا کرد که مبانی هندسه باید در فلسفه مورد بحث قرار گیرند و اقلیدس کار درستی کرده که برای اثبات اصل توازی تلاش نکرده، چون آن به چیستی مفهوم توازی مربوط می‌شود.

در ۱۸۵۱ Ueberweg سعی کرد هندسه اقلیدسی را بر حرکت صلب استوار کند و شاگردش Delboeuf آن را بر استقلال شکل از اندازه و بزرگی جسم بنا نمود. او اولین فیلسوفی است که نوشت: فرضیاتی که صحت ندارد لزوماً به تناقض منطقی منجر نمی‌شوند. در ۱۸۵۴ مقاله ریمان و سپس مقالات Helmholts فیزیکدان ظهور کردند که سر انجام منجر به «مبانی هندسه »هیلبرت شدند(۱۸۹۹) که بعد از «مبانی هندسه»سوفوس لی ۱۸۹۰ چاپ شد. لی به مسئله به عنوان یک مسئله‌ی مجرد ریاضی فکر کرد و این مقدمات روش اصل موضوعه‌ای هیلبرت را فراهم کرد. ایده‌های هلمهولتز، لی و هیلبرت را به ترتیب بررسی خواهیم کرد.

سوال اصلی هلمهولتز، این بود که «کدام گزاره‌های هندسه حقایق با ارزش علمی محسوب می‌شوند و کدام‌ها کم و بیش تعاریف یا نتایج تعاریفند؟» در دیدگاه ریمان به جز بعد، سایر محصولات تجربه نادقیق هستند. اصول موضوعه ریمان برای فضا بدین قرارند: (R_1)فضای فیزیکی یک خمینه دیفرانسیل پذیر است. (R_2)سه بعدی است (R_3) طول بینهایت کوچک به شکل جذر یک فرم درجه ۲ است. (R_4)خمیدگی فضا ثابت است. (R_5)فضا تخت است. هلمهولتز دیدگاه ریمان را پذیرفت اما می‌خواست آن را بر مبانی فلسفی تری استوار کند تا تجربی.

ریمان توجه کرد که (R_4)نتیجه حرکت صلب است و درجات آزادی آنرا در نظر گرفته و نشان داد (R_3)هم نتیجه همین فرضیات فیزیکی است. از دیدگاه هلمهولتزیک تئوری ریاضی فضا که اجازه‌ی اندازه‌گیری ندهد، نباید هندسه خوانده شود. لذا طول خطوط باید مستقل از نشاندن آن‌ها در فضا باشد. اصول موضوعه‌ی هلمهولتز برای فضا بدین قرارند: (H_1)فضای یک خمینه n-بعدی است. (H_2)حرکت صلب در فضا معنی دارد. (H_3)اجسام صلب آزادانه می‌توانند حرکت و دوران کنند. (H_4)با ثابت گرفتن هر۱-n نقطه یک دوران یک پارامتری ممکن است. (H_5)فضا سه بعدی است. لی نشان داد $R_5, R_4 \Leftarrow H_1 - H_3$

در اصول هلمهولتز از فضا نکاتی هست که باید در بی‌نهایت کوچک چک شود. لذا اصول هلمهولتز نیز مانند ریمان مجردند. هلمهولتزبه اشتباه نتیجه گرفت که هر فضا، کروی یا اقلیدسی است و نامتناهی بودن فضا نتیجه می‌دهد اقلیدسی است. به نظر می‌رسد هلمهولتز امکان انحنای منفی را در نظر نگرفت و بعدها خود به این اشتباه اعتراف کرد. هلمهولتز به این سؤال که آیا می‌توان «شهود هذلولوی» را در ذهن تصویرسازی کرد، می‌پردازد و اعتقاد دارد این کار شدنی است و چیزی مشابه دیدن با عینک‌های مقعر می‌تواند تجربه‌ی مشابهی تولید کند.

این نظریات هلمهولتزدر باره شهود هندسی، مقدمات نظریات کلاین و شکل‌گیری ایده‌ی همه جا گسترده‌ی شهود هندسی او را فراهم می‌آورند. همین طور، با اظهار اینکه اصل پنجم برای ارضای راحتی تفکر است، نظرات پوانکاره و تئوری Conventionalism او را مقدمه چینی کرد. بنابر فلسفه هلمهولتز، درک هندسی ما از فضا، باید همزمان با درک مکانیکی ما از آن ساخته شود. همان کاری که انشتین کرد.

گروه‌های لی و تأثیر آن بر مبانی هندسه

لی دوست کلاین بود و از نروژ به آلمان سفر کرد تا در کنار او به تحقیق بپردازد. دوستی این دو، در پاریس در زمان دانشجویی شروع شد. گویی آن‌ها قلمرو گروه‌ها در هندسه را بین خود تقسیم کردند، تا کلاین به مطالعه گروه‌های گسسته تبدیلات ولی به مطالعه گروه‌های پیوسته بپردازد. کلاین مسئله فلسفه‌ی فضای هلمهولتزرا به لی معرفی کرد تا با کمک مبانی تئوری خود آنرا دوباره صورت بندی کند. لی فرض کرد که حرکت صلب هلمهولتز در چارچوب گروه‌های تبدیلاتی صورت می‌گیرد و سپس آن را با کمک تئوری خود مطالعه کرد.

تئوری لی بر مبنای عمل یک گروه لی بر یک خمینه n- بعدی استوار است. البته او بر هندسه موضعی تأکید دارد. او به حرکت‌های بی‌نهایت کوچک توجه کرد و اینکه برقراری اصول موضوعه‌ی هلمهولتز برای حرکت‌های بینهایت کوچک را نتیجه نمی‌دهد و هم از آن نتیجه نمی‌شود.

تئوری لی از فضا تحت تأثیر تئوری کلاین از مدل‌های تصویری هندسه‌های اقلیدسی، کروی و هذلولوی بود. صورت جدید سؤال هلمهولتزاین که «چه خصوصیاتی شرط لازم و کافی برای این که گروه حرکت‌های صلب

اقلیدسی، کروی یا هذلولی باشد به دست می‌دهند؟» این به صورت بندی H_3, H_2 در زبان نظریه‌ی گروه‌ها مربوط می‌شود.

حرکت آزاد جسم صلب نتیجه می‌دهد عمل گروه باید جابه جاگر transitive باشد. اگر تعریف n- نقطه‌ی ناوردا را تابعی $f : m^n \to IR$ بگیریم که تحت عمل g ناوردا باشد، $H_۲$ یعنی ۲- نقطه ناوردا وجود دارد و برای n=۲ یگانه است سپس لی چنین عمل‌هایی را رده‌بندی می‌کند و نشان می‌دهد چنین گروه‌هایی ۶ بعدی هستند. توجه کنید که لی گروه‌های حقیقی و مختلطی را در نظر گرفت که بر $p^3(c)$ عمل می‌کنند و هر سه گروه تبدیلات کلاین را به دست آورد. لی نشان داد که (R_3) از حرکت آزاد بی‌نهایت کوچک نتیجه گرفته می‌شود. تحت تأثیر لی ریاضی‌دانان سعی کردند جامه‌ای به زبان گروه‌ها به هندسه اقلیدسی بپوشانند.

پوانکاره که در ۱۹۱۲ در گذشت و نسبیت عام انشتین را ندید در ۱۸۸۷ اصول زیر را ارائه کرد: (p_1) صفحه دو بعدی است. (p_2)محل یک شکل توسط سه نقطه آن مشخص می‌شود. به زبان لی (p_1')صفحه خمینه‌ای دو بعدی و مشتق پذیر است. (p_2')حرکت صلب با یک گروه لی سه بعدی مشخص می‌شود.

(p_3)اگر دو نقطه از شکل حفظ شوند و شکل صفحه را ترک نکند، محل جسم کاملاً مشخص می‌شود.

(p_4)فاصله = 0 $\Leftrightarrow$ نقاط منطبق باشند که معادل است با (p_4')دو خط متقاطع با دوران قابل انطباقند. (p_5) دو خط حداکثر در یک نقطه متقاطعند. (p_6)مجموع زوایای مثلث ثابت است.

Killing این مسئله را در بعد دل‌خواه n در نظر گرفت که با ۸ اصل موضوع و مفاهیم اولیه جسم صلب، جزئی از یک جسم، فضا، جزئی از فضا، اشغال کردن فضا، زمان، سکون و حرکت بنا شده بود و ادعا کرد که یک تئوری معادل با گروه‌های تبدیل ساخته است. به علاوه Killing سعی کرد مفهومی توپولوژیک از بعد ارائه دهد. ایده‌ی اصلی Killingمیدان برداری Killing است که حرکت ۱- پارامتری حافظ تساوی را معنی دار می‌کند و ما را از تفکر هلمهولتز که حرکت آزاد را لازم می‌داند، خلاص می‌کند. هیلبرت هم مسئله پوانکاره را در نظر گرفت و از ایده‌ی خم ژردن برای مشخص کردن هندسه صفحه استفاده کرد.

تفکر اصل موضوعه‌سازی مدرن

تفکر اصل موضوعه‌ای کتاب اقلیدس، هم کتاب« Discorsi» و هم کتاب «principia» نیوتن را تحت تأثیر قرار داد. «اخلاق» اسپینوزا هم استثناء نبود. استاندارد استدلال این کتاب منجر شد که لباچفسکی و بولیایی فقط با استدلال محض هندسه جدیدی را بنا کنند. اصل موضوعه‌سازی هندسه تصویری توسط پاش نیز بر ظهور تفکر جدید بی‌تأثیر نبود. چرا که کشف دو گانی هندسه تصویری در پرتو اصول موضوعه ممکن شده بود.

تفکر اصل موضوعه‌ای به طور طبیعی مجرد است. چرا که تنها نقش تفکر اصل موضوعه‌ای ارائه یک فرمالیسم است. اصول موضوعه چنان هستند که تمام تلاش‌هایی که برای خلق یک تئوری به انجام رسیده‌اند را تبدیل به یک سری قضایای وجودی می‌کند. چنان که کاربرد تئوری بدون آن قضایای وجودی و کمک آن‌ها هم امکان پذیر است.

پئانو در ۱۸۸۹ و دهه آخر قرن ۱۹ اصول موضوعه معروف خود برای حساب را ارائه داد که تحت تأثیر اصول موضوعه پاش قرار داشت. از دیدگاه پئانو، معنای تعاریف هندسی که رد اصول موضوعه‌ی هندسی به کار می‌رود، ربطی به ساختار اصول موضوعه ندارد و این آغاز تفکر مجرد در مورد اصول موضوعه بود. مدرسه ایتالیایی تحت تأثیر پئانو، به خصوص توسط پیری ۱۸۹۷ یک دستگاه اصل موضوعه‌ای برای هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی ارائه کرد که هندسه را فقط به عنوان یک دستگاه منطقی تلقی می‌کرد. این ایده‌ها منجر به هندسه‌های متناهی شد.

کتاب «مبانی هندسه »هیلبرت با این جمله کانت آغاز می‌شود: «دانش بشری با شهود آغاز می‌شود، به سمت مفاهیم می‌رود و به ایده‌ها ختم می‌شود.» اما هیلبرت در کتاب خود به بررسی ساختار مفهومی هندسه و اصول موضوعه‌ی آن مستقل از شهود هندسی پرداخت و این غیر کانتی‌ترین کارممکن بود. به خاطر این کار که کاملاً آرزوهای پیری را به تحقق رساند هیلبرت را و اضع مکتب اصل موضوعه‌سازی مدرن می‌دانند.

جالب اینجاست که فرگه درست در مقابل هیلبرت قرار می‌گیرد. اصول موضوعه برای فرگه قضایای درستی هستند که هنوز قابل اثبات نیستند، چون هنوز ما به پشت‌صحنه دست پیدا نکرده ایم. در صورتی که برای هیلبرت، حقیقت وجود، همان عدم تناقض اصول موضوعه است، نه چیزی پشت آن‌ها.

هیلبرت عدم تناقض اصول موضوعه خود را با ارائه یک مدل به اثبات می‌رساند که بر عدم تناقض‌های دیگری استوار است. این تلاش‌های هیلبرت منجر به تحقیقات او در منطق می‌شود که سر انجام مقدمات کارهای گودل را فراهم می‌کند. پس از هیلبرت، بسیاری با ارائه‌ی مدل‌ها سعی می‌کنند استقلال بعضی از اصول موضوعه را ثابت کنند.

به خاطر اختلاف‌های فرگه و هیلبرت، اختلافاتی برسر اینکه اصلاً تعریف چیست پیش آمد. بعضی می‌گفتند اصول موضوعه تعریف هستند و بعضی دیگر مخالف بودند. بحث راجع به این اختلافات در قلمرو منطق قرار می‌گیرد تا در قلمرو هندسه. امروز بسیاری از فیزیکدانان اعتقاد دارندکه تئوری‌های واقعی را آنان ارائه می‌دهند و نقش ریاضی‌دانان فقط اصل موضوعه‌ای کردن تئوری‌های فیزیکدانان است. این نشان می‌دهد که در پیروی مکتب هیلبرت زیاده روی شده است.

گرایشات به فلسفه تجربه‌گرا در هندسه

حال سعی می‌کنیم هندسه‌ی قرن ۱۹را در چند گرایش فلسفی خلاصه کنیم. هندسه در قرن ۱۹ علم شناخت فضا بود. حتی تا زمان کانت هندسه را علم غیر تجربی می‌دانستند و بسیاری از پیشینی گراها حتی بعد از کشف هندسه‌های نااقلیدسی دلیلی برای تجربه‌گرایی بود.

جان استوارت میل در ۱۸۴۳ ادعا کرد که تمام علوم استنتاجی بر مبانی استقرایی بنا شده‌اند و این نه تنها در مورد هندسه بلکه در مورد حساب صحیح است. تعاریف در قلب خود فرضیاتی وجودی را در بر دارند، اما دقیقاً با واقعیت تطابق ندارند. با این وصف، هندسه باید جزئی از علوم فیزیکی تصور شود. همین دیدگاه توسط Ueberweg در ۱۸۵۱ ارائه شد که بر روش هلمهولتز و واقعیت فیزیکی استوار بود و باید توسط تجربه تأیید می‌شد. او به کانت حمله کرد که چرا ادعای پیشینی بودن هندسه و اصول هندسه را ثابت نمی‌کند؟ چرا کانت این اصول را از طبیعت ذهن نتیجه نمی‌گیرد؟

نظرات فلسفی ریمان و هلمهولتزهم قدمی در جهت ارائه هندسه‌ای بود که در آن اندازه‌گیری فیزیکی و حرکات صلب فیزیکی ممکن باشند. ریمان و هلمهولتز راه Ueberwegرا ادامه دادند. نظرات ماخ در ۱۹۰۵ ماحصل کار فلاسفه تجربی است که بر آراء انشتین هم بسیار تأثیرگذار بوده است. او در مورد روانشناسی تشکیل ایده‌ها در اثر تجربه بحث می‌کند. این دیدگاه روانشناسانه مورد توجه پوانکاره هم بوده است و در نظریه‌ی قرار دادگرایی او تأثیر گذاشته است. اواخر قرن۱۹ معرکه آراء فیلسوفان در مورد فلسفه‌ی فضا بود و سرانجام هم به انقلاب‌هایی منجر شد.

سردرگمی فلسفی در مبانی هندسه

دلیل اینکه گاوس اکتشاف هندسه نااقلیدسی را منتشرنکرد، ترس از سردرگمی فلسفی بود. پارادایم شکل گرفته از دانش هندسه، بادیدگاه نوین هندسه نااقلیدسی هماهنگی نداشت و آنچه گاوس از آن می‌ترسید، پس از مرگ او اتفاق افتاد. اعتراض‌های فلسفی بسیاری بر انگیخته شد که بسیاری از آنان به درک صحیحی از ریاضیات مربوط دست نیافته بودند. در این میان نظرات بعضی فیلسوفان شایان توجه است.

لوتز به دوگانی ذهن و اشیا اعتقاد داشت و در نظر او فضا فقط به شکل شهود ذهنی می‌توانست وجود داشته باشد. از دید او، فضا یک سیستم مرتب از جای خالی است و درک ما از مفهوم فضا فاعلیت‌گرا است. لوتز کارهای گاوس و ریمان را نخوانده بود و از یک سری جملات توصیفی در مورد محتوای آن‌ها قضاوت می‌کرد. او اعتقاد داشت صحبت کردن از هندسه ذاتی، بعد چهارم، خمیدگی فضا بی‌پایه است. محاسبه طول خم بدون نیاز به خط مستقیم غیر ممکن است و مانند آن.

بسیاری از نظریات فلسفی این فیلسوفان از لحاظ معرفت شناسانه جالب هستند، رنوویه فیلسوف دیگر چنین نوشته: «هدف خالقان هندسه نااقلیدسی، اگر تمرین در تحلیل فرضیات گوناگون باشد، بدون این که نگاهی به

حقیقت داشته باشند نمی‌توان به آنان اعتراض کرد.» اشتباه رنوویه از اینجاست که خواستگاه از پیش تعیین شده‌ای برای حقیقت در نظر دارد.

پیشینی‌گرایی راسل

راسل کتابی در ۲۴ سالگی نوشت که به این سؤال می‌پرداخت که «چه قسمتی از هندسه علمی پیشینی است؟» ایده‌های این کتاب جالب به نظر می‌رسیدند، ولی در جزئیات توانائی برآورده کردن ادعاهای نویسنده را نداشتند. راسل اعتقاد داشت، هندسه تصویری یا هندسه فضاهای متقارن n- بعدی، همه پیشینی هستند، اما سه بعدی بودن فضا و اینکه خمیدگی صفر است، حقایقی تجربی هستند. راسل سعی می‌کرد این هندسه‌ها را اصل موضوعی کند و سپس اصول موضوعه را از ساختار ذهن استخراج کند. او در این کار موفق نشد، اما تنها کسی است که سعی کرد اثبات کند ریاضیات پیشینی است.

اصل موضوعه‌های راسل برای هندسه‌های تصویری چنین هستند: ۱-ما محل‌های مختلف در فضا را متمایز می‌دانیم، اما از لحاظ کیفی این محل‌ها مثل هم هستند. ۲- فضا پیوسته و بی نهایت بار قابل قسمت است و حاصل چنین تقسیمی نقطه نام دارد ۳- هردو نقطه یک شکل یگانه را مشخص می‌کنند که خط نام دارد. هر سه نقطه صفحه و هر چهار نقطه فضا و این می‌تواند ادامه پیداکند، اما جایی خاتمه می‌یابد، در حالی که کل فضای تصویری را به دست می‌دهد. سپس، راسل سعی می‌کند نشان دهد، این اصول موضوعه در هر ادراک هندسی حضور دارند. هندسه متریک در تعریف راسل علم مقایسه و ارتباط بین کمیت‌های فضایی است. اصول موضوعه هندسه متریک چنین اند: ۱- اصل حرکت آزاد ۲- اصل ابعاد ۳- اصل فواصل. راسل در اثبات پیشینی بودن این اصول بسیاری از اشتباهات ریاضی را متحمل می‌شود.

فلسفه پوانکاره Conventionalism قرار دادگرایی

شناخت شناسی پوانکاره چنین بود: علم تشکیل شده از حقایق محکمی که ما از طریق حواسمان به دست می‌آوریم، ولی کاملاً مستقل از اراده‌ی دانشمند هستند. برای گزارش این حقایق، استدلال در مورد آن‌ها و بیان ارتباط بین آن‌ها و شباهت‌های آن‌ها، دانشمندان نیاز مند قراردادهای خاصی هستند که برای تصریح روش توضیح دادن لازم است. بعضی از این قرار دادها از عالِم قدیمی ترند، مانند قوائد گرامری زبان. بعضی دیگر کاملاً در دست دانشمند هستند.

ایده‌های اولیه قرار دادگرایی توسط هابز در قرن ۱۷ مطرح شده بود اما کسی به آن توجه نکرد و در دهه‌های آخر قرن ۱۹، به خاطر مسئله «تعریف چیست» و مسئله «دستگاه‌های لخت» مورد توجه قرار گرفت. البته

دیدگاه‌های مختلفی در مورد فلسفه پوانکاره وجود داشت. مثلاً ماکس بلک دو وجه محض و کاربردی برای این فلسفه قائل بودند و اینکه قرار دادی بودن هندسه کاربردی، از قرار دادی بودن هندسه محض، از اصل موضوعه‌ای بودن آن آشکار است.

پوانکاره با دیدگاه‌های پیشینی‌گرا و تجربه‌گرا مخالف بود. در برابر پیشینی‌گرایان استدلال ساده‌ای داشت، که اگر هندسه پیشینی است، پس چرا هندسه‌های دیگر ظهور کردند. در برابر تجربه‌گرایان می‌گفت، چرا زیاد شدن تجربه موجب بازنگری در هندسه نمی‌شود؟ به علاوه هندسه علمی دقیق است، اما علوم تجربی نادقیق هستند. پوانکاره نه‌تنها هندسه‌ها، بلکه حتی متریک را قرار دادی می‌دانست. انتخاب بین هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی در واقع انتخاب بین دو متریک بود.

انقلاب انشتین در مفهوم فضا

نسبیت خاص مستقلاً توسط خود پوانکاره کشف شده بود، اما او اهمیت فیزیکی آنرا درک نکرده بود و نسبیت عام تنها پس از مرگ پوانکاره مطرح شد و پوانکاره عصر هندسه جدید را درک نکرد. در مفهوم فضا–زمان نسبیت عام، نه‌تنها مفاهیم فضا و زمان عجین شده‌اند، بلکه متریک فضا–زمان تحت هدایت معادلات دیفرانسیل خاصی در حال تغییر است.

از طرفی این قراردادگرایی متریک را که توسط پوانکاره پیشنهاد شده بود ثابت می‌کند. اما از طرف دیگر، مفهوم فضای با متریک در حال تغییر را پیش می‌آورد که دگردیسی فضا و تغییر پیوسته آن را پیش می‌کشد. تقریباً ۱۰۰ سال طول کشید که ریاضی‌دانان ایده‌های هندسی پوانکاره، کلاین و لی را هضم کنند تا نوبت به هندسه‌ی با متریک متغیر برسد.

بر خلاف پوانکاره، هیلبرت که تا ۱۹۴۳ زنده ماند، حتماً با این سؤال مواجه شده که چنین هندسه‌ای را اصل موضوعه‌ای کند، اما این کار چنان مشکل است که هیلبرت ناگهان علایق مبانی هندسه خود را رها کرده و به مسائل منطقی پرداخت.

مفهوم فضای با متریک متغیر اخیراً توسط perleman در اثبات حدس پوانکاره که یکی از قدیمی‌ترین مسائل حل نشده‌ی هندسه بود، به کار رفت و اهمیت ایده انشتین را به اثبات رساند.

با این حال، هنوز هم این ایده در چارچوب فلسفی ریمان می‌گنجد. تلاش‌های ریاضی‌دانان و فیزیکدانان برای فضا– زمان تاکنون موفقیت آمیز نبوده است.

فصل ۹

شکل‌گیری مبانی جبر و نظریه‌ی اعداد در ریاضیات قرن نوزدهم

قرن نوزدهم، شکل‌گیری جبر مدرن و مفهوم ساختار جبری است. جریان‌های مفهومی و مهارتی، چارچوب مناسبی برای بررسی تحولاتی که منجر به تولد جبر مدرن شدند می‌باشد. جریان‌های مفهومی گروه، میدان، حلقه و جبر و جریان‌های مهارتی تشکیل معادله، ساختارشناسی جبری، برقراری ارتباط بین شاخه‌های مختلف ریاضیات، حل مسئله، تئوری‌سازی و نظریه پردازی، بر شکل‌گیری مبانی جبر در قرن ۱۹ حکومت دارند.

تئوری جریان‌های مفهومی و مهارتی یک تئوری زاییده شده از آموزش ریاضی است. توجه داشته باشید که آموزش ریاضی شاخه‌ای از ریاضیات نیست. آموزش ریاضی شاخه‌ای از علوم انسانی است که در همسایگی فلسفه، ریاضیات، جامعه شناسی و روان شناسی قرار گرفته است. در روش آموزش مهارت محور که در مقابل روش مفهوم محور قرار دارد، جریان‌های مفهومی و مهارتی، مسئول حفظ انسجام محتوای درسی هستند.

جریان مفهومی گروه ریشه در مفهوم تقارن، جریان مفهومی میدان ریشه در مفهوم چند جمله‌ای، جریان مفهومی حلقه ریشه در مفهوم عدد و جریان مفهومی قدیمی‌تر زاده می‌شوند، جریان‌های مهارتی در سراسر تاریخ ریاضیات گسترده شده‌اند. جریان‌های مهارتی، برخی توانایی‌های حرفه‌ای یک ریاضی‌دان محسوب می‌شوند و برخی مانند مهارت تشکیل معادله، از طبیعت مسائلی که د رمورد توجه بشر بوده‌اند بر خاسته‌اند.

تولد جبر مدرن همگام با ظهور نظریه گالوا رقم خورد. پیش از آن تلاش‌های جبردانان همه در حل معادلات خلاصه می‌شد. از زمان ویت دانسته شده بود که ضرائب چند جمله‌ای توابع متقارنی از ریشه‌ها هستند. وارینگ در۱۷۶۲ ثابت کرد، تمام توابع متقارن برحسب ریشه‌ها را می‌توان به شکل تابعی از ضرائب چند جمله‌ای نوشت.

واندر موند در ۱۷۷۰ روش‌های به دست آمده برای حل معادلات درجه ۳و۴ را باز نویسی کرد و حدس زد که معادله درجه n ریشه‌هایی به شکل:

$$\frac{1}{n}\left[x_1+\ldots+x_n)+\sqrt[n]{(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^n}+\ldots+\sqrt[n]{(p_1^{n-1}x_1+\ldots+p_n^{n-1}x_n)^n}\right]$$

دارد که در آن p_i ریشه‌های n- ام واحد هستند. این ایده‌ها توسط لاگرانژ هم در مقاله‌ای به تاریخ ۱۷۷۱ ظاهر می‌شوند. در همان سال Malfatti مقاله‌ای نوشت که در آن سعی کرد این ایده‌ها را برای حل معادلات درجه ۵ دقیق‌تر نماید. در هر دوی مقالات لاگرانژ و Malfattiجایگشت‌های ریشه‌ها که در اثبات آبل و گالوا ظاهر می‌شوند، مورد توجه قرار گرفته بودند. Ruffini شاگرد لاگرانژ چندین مقاله مبتنی بر این که معادلات در جه ۵ بارادیکال‌ها حل‌پذیر نیستند، نوشت. البته او فرض کرده بود که رادیکال‌های لازم برای حل معادله همیشه به شکل توابعی گویا از ریشه‌های معادله و ریشه‌های واحد هستند. آبل با اثبات این فرض، اثبات Ruffiniرا کامل نمود. آبل در ۲۲ سالگی اثبات خود را منتشر کرد(۱۸۲۴) و تا مرگ زود هنگامش در ۱۸۲۹ چندین دسته از معادلات از درجه دل‌خواه را

ارائه کرد که توسط رادیکال‌ها حل‌پذیر هستند. در همین سال گالوا مقاله خود را به آکادمی علوم پاریس ارائه کرد. گروه‌های جایگشتی که در حال معادلات درجه پنجم ظاهر می‌شدند، منجر شد کوشی یک‌سری مقاله را در ۱۸۴۴ به منظور مطالعه‌ی گروه‌های جایگشتی به تصنیف در آورد.

حل معادلات چند جمله‌ای توسط آبل و گالوا

روشی که آبل برای امکان ناپذیری حل معادلات درجه ۵ توسط رادیکال‌ها ارائه داد چنین است: معادله زیر را در نظر بگیرید که در آن ضرائب متغیرند $y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$. آبل نتیجه می‌گیرد با فرض خلف داریم $y = p_0 + p_1R^{1/m} + p_2R^{2/m} + ... + p_{m-1}R^{(m-1)/m}$

که در آن p_i و R جملاتی به شکل y هستند و m عددی اول است. بدون کم شدن از علیت می‌توان فرض کرد p_1 ناصفر است و جایگزینی R با $\frac{R}{p_1 m}$ می دهد $y = p_0 + z + p_2z^2 + ... + p_{m-1}z^{m-1}$ که در آن $R^{1/m} = z$. با جایگزینی در معادله چند جمله‌ای داریم $q_0 + q_1z + q_2z^2 + ... + q_{m-1}z^{m-1}$ و $z^m = R$ نتیجه میدهد که $q_i = 0$ اگر $y_i = p + a^iz + p_2a^{2i}z^2 + ... + p_{m-1}a^{mi-i}z^{m-1}$ برای $i = 0,...,m$ ریشه‌های معادله باشند، پس $m \le 5$. با حل این معادلات p_iz^i رامحاسبه می‌کنیم. پس p_i و $z = R^{1/m}$ توابع گویایی از ریشه‌ها هستند.

مجدداً $R = s + v^{1/n} + s_2v^{2/n} + ... + s_{n-1}v^{(n-1)/n}$ و با همین روش ادامه می‌دهیم تا نشان دهیم، همه‌ی توابع غیر گویا که در ریشه ظاهر می‌شوند، توابع گویایی از ریشه هستند. از این جا به بعد همان روش‌های لاگرانژ، روفینی و کوشی اثبات را تمام می‌کنند. در واقع، آبل پایان بخش تلاش‌هایی بود که از زمان لاگرانژ شروع شده بود.

آبل این اثبات را جزئی از نظریه توابع می‌دید. همچنین علاقه کوشی به این مسئله، به دلیل توابع متقارن بود، نه این که به عنوان جبردان به مسئله علاقه‌مند باشد. آبل نیز خود را دنباله‌روی کوشی و یک آنالیزدان می‌دانست. همین آنالیز بود که سر آخر مهم‌ترین و قدیمی‌ترین مسئله نظریه معادلات را حل کرد و شکل‌گیری این شاخه مدیون حسابان است.

بر خلاف آبل که به نظریه‌ی توابع و معادلات تابعی و مانند آن‌ها علاقه داشت، گالوا یک نظریه اعداد دان بود. در مورد حل معادلات با کسرهای مسلسل مقاله‌ای در ۱۷ سالگی نوشت که ادامه کارهای لاگرانژ و اویلر بود. در ۱۸ سالگی، دو مقاله در مورد نظریه‌ی معادلات به آکادمی پاریس داد که هر دو را کوشی گم کرد. در ۱۹ سالگی، مقاله‌ای دیگر به آکادمی ارائه کرد که این بار منشی دقیق آکادمی فوریه مسئول رسیدگی به آن شد، اما اونیز قبل از مطالعه مقاله فوت کرد. در همان سال ۱۸۳۰ مقاله‌ای در یک مجله چاپ شد که در آن نتایجی بدون اثبات آمده بود: شرط لازم و کافی برای این که یک معادله‌ی درجه اول با رادیکال‌ها حل شود این است که اگر دو ریشه دانسته شده باشند بقیه‌ی ریشه‌ها توابع گویایی بر حسب آن دو ریشه باشند. این قضیه حل ناپذیری معادله درجه ۵ توسط

رادیکال‌ها را ثابت می‌کند. در همان سال، گالوا در مقاله نظریه اعدادی دیگری میدان‌های متناهی را معرفی می‌کند. در ۲۰سالگی مجدداً صورت کامل تری از نظریه خود را برای آکادمی می‌فرستد اما پواسون در گزارش خود می‌نویسد که استدلال‌های گالوا را نفهمیده است. سر انجام گالوا در نامه‌ای که شب قبل از مرگ خود می‌نویسد، تئوری خود را به طور خلاصه شرح می‌دهد. روش گالوا در حل مسئله حل ناپذیری معادله‌ی درجه ۵ بسیار شبیه آبل است، جز این که گالوا به دقت ساختارهای ریاضی میدان و گروه را که در اثبات ظاهر می‌شوند، بیرون می‌کشد. در آخرین مقاله‌ای که گالوا به آکادمی ارائه کرده است، نام آبل برده شده است. اما در مقاله‌های قبلی فقط به کارهای لاگرانژ، گاوس و کوشی اشاره شده است. گالوا تنها ریاضی‌دانی است که در سنین زیر ۲۰سال به تئوری پردازی علاقه‌مند بوده است.

از حل معادلات تا گروه و میدان

درخشان‌ترین نتیجه‌ای که نظریه حل معادلات قبل از نظریه گالوا به دست آورد، قضیه اساسی حساب بود که توسط گاوس ثابت شد. به علاوه، گاوس مسئله‌ی حل معادله‌ی دایره بری را توسط رادیکال‌ها تمام کرد.

قضیه اساسی حساب قبلاً توسط Alembert، اویلر، Fontenel و لاگرانژ مطرح شده بود اما اثبات‌های همه‌ی آن‌ها ناکامل بود. اثبات اول گاوس با کمک هندسه تحلیلی دکارت در تز دکترای او و اثبات دوم او کاملاً جبری و اثبات سوم او تحلیلی بود. اینکه چه ایده‌هایی در هر یک از سه اثبات وارد می‌شوند، از لحاظ فلسفی بسیار اهمیت دارند چون هم به ما می‌گوید که چه ایده‌هایی برای درک ریاضیات چند جمله ای‌ها کلیدی هستند و هم این که چه ایده‌هایی در یک اثبات، می‌توانند جایگزین چه ایده‌های دیگری گردند تا اثبات دیگری را شکل دهند.

اولین ظهور مفهوم گروه به شکل گروه‌های جایگشتی بود، که همان تقارن‌های ریشه‌های معادله است. اما به سرعت تقارن‌های هندسی نیز به عنوان گروه مطرح شدند. مفاهیم گروه و عمل گروه هم‌زمان متولد شدند. مفهوم میدان هم‌زمان در مشخصه صفر و p ظاهر شدند. میدان‌های متناهی هم در کارهای گاوس، به عنوان همنهشتی‌های دوگانه و هم در کارهای گالوا به طور رسمی مطرح شد. میدان‌های مشخصه صفر به علت تنوع ساختارهای عددی که برای حل معادلات توسط رادیکال‌ها لازم بود به کار آمدند. جالب توجه است که میدان‌های توابع و میدان‌های اعداد هردو در حل این مسئله ظاهر می‌شوند.

هرمیت که شاگرد Louis Richard معلم گالوا بود. در ۲۰سالگی مقاله‌ای چاپ کرد که در آن ایده‌های لاگرانژ را به روشنی بیان کرده بود. در ۲۵ سالگی ۱۸۴۷ نامه‌ای به ژاکوبی در مورد توابع بیضوی نوشت که نشان می‌دهد با کارهای گالوا آشنا بوده است. در ۱۸۵۰ پیزو Puiseux بسط معروف خود را داد که در آن ریشه‌های $f(z,w) = 0$ به عنوان یک چند جمله‌ای بر حسب w بسط سری توانی بر حسب z پیدا می‌کنند. او نشان داد که اگر z روی یک مسیر بسته حرکت کند و به جای اول باز گردد، جای ریشه‌ها عوض می‌شوند. هرمیت ثابت کرد این گروه همان گروه گالواست اگر $C(z)$ را میدان ضرائب بگیریم.

گروهی که Puiseux معرفی کرد، بعدها توسط Jordan گروه گردشگری Monodromy نامیده شد. در ۱۸۷۱ بتی در مقاله‌ای در مورد نظریه گالوا به گروه خارج قسمت نزدیک شد که آغاز ظهور مفهوم مجرد گروه است. بتی اولین مقاله‌ای که در آن تمام قضایای نظریه گالوا به طور کامل اثبات شده بودند را نوشت.

ایده‌های نظریه گالوا در نظریه توابع توسط آبل، هرمیت، کرونکر و دیگران به کار رفتند. همچنین، هندسه‌دانانی چون هسه، کیلی، کلبش، کومر، سالمون، استاینر باکمک نظریه گالوا به مسائل هندسی حمله کردند. جردن کسی بود که گروه‌های حرکت در هندسه را مطرح کرد و کلاین و لی جوان را به این مسئله علاقه‌مند نمود. قبل از جردن کسی که به این ایده‌ها نزدیک شده بود اویلر بود، که قضیه اویلر در مورد دوران‌ها در فضای سه بعدی را ثابت کرد. جردن از ایده‌های اویلر در مقاله خود استفاده کرد. گروه‌های خطی، نه به عنوان توابع خطی بلکه به عنوان جایگذاری و تغییر متغیر خطی در همین مقاله معرفی شدند. جردن قضیه فرم جردن را که قبلاً توسط وایراشتراس به دست آمده بود، ثابت کرد و مطالعه گروه‌های کلاسیک را آغاز کرد(۱۸۷۰) $O_{p,q}, O_n, Sp_n, SL_n, GL_n$.

پدران و فرزندان نظریه‌ی گروها و میدان‌ها

تولد نظریه گروه‌ها و میدان‌ها که هم‌زمان هستند، در واقع تولد ساختارشناسی جبری است. سؤال اینکه، مفهوم ساختار جبری چرا در ریاضیات قرن ۱۹ پیدا شد؟ گرایش به اصل موضوعه‌سازی هندسه توسط پاش دیرتر از انقلاب گالوا در علم جبر به و قوع پیوست. به علاوه تفکر اصل موضوعه‌ای از زمان اقلیدس سابقه داشته است. آنچه تفکر اصل موضوعه‌ای را به ساختار مجرد نزدیک می‌کند امکان تنوع اصول موضوعه‌ی اولیه‌ی هندسه است، که پس از اعلام رسمی کشف هندسه‌های نااقلیدسی مورد توجه قرار گرفت. گاوس، لباچفسکی و بولیایی اولین کسانی بودند که در یافتند هندسه‌های اقلیدسی، کروی و هذلولی هر یک ساختار ریاضی هستند.

حتی پیش از آن که معلوم شود این ساختارها ممکن است در جای‌جای ریاضیات ظاهر شوند، تنوع ساختارهای اصل موضوعه‌ای که همه بدون تناقض هستند، ریاضی‌دانان را از مفهوم صحت یک مدل ریاضی رها کرد و مفهوم مدرن ساختار ریاضی را به وجود آورد. این که هندسه جدید با استدلال محض و بدون مدل کشف شد دقیقاً با معنای منطقی و عقلانی ساختار ریاضی تطابق دارد. دیگر، ریاضی‌دانان برای خلق ریاضیات به طبیعت و مسائل روزمره نیازی نداشتند و می‌توانستند در عالم عقل به ساختارشناسی بپردازند. با وجود این انقلاب فکر، هنوز سال‌ها طول می‌کشد تا ساختارهای گروه و میدان را به طور اصل موضوعه‌ای تعریف کنند. در این نکته تاریخی هم رمزی نهفته است. بین تشخیص یک ساختار، فاصله زیادی هست. به علاوه این دو، مهارت‌های متمایزی هستند.

پس از آن که ساختارشناسی در ریاضیات باب شد، نطفه ظهور ساختارهای جبری، هندسی و ترکیباتی بسته شد و ریاضی‌دانان خود بی‌مهابا به خلق ساختارها پرداختند و بسیاری از مشکلاتی که راه ریاضی‌دانان را سد نموده بود توسط ساختارهای جدید آسان شدند. تا پایان نیمه اول قرن بیستم، یک ساختار ریاضی، یک شیءریاضی بود، تا این

که نظریه رسته‌ها بنیان‌گذاری شد و ساختار دسته‌ای از اشیا با توجه به ریختارهای بین آن‌ها، ولی مستقل از تشخص اشیاء ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. در واقع ساختارشناسی گالوا، روان شناسی ساختارها و ساختارشناسی نظریه رسته‌ها، جامعه شناسی ساختارها ست.

به زودی به این نتیجه رسیدند که بین این دو علم یک دوگانی وجود دارد و مفاهیم روانشناسی ساختار را می‌توان به زبان جامعه شناسی ساختارها ترجمه و مطالعه نمود. البته در جهت عکس پیشرفت شایان توجهی به دست نیامد. امروزه سعی می‌کنند هندسه و جبر را هر دو به زبان نظریه‌ی رسته‌ها و جامعه شناسی ساختارها ترجمه نمایند. هنوز هم دغدغه‌های علم فیزیک با مرزهای ساختارشناسی ریاضی هم نشین است و بسیاری از انقلاب‌های عمیق ریاضی از نیازهای تئوریک فیزیک‌دانان تغذیه می‌شود. توجه به یک نکته اهمیت فراوان دارد و آن این که میدان، حلقه و جبر، ساختارهای عددی هستند، اما مفهوم گروه که با تقارن عجین است، از مفهوم عدد مجردتر است.

گروه و هندسه

هر چند اویلر پیش از جردن گروه حرکت‌های صلب در فضای سه بعدی را مطالعه کرده بود، اما اولین کسی که گروه‌های تبدیلات را گروه نامید و آن‌ها را مطالعه کرد، جردن بود. کیلی و کلاین این ایده را با هندسه نااقلیدسی مربوط کردند و به علاوه، کلاین به گروه‌های تبدیل خطی کسری گسسته پرداخت و لی گروه‌های پیوسته کلی را مطالعه کرد.

حال به جزئیات داستان می‌پردازیم. تحقیقات کیلی در بخش‌های مختلف هندسه و جبر بسیار تأثیرگذار بود و برای مثال، در یک سری مقالاتی که مبانی invariant theory را پایه‌گذاری کرد. روی فضای افکنشی مختلط با ثابت گرفتن یک مقطع مخروطی یک فاصله تعریف کرد و راه را برای مدل کلاین از هندسه نااقلیدسی باز کرد. کلاین ایده جردن را برای مدل خود به کار برد و تبدیلات ایزومتری را تعریف کرد و دریافت که تبدیل‌های تصویری، اقلیدسی، خطی کسری و دوران‌ها به ترتیب هندسه تصویری، اقلیدسی، نااقلیدسی و کروی را تعریف می‌کنند. او از ایده‌ی ناورداهای کیلی استفاده کرد و گفت در هر هندسه اشیائی مورد مطالعه هستند که تحت تبدیلات آن هندسه ناوردا باشند. این منجر به برنامه ارلانگن کلاین شد، که هندسه را بر مبانی جدیدی استوار کرد.

سؤال مهم این که، این انقلاب مهم توسط مفهوم گروه ایجاد شد یا توسط مفهوم ساختار ریاضی؟ مفهوم گروه خود به عنوان خود ریختی‌های یک ساختار به طور طبیعی ظاهر می‌شود. تنها پس از شکل‌گیری مفهوم ساختار است که خودریختی آن معنی پیدا می‌کند. مفهوم خودریختی از یک ساختار ریاضی به نظام مفهومی یک تئوری ریاضی نیز قابل تعمیم است، مانند دوگانی خط و نقطه در هندسه تصویری و یا تقارن مفاهیم بوزون و فرمیون. هنوز تقارن‌های مفهومی به طور رسمی وارد ریاضیات نشده است.

کلاین و لی در ۱۸۷۱ مقاله مشترکی در مورد گروه تبدیلات خطی نوشتند که در آن ثابت کردند گروه‌های پیوسته ۱- پارامتری جابجایی هستند. کلاین راه خود را از او جدا کرد و به بررسی توابع خود ریخت Automorph پرداخت که یکی از کاربردهای گروه آنالیز محسوب می‌شود. کلاین ثابت کرد که گروه‌های متناهی تبدیلات هذلولوی، همه دوران هستند و لذا گروهی متناهی از تبدیلات، اقلیدسی هم می‌باشند. کلاین این گروه‌ها را رده‌بندی کرد. از طرف دیگر لی در مورد گروه‌های پیوسته و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل تحقیق کرد که این نیز از کاربردهای گروه در آنالیز است. به علاوه، نظریه لی منجر به به جبرهایی می‌شد که از کاربردهای گروه در جبر محسوب می‌شود.

گروه‌های لی در واقع با فرض ساختار هندسی برای گروه پدید می‌آیند. این گروه‌ها به صورت تقارن‌های موجوداتی ظاهراً می‌شوند که خودریختی آن‌ها آنقدر زیاد است که می‌توان آن‌ها را پارامتریزه‌سازی کرد. یکی از سنگ بناهای ریاضیات مدرن، رده‌بندی گروه‌های جبری است که در قرن بیستم پایان پذیرفت.

به طور خلاصه، گروه و هندسه منجر به ظهور دو ایده شدند: یکی تبدیلات یک فضای هندسی و دیگر گروهی که ساختار هندسی داشته باشد. مشابه همین اتفاق در برخورد نظریه گروه‌ها و علم جبر به‌وجود آمد. گروه هم به عنوان تقارن ساختار جبری مطرح شد و هم در جبر لی و جبر هوپف ساختار جبری به خود گرفت.

گروه و آنالیز

به توابع خود ریخت و معادلات دیفرانسیل متقارن به عنوان دو مصداق آنالیزی از کاربرد نظریه‌ی گروه‌ها که توسط به ترتیب کلاین ولی معرفی گردیدند، اشاره کردیم. اما پیش از این دو، جردن در کتاب نظریه گالوای خود، گروه گالوا را با توابع متعالی مربوط کرده بود. جردن بین گروه مونودرومی و گروه گالوا تمایز قائل شد. با داشتن f(y,w) =۰ که نسبت به w چند جمله‌ای است، گروه گالوای معادله با ضرائب در k، گروه گالوایی با میدان ثابت k(z) است که شامل گروه مونودرومی معادله می‌شود.

مسئله‌ی جردن مطالعه‌ی $\cos(x/n)$ بر حسب $\cos x$ است که ریشه یک معادله‌ی درجه n می‌شود با ریشه‌های $(p)=\cos\frac{x+2p\pi}{n}$ و گروه مونودرومی یا گردشگری $p'\equiv p+m$ که در اینجا همه‌ی همنهشتی‌ها به پیمانه‌ی n است. همچنین گروه گالوا نیز با جایگشت‌های $p'\equiv ap+b$ داده شده است.

حال تئوری توابع بیضوی را در نظر بگیرید $u=\lambda(z)$ معکوس $z=\int_{\infty}^{u}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$ و $\lambda'(z)=\sqrt{(1-\lambda^2(z))(1-k^2\lambda^2(z))}$. فرض کنید $\lambda(z),\lambda'(z)$ داده شده باشند. $\lambda(\frac{z}{n})$ ریشه‌ی معاله‌ای درجه‌ی n^2 است با ریشه‌های $(pq)=\lambda(\frac{\delta+pw+qw'}{n})$ که w و w' تناوب‌های اصلی تابع بیضوی λ هستند.

فرض کنید nعدد اول باشد. گروه گالوای معادله با جایگشت‌های زیر داده می‌شود. $q' \equiv a'p + b'q + m'$ و $p' \equiv ap + bq + m$. با اضافه کردن اعداد زیر به میدان ثابت‌های معادله. $\lambda(\frac{w}{n}), \lambda'(\frac{w}{n}), \lambda(\frac{w'}{n}), \lambda'(\frac{w'}{n})$ گروه گالوا کوچک‌تر شده همان گروه گردشگری را می‌دهد $p' \equiv p + m, q' \equiv q + m'$ که آبلی است.

مسئله دیگر محاسبه‌ی گروه گالوای درجه n^2است با کمک محاسبه $\lambda(\frac{w}{n}), \lambda'(\frac{w}{n})$. ریشه‌های این معادله به شکل $(pq) = \lambda(\frac{pw + qw'}{n})$ هستند. با حذف $\lambda(\frac{0}{n})$ یک معادله درجه n-۱ می‌ماند با گروه گردشگری $q^* \equiv a'p + b'q, q^* \equiv ap + bq$ که در آن $ab' - a'b \equiv 1$ که همان $SL(۲,z/n)$ است. جردن این مسئله را به توابع ابر بیضوی هم تعمیم داد و گروه $SP(۴,z/p)$ را به دست می‌آورد. می‌بینیم که خم‌های بیضوی از همان اوایل مطرح شدن گروه گالوا اهمیت داشتند.

گروه و ترکیبات

نظریه گروه‌های جایگشتی بستر اولیه نظریه‌ی گروه‌ها بوده. ابتدا تحقیقات در مورد گروه‌های جایگشتی جزئی از نظریه توابع بود. به همین دلیل کوشی در این مورد قضایایی دارد. گروه‌های متناهی کلاسیک، توسط جردن در محاسبات گروه گالوا به دست آمدند، اما هنوز همه به زبان گروه‌های جایگشتی کار می‌کردند. مثال‌هایی از چنین گروه‌های توسط Mathieu نیز در ۱۸۷۳ ارائه شد. حتی قضایای ریاضی‌دان نروژی Sylow هم به زبان گروه‌های جایگشتی بنا شدند.

گروه‌های جایگشتی توسط گالوا در ۱۸۲۹ و گروه‌های حرکت توسط جردن در ۱۸۶۷ معرفی شدند. اولین کسی که گروه آبلی مجرد را تعریف کرد، کرونکر ۱۸۷۰ بود. کیلی اولین قدم‌ها در تعریف مجرد گروه را در ۱۸۵۴ و ۱۸۷۸ برداشت تا ۱۸۸۲ که وبر تعریف‌های نهایی را ارائه کرد. در اینجا بود که نظریه گروه‌ها شخصیت دیگری پیدا کرد و علی‌الخصوص مسائلی مانند رده‌بندی گروه‌های متناهی مطرح شدند. این جا بود که گروه‌های کلاسیک متناهی اهمیت پیدا کردند.

هولدر شاگرد و ایشتراس، در ۱۸۸۹ به گروه‌های گالوا علاقمند شد و قضیه جردن–هولدر نتیجه تحقیقات او در مورد گروه گالوای معادلات است. هولدر در ۱۸۹۲ به رده‌بندی گروه‌های متناهی پرداخت. از این جا بود که کم‌کم نظریه‌ی گروه‌ها به عنوان یک شاخه‌ی مستقل ریاضیات روی پای خود ایستاد و متخصصان نظریه‌ی گروه‌ها به حل مسائلی پرداختند که توسط خود این نظریه مطرح می‌شد.

گروه و جبر

به ساختار جبرلی که روی فضای مماس یک گروه لی تعریف می‌شود، اشاره کردیم. Engel و Killing تحقیقات لی را ادامه دادند و کارتان در تز دکترای خود ۱۸۹۴ نتایج آنان را تکمیل کرد. این نتایج در جهت رده‌بندی گروه‌های لی از طریق رده‌بندی جبرهای لی بسیار کار آمدند.

مفهوم جبر جابجایی به عنوان تعیمم ساختارهای عددی بسیار پیش از مفهوم گروه ظاهر شد. این نکته بسیار اهمیت دارد که گروه یک ساختار عددی نیست. جبرهای غیر جابجایی همگام با نظریه گروه‌ها ظهور پیدا کردند و ساختار عددی محسوب نمی‌شوند. جبرهای غیر جابجایی به دلایل فلسفی با گروه‌های مجرد خویشاوند هستند و این شباهت باید مورد بررسی قرار گیرد.

اعداد مختلط به عنوان یک ساختار عددی از زمان کاردانو مطرح شده بودند و میدان‌های اعداد و توابع پیش از گالوا در راه حل آبل ظاهر شدند. جبر کواترنیون‌ها در ۱۸۴۳ توسط هامیلتون معرفی شد. فردای آن‌روز هامیلتون کشف خود را در نامه‌ای به Graves نوشت و او دو ماه بعد جبر غیر شرکت پذیر ۸تایی‌ها را ساخت. کیلی در ۱۸۸۵ گروه لی s^3 را تعریف کردند. هروتیز در ۱۸۹۶ جبر کواترنیون‌ها را با نظریه اعداد مربوط کرد. او تجزیه کواترنیون‌ها با ضرائب صحیح را به کاربرد تا در حل مسئله چهار مربع پیشرفت حاصل کند. فضاهای برداری به روش مدرن اصل موضوعه‌ای توسط گراسمان در ۱۸۴۴ و ضرب تانسوری آن‌ها توسط هانکل در ۱۸۶۲ مطرح شدند. جبرهای کیلفورد در ۱۸۷۸ معرفی شدند و بعدها در مقاله مشهور دیراک، «نظریه کوانتومی الکترون‌ها» به کار آمدند. به سادگی مشاهده می‌شود که داستان تکامل ساختارهای جبری، همان طور که گفتیم، مستقلاً تحت تأثیر ظهور مفهوم ساختار ریاضی بعد از هندسه‌ی نااقلیدسی و قوع پیدا کرده.

حال ببینیم چرا گروه و جبر ناجابجایی خویشاوندند. اولاً گروه‌های جابجایی قابل تجزیه به حلقه‌ها هستند. پس منظور اثبات خویشاوندی گروه‌های ناجابجایی و جبرهای ناجابجایی است. وجود گروه–جبر $k(G)$به ما می‌گوید که گروه‌ها را می‌توان زیر دسته‌ای از جبرها دانست. اما شباهت جبرهای ناجابجایی به این زیر دسته در چیست؟ برای احتیاط فقط جبرهای شرکت پذیر را در نظر می‌گیریم جبرهای شرکت پذیر اولین بار توسط بنجامین پیرس ۱۸۷۰ معرفی شدند.

ریاضیات مدرن نشان می‌دهد که جبرهای شرکت‌پذیر یکی از ناورداهای طبیعی هستند که می‌توان به اشیاء و ساختارهای ریاضی نسبت داد و شاید این حداکثر شباهت جبر ناجابجایی و گروه ناجابجایی باشد ولی برای اینکه بگوییم چرا هر دو ساختار عددی نیستند، کفایت می‌کند. از اینجا، داستان گروه را رها می‌کنیم و به ساختارهای جبری می‌پردازیم.

هندسه‌ی جبری

هندسه جبری ترکیبی از جبر و هندسه است، که ایده‌های آن در قرن ۱۹ بر تحولات جبر و نظریه اعداد حکومت می‌کند. همان طور که دیدیم، در هندسه یونانیان خم‌های جبری به صورت مکان ظهور پیدا می‌کردند. رویه‌ها همه به شکل رویه‌های دوران ظاهر شدند و از آن جمله چنبره، استوانه، مخروط، سهمی و هذلولی دوار و مانند آن. تعریف مختصات دکارتی و بعد سری تیلور صورت جدیدی به خم‌های جبری و رویه‌های جبری داد.

در اواخر قرن ۱۸ هندسه تصویری مونژ چنان انقلابی در هندسه به وجود آورد که تا ۱۰۰ سال هندسه به معنای $IR_2(IR)$ یا $IR_2(c)$ بود. کارهای نیوتن تا اویلر اهمیت نقاط در بی‌نهایت را آشکار ساخته بود. موبیوس، پلوکر و کیلی مختصات همگن را به وجود آوردند و توسعه دادند. نظریه توابع مختلط، مشکلات نقاط تکنیکی یک خم جبری و مرتبه خم‌های جبری را حل کرد. بسط puiseux مقدمات معرفی رویه‌های ریمانی در تز ریمان را فراهم کرد. زبان دقیق و جبری وایراشتراوس این ایده‌ها را به زبان جبری مربوط می‌کند.

تبدیلات تصویری و عمل آن روی صفحه افکنشی نظریه ناورداها را به وجود آورد که مسئله اصلی آن توسط هیلبرت در اواخر قرن ۱۹ حل شد. اولین مثال تبدیلات غیر خطی تبدیلات دوگویا birational و در حالت خاص تبدیلات درجه ی۲ بودند که گاهی روی خم‌های جبری تحدید می‌شدند و کم‌کم مفهوم نگاشت گویا را به وجود آوردند. این منجر شد تا ریمان هندسه‌ی birationalرا معرفی کند.

داستان از محاسبات مربوط به محیط بیضی شروع می‌شود که پس از کارهای اویلر منجر به قانون گروه آبل روی خم بیضوی می‌گردد. به همین دلیل، آبل را پدر هندسه جبری مدرن می‌دانند. کار ریمان در مورد رده‌بندی انتگرال‌های آبلی، منجر به تعریف رویه‌های ریمانی به عنوان دامنه طبیعی تعریف توابع تحلیلی شد.

مهم‌ترین نتیجه ریمان در این نظریه قضیه uniformization او بود. پس از مرگ ریمان در ۱۸۶۶ که در ۴۰ سالگی ریمان اتفاق افتاد، مدارس مختلف هندسه جبری سعی کردند نظریه هندسی دوگویا را به زبان‌های خم‌های جبری بیان کنند و سپس نتایج آن را برای رویه‌ها و مجموعه‌های جبری با ابعاد بالاتر تعمیم دهند.

کرونکر در ۱۸۸۲ و بعد ددکیند و وبر مدرسه‌ی جبری را به وجود آوردند که با توجه به شباهت میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع نظریه اعداد را بسط دادند. Roch شاگرد ریمان و کلبش سعی کردند بین نظریات ریمان و هندسه تصویری ارتباط برقرار کنند. در ۱۸۷۰ بریل Brill و ماکس نوتر در آلمان، سمیت و کیلی در انگلستان، Halphen در فرانسه و zenthen در دانمارک و اولین نسل از هندسه‌دانان ایتالیا مانند Bertini , Cremona در جهت توسعه هندسه جبری تلاش کردند. اولین مسئله‌ی این مدرسه تکنیکی زدایی از خم‌های جبری بود. کرونکر در ۱۸۸۰ با روش‌های جبری و ماکس نوتر در ۱۸۷۱ با روش‌های هندسی این مسئله را برای خم‌های جبری حل کردند. در این مدرسه سعی کردند خم‌های جبری در $IR_n(C)$ را نیز بررسی کنند.

از ۱۸۷۰ کیلی و کلبش و ماکس نوتر سعی کردند یک تئوری رویه‌ها در $IR_2(C)$ به وجود بیاورند. اما مسئله تکنیکی زدایی برای رویه‌ها تا زمان Hironaka درقرن بیستم باز باقی ماند. دو مدرسه‌ی جبری و هندسی هندسه‌ی

جبری موازی با هم رشد کردند و این اولین بار در ریاضیات بود که دو زبان برای یک تئوری مشترک با یکدیگر رقابت می‌کردند. این دو زبان تأثیر متقابل بر هم داشتند.

نظریه جبری اعداد

- در ۱۸۸۲ کرونکر توجه کرد که توابع گویا روی خم جبری تشکیل میدان می‌دهند و این میدان شامل$C(Z)$ با اندیس متناهی است. ددکیند و وبر متوجه شباهت بین میدان $C(Z$) و Q و توسیع‌های متناهی این دو شدند. این مشاهده منجر به تلاش‌هایی برای بیان هندسه جبری به زبان میدان توابع گویای خم جبری و سپس ترجمه این نتایج به توسیع‌های متناهی Q و آن گاه اثبات این نتایج با کمک روش‌های نظریه اعداد بود. ددکیند و وبر به کرونکر پیوستند تا مبانی نظریه جبری اعداد را پایه‌گذاری کنند. مفهوم ایده‌آل یک حلقه از همین تحقیقات به وجود آمد. ایده‌آل‌های اول حلقه اعداد صحیح یک میدان اعداد متناظر می‌شدند با نقاط روی یک خم جبری. این اولین بار در ریاضیات بود که بر پایه‌ی مشابهت دو تئوری مستقل، دو تئوری رشد موازی داشتند.

به زودی، نظریه جبری اعداد بر پایه خود استوار شد و احکامی در آن ثابت شدکه بعد مشابه آن در میدان‌های توابع ظاهر می‌شد. روش جبری کرونکر قدرت خود را نشان داد، چرا که به نظر هندسه‌دانان می‌رسیدکه در بعد ۲و۳ تمام نتایج را با شهود هندسی می‌توانستند به دست آوردند. ددکیند و وبر تمام قضایای ریمان را به طور جبری ثابت کردند. آن‌ها مفهوم ارزیابی، حلقه ددکیند، تجزیه به ایده‌آل‌های اول، و مقسم Divisor را معرفی کردند و موفق شدند مهم‌ترین قضیه رویه‌های ریمانی یعنی قضیه‌ی ریمان-رخ را به زبان جبری ترجمه کنند. ظهور نظریه‌ی میدان‌های اعداد و حلقه اعداد صحیح آن‌ها در واقع آغاز پیدایش نظریه‌ی حلقه‌ها محسوب می‌شود.

میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع

تئوری میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع زبان مشابهی دارند. زبان مشابه، رشد موازی این دو تئوری را بسیار ساده می‌کند؛ چون ترجمه بین آن‌ها ساده می‌شود. نکته این است میدان‌های توابع با زبان موازی هندسی توسعه داده می‌شود و نتایج آن به سادگی به میدان‌های اعداد ترجمه و به روش‌های نظریه اعدادی اثبات می‌گردند. در اینجا مشابهت دو تئوری تنها مشابهت زبانی است و روش‌های اثبات دو طرف متفاوت و مستقل هستند. هنوز کسی نتوانسته با زبان مشترکی نتایج دو طرف را ثابت کند.

بسیاری از نتایج ریاضی که در مورد میدان‌های اعداد حدس زده شده‌اند به سادگی قابل ترجمه به زبان میدان‌های توابع هستند. در اکثر موارد روش‌ها و ایده‌های هندسی و به خصوص نظریه توابع کمک می‌کنند تا صورت

میدان توابع این حدس‌ها اثبات شوند و این به عنوان تأییدی برای صحت آن‌ها در نظریه میدان‌های اعداد محسوب می‌شوند. مهم‌ترین نمونه فرضیه ریمان است که مشابه آن در نیمه دوم قرن ۲۰ در حالت میدان‌های توابع ثابت شد.

از جایی به بعد که تشابه‌های جدی‌تر لازم شد، میدان توابع را توسیع متناهی $F(t)$ می‌گیرند هرچند در بسیاری موارد مهم، میدان‌های توابع روی C هم مشابه میدان‌های اعداد هستند و برای مثال حدس‌های langlands در حالت‌های میدان‌های توابع روی C به تازگی حل شده و به آن برنامه‌ی لنگلندز هندسی می‌گویند. قضایا در حالت میدان‌های توابع با مشخصه متناهی لزوماً هندسی نیستند ولی هنوز هم با استفاده از ایده‌های هندسی ساده‌تر از میدان اعداد مطالعه می‌شوند.

ساختار عددی و مفهوم جبر

بیایید جریان‌های مفهومی و مهارتی که تا اینجا با آنها سر وکار داشتیم را فهرست کنیم. جریان مفهومی عدد، تابع، تقارن، ساختار جبری، ساختار ریاضی. جریان مهارتی تشکیل معادله، حل مسئله، ساختارشناسی جبری، برقراری ارتباط بین شاخه‌های مختلف ریاضیات، تئوری‌سازی و نظریه پردازی و ساختارسازی.

این جریان‌های مفهومی و ارتباط بین آن‌ها و جریان‌های مهارتی و مصداق‌های آن‌ها کم و بیش داستان جبر قرن ۱۹ را به خوبی تفسیر می‌کنند. ساختارهای عددی از اعداد طبیعی تا اعداد صحیح و اعداد صحیح مختلط و اعداد گویا تا میدان‌های توابع میدان‌های اعداد و حلقه اعداد صحیح آن‌ها و کامل‌سازی آن‌ها مثل IR و C و بعد به جبرهای شرکت پذیر و غیر شرکت پذیر مانند کواترنیون‌ها و ۸تایی‌ها تعمیم پیدا می‌کند. مفاهیم تابع پیوسته، مشتق پذیر، جبری، تحلیلی، گویا، توسیع، وگسترش جریان مفهومی تابع را تشکیل می‌دهند. در قرن ۱۹ ساختارهای جبری محدود به گروه و ساختارهای عددی هستند. در واقع جریان مفهومی ساختارهای جبری از قرن ۲۰ آغاز می‌شود. ساختارهای اصل موضوعه‌ای مصداق‌های ساختارهای مجرد ریاضی هستند که ساختارهای جبری و لذا ساختارهای عددی را شامل می‌شوند. مفهوم ساختار جبری پس از شکل گرفتن محیط زندگی آن، یعنی ساختارهای مجرد ریاضی است که معنی پیدا می‌کند. از آن جا که ساختارهای مجرد ریاضی به ساختارهای مفهومی توسعه می‌یابند، مفهوم این ساختارهای ریاضی نیز قابل تشخیص است. تا هنگامی که فراتر از مفهوم درک نشود ساختارهای مفهومی تعریف دقیقی نخواهند داشت. چون بدون اینکه یک تئوری را در تئوری بزرگتری بنشانیم نخواهیم توانست مرزهای آن را معین کنیم.

تحول ریاضیات به کمک ازدواج زیر شاخه‌ها و تولد شاخه‌های جدید

در عهد باستان ازدواج هندسه و حساب علم جبر را و ازدواج جبر و حساب علم معادلات دیوفانتی را پدید آوردند. همین ازدواج، نظریه جبری اعداد را در قرن ۱۹ پدید آورد که ادامه معادلات دیوفانتی محسوب می‌شود. در قرن ۱۸ ازدواج هندسه و جبر شاخه‌ی آنالیز را به وجود آورد و ازدواج حساب و آنالیز شاخه‌ی نظریه تحلیلی اعداد را بوجود آوردند. ازدواج هندسه و آتالیز نظریه‌ی خمینه‌ها را و ازدواج هندسه و جبر هندسه‌ی جبری را به وجود آوردند. می‌توان دوبه دوی این شاخه‌ها را کنار هم قرار داد و گفت در قرن۲۰ از ازدواج آن‌ها چه شاخه‌هایی به وجود آمده است.

سؤال اینکه مگر شاخه‌های ریاضیات مواد شیمیایی هستند که به این سادگی بتوان آن را روی هم ریخت و شاخه جدیدی به وجود آورد؟ مگر طبیعت ایده‌های ریاضی چیست؟ آیا اشیاء ریاضی ذاتاً هماهنگ و تربیت شدنی هستند، یا می‌توان همیشه اشیائی جدید خلق کرد که تربیت ایده‌های قدیمی در آن‌ها وجود داشته باشد؟ چرا بارها و بارها در تحقیقات ریاضی نتایجی به دست می‌آید که تأیید می‌کند که راه را درست رفته ایم و ترکیب‌هایی که ساخته‌ایم طبیعی هستند و با نظام ریاضیات هماهنگی دارند؟ اگر بخواهیم تئوری عالم مثل افلاطون را نپذیریم، چه جایگزینی می‌تواند جوابی منطقی به این سؤالات بدهد؟ به عبارت دقیق‌تر چه طبیعتی برای مفاهیم ریاضی قائل شویم تا چنین انعطافی را نتیجه بدهد؟ اما همان طور که گفتیم تا وقتی که مفاهیم ریاضی را در بستر وسیع تری ننشانده‌ایم، نمی‌توانیم جواب معقولی برای این سؤال پیدا کنیم.

تحول ریاضیات به کمک مسائلی که با کمک زیر شاخه‌های دیگر حل می‌شوند

مسئله‌ی بسط فوریه موجب دقیق‌تر شدن مبانی آنالیز شد و مسئله‌ی فرما موجب توسعه‌ی نظریه‌ی جبری اعداد گردید. این مسائل، اگر چه به تئوری‌سازی خدمت کردند، اما در چارچوب همان شاخه‌ای که در آن مطرح شدند مؤثر افتادند. در برابر، مسائلی بودند که با کمک ایده‌های شاخه‌های دیگر ریاضی حل شدند و بین دو رشته ارتباط برقرار نمودند. مثلاً جبرهای لی به رده‌بندی گروه‌های لی خدمت کردند، و نظریه گروه‌ها به مسئله حل معادلات توسط رادیکال‌ها، و نظریه پتانسیل به مسئله‌ی uniformization، و سری‌های توانی به نظریه توابع تحلیلی و مسئله‌ی مبانی آن، و ایده‌های هندسه‌ی جبری به مسئله تعریف ناورداهای مناسب برای میدان‌های اعداد کمک شایانی کردند.

سؤال اینکه چرا ایده‌هایی که در یک شاخه ریاضیات ظهور پیدا می‌کنند، قابلیت کاربرد در شاخه‌های کاملاً نامربوط را دارند؟ حتی در بسیاری موارد بین دو تئوری بی‌ربط چنان شباهتی دیده می‌شود که می‌توان لغت نامه‌ای بین دو تئوری تعریف کرد که بین قضایای دو تئوری و اشیاء ریاضی آن‌ها تناظر ایجاد کند. چرا ممکن است شاخه‌های نامربوط، قضایا و نتایجی چنین مشابه به دست دهند؟

شاید ساختار مفهومی یک مسئله، مشابه ساختار مفهومی یک تئوری دیگر باشد و این تشابه کمک کند مشابه ساختار مفهومی دوم در ساختار مفهوم اول بازسازی شود و این به حل مسئله کمک کند. سؤال اینکه مگر طبیعت مفاهیم ریاضی چیست که ساختار ارتباطی آن‌ها همه چیز در مورد این مفاهیم را در خود کدگذاری کرده است؟ پاسخ به این سؤال نیز مانند مورد قبل ممکن نیست.

ریاضی‌دانان مسئله حل کن و ریاضی‌دانان تئوری‌ساز

مهارت‌های حل مسئله و تئوری‌سازی دو روی سکه ریاضیات هستند. تحولات ریاضیات را این دو جریان مهارتی هدایت می‌کنند. عده‌ای از ریاضی‌دانان بیشتر به طرح مسائل کلیدی و ارائه‌ی روش‌های حل مسئله ریاضی و حل مسائل خاص که مورد توجه جامعه ریاضی‌دانان هستند، تأکید دارند و عده‌ای دیگر به خلق مفاهیم، تعمیم قضایا و ایجاد ارتباط بین شاخه‌های ریاضیات و تئوری پردازی اشتغال دارند. بدون شک مسئله حل کن‌ها بسیاری اوقات نیازمند به خلق زبان جدیدی برای حل مسئله هستند. یا به توسعه تئوری‌های موجود نیاز دارند. در برابر، تئوری‌سازان در انجام ریاضیات و تئوری پردازی خود به مشکلاتی برخورد می‌کنند که دقیقاً به شکل حل مسئله هستند. نمی‌توان گفت که این دو گروه از هم بی‌نیازند یا اینکه هرگز به مهارت‌های گروه دیگر نیاز ندارند. اما آنچه مهم است تفاوت سیستم ارزیابی این دو گروه از تحقیقات ریاضی است.

برای مسئله حل کن‌ها، تحقیقاتی با ارزش است که در آن‌ها ریاضی‌دانان در حل مسائلِ مشکلی که غیر استاندارد هستند با کمک روش‌های جدید و خلاقانه‌ای موفقیت پیدا کرده باشند. برای تئوری پردازان، تحقیقات باارزش تحقیقاتی هستند که نوری جدید به موضوع مورد مطالعه بتابانند و ساختار ریاضی تئوری را بهتر به نمایش بگذارند.

برای مقایسه این دو گروه همین یک جمله بس که تنها ریاضی‌دانی که زیر ۲۰ سالگی از خود تمایلات تئوری پردازانه نشان داده گالوا بوده. شاید ریاضی‌دانان مسئله حل کن بیش از اندازه علاقه‌مندند خاطرات شیرین حل مسئله نوجوانی خود را مرور کنند. در هر حال ریاضی‌دانان هردو گروه نقش عمده‌ای را در تحولات ریاضیات ایفا کرده‌اند و کشتی ریاضیات بدون همکاری این دو ناخدا راه به جایی نخواهد برد.

مسلماً هدایت کنندگان اصلی ریاضیات کسانی هستند که از پشت‌پرده، هردوی این گروه‌ها را تحت نظر دارند و عمیق‌تر از هردوی آن‌ها فکر می‌کنند. اختلاف دیدگاه‌های حل مسئله و تئوری پردازی، در نگاهی به ریاضیات معنی پیدا می‌کند که باید آن را در نوردید و پشت سر گذاشت و رفع حجاب کرد تا توانست عمق واحد پشت صحنه‌ی هر دوی این فلسفه‌های علمی را شناخت.

روشن است که درک باطن ریاضیات، باز به همان سؤال تکراری منجر خواهد شد که طبیعت مفاهیم ریاضی چیست که هم مهارت حل مسئله و هم مهارت تئوری پردازی برای آن ممکن می‌شود. هم چنان صلب است که

مسائلی در آن مطرح می‌شود که پس از حل آن گویی راه حل از پیش نزد خالق دانا دانسته شده بود و هم چنان نرم است که در دستان هنرمند تئوری پردازان به راحتی شکل می‌گیرد و خلاقیت می‌پذیرد؟ متأسفانه باید تکرار کرد که تا حوزه مفاهیم ریاضی را به حوزه‌ی وسیع تری توسعه ندهیم نمی‌توانیم در مورد مرزهای تعریف مفاهیم ریاضی و طبیعت آن‌ها صحبت کنیم.

فصل ۱۰

شکوفایی ریاضیات در قرن بیستم

هر چند فلسفه ریاضی قبل از فرگه و پس از فرگه صورت کاملاً متفاوتی دارد و ریاضی‌دانان فیلسوف و فیلسوفان ریاضی‌دان پس از فرگه به این نتیجه می‌رسند که شاخه‌ای جدید به نام منطق را پایه‌گذاری کنند تا یک سری مشکلات در مبانی ریاضی را حل کند. و با وجود این که منطق و ریاضیات مسیر تکامل مستقلی را پیموده‌اند صحیح نیست اگر داستان فلسفه ریاضی قبل از فرگه و بعد از فرگه را یک داستان پیوسته ندانیم. هر چند در زبان و ابزارهای فلسفه انقلابی به پا شد، هرگز نمی‌توان گفت که اهداف و نقش فلسفه ریاضی پس از فرگه تغییر پیدا کرده است.

از دیدگاه افلاطون مهم‌ترین مسئله فلسفه تشخیص حقیقت از نمود است. حقیقتی که تغییر ناپذیر است. محک حقیقت ریاضی از دید او دقت ریاضی و استقلال از زمان است. فلسفه ریاضی ارسطو در تقابل با فلسفه افلاطون شکل گرفت. او به هیچ وجه برای شی حاصل تجرید، وجودی مستقل قائل نبود. بنابراین دایره باید در همان چیزی باشد که از آن تجرید شده و یا به تعداد موضوع تجرید دایره داریم. ارسطو به جای تجرید، مفهوم کلاس اشیا را جایگزین کرد. ارسطو بین اصول اولیه‌ی مشترک بین همه علوم، اصولی که ریاضی‌دانان صحت آن را فرض می‌کنند، تعاریفی که فرض نمی‌کنند و آنچه تعریف می‌کنند وجود دارد، و فرضیات و جودی، تمایز قائل می شود.

ارسطو بر خلاف افلاطون به بی‌نهایت باالفعل اعتقاد ندارد. او بین دو نوع بینهایت که یکی در پایان دنباله اعداد طبیعی قرار می‌گیرد و دیگری به تقسیم پاره خط بی‌نهایت بار مربوط می‌شود، ارتباط برقرار می‌کند. تأکید ارسطو بیش از افلاطون بر ساختارشناسی تئوری‌های ریاضی تعلق می‌گیرد. لایبنیتز مانند افلاطون و ارسطو فیلسوف بود. دکترین منطقی و متافیزیکی او بسیار شبیه ارسطو است. در منطق ارسطویی، هر گزاره قابل تحویل به شکل موضوع محور است و در متافیزیک ارسطویی جهان از جوهرهایی همراه با عرض تشکیل شده است. این منطق و متافیزیک تطابق دارند. در منطق لایبنیتزی مجهول هر گزاره مشمول در موضوع است و در متافیزیک او جهان از موضوعات یا مونادهایی مستقل که نمی‌تواند ارتباط برقرار کند تشکیل شده. این منطق و متافیزیک از یکدیگر جدایی ناپذیرند. از دیدگاه لایبنیتز، حقیقت با استدلال عجین است و غیر آن ممکن نیست، اما واقعیت‌ها ممکن است وارونه باشند.

اصل عدم تناقض و اصل عدم وقوع بدون دلیل کافی مبنای منطق استدلالی لایبنیتز را تشکیل می‌دهند. در فلسفه او حقیقت است که مورد بررسی قرار می‌گیرد نه واقعیت. نظر او راجع به ریاضیات متقارن با افلاطون و ارسطو است. گزاره‌های ریاضی در مورد اشیاء خاص ایده‌سازی شده سخن نمی‌گویند، بلکه این گزاره‌ها صحیح هستند چون انکار آن‌ها از لحاظ منطقی غیر ممکن است. ریاضیات بسیار نزدیک منطق است. این دسته بندی دوگانه لایبنیتز در فلسفه کانت به سه دسته‌ی تحلیلی و پیشینی به شهودی و discursive تقسیم می‌شوند مانند ریاضیات و اصل علیت.

برای کانت ریاضیات تحلیلی نیست، بلکه پیشینی است، چون راجع به قضا و زمان است. توصیف یک مفهوم یعنی بیان کردن آن بر حسب ادراکات پیشینی. از دیدگاه کانت ریاضیات محض پیشینی و ریاضیات کاربردی پسینی است. کانت در مورد بی‌نهایت نظریاتی دقیق‌تر از ارسطو دارد.

ریاضیات به عنوان منطق

با تأکید بر این نکته که محاسبه جزء جدایی ناپذیر استدلال منطقی است، لایبنیتز روش و متودولوژی ارائه کرد تا ریاضیات و منطق را بر اصل عدم تناقض و تحویل گزاره‌ها به گزاره‌های بدیهی منطقی استوار نماید. فرگه، راسل و پیروانش این برنامه را به اجرا می‌گذارند. از دید فرگه گزاره‌ای تحلیلی است که از قواعد عمومی منطق و تعاریفی که بر مبنای این قواعد استوار شده، استخراج شود. برای این کار ،فرگه و پیروانش ناچار بودند برای تمام مفاهیم استنتاجات منطقی نمایش سمبلیکی ارائه کنند. البته در روند اثبات منطقی گزاره به این روش باید در مرحله‌ای از نمادهای منطقی به نمادهایی که منطقی به نظر نمی‌رسند گذر کرد. این گذر از دیدگاه فرگه و راسل توسط تعاریف اتفاق می‌افتد.

راسل بر خلاف فرگه تعاریف را کاملاً صوری می‌داند و اگر تعریف به چیزی که یک ایده‌ی معروف است تعلق می‌گیرد، در واقع تعریف تحلیلی دقیق از آن مفهوم و ایده‌ی معروف ارائه می‌دهد. اما از دیدگاه منطق واقع‌گرای فرگه تعریف کردن اعداد به معنی خلق آن‌ها نیست. تعریف گارانتی نمی‌کند که موضوع تعریف موجود باشد. مفهوم از دید فرگه تابعی است به اشیاء ریاضی گزاره‌ای نسبت می‌دهد که می‌تواند درست یا غلط با شد و لذا کلاسی از اشیاء ریاضی را مشخص می‌کند که گزاره‌ی مربوطه صحیح است. مفهوم تعریف، و لذا تجرید و از آنجا دیدگاه نسبت به اشیاء مجرد در نظرات فرگه و راسل وجود دارد، اما هدف منطق این است که نشان دهد همه ریاضیات تعریف پذیر براساس تعداد کمی مفاهیم منطقی است و همه‌ی گزاره‌ها اثبات پذیر توسط تعداد کمی اصول منطقی است و منطق باید این کار را با استانداردهای بالای دقت و یقین ریاضی انجام دهد.

منطق توابع صدق، منطق کلاس‌ها و منطق سورها سه دسته مختلف اصولند که قرار است این هدف را بر آورده سازند. توابع صدق، گزاره‌هایی هستند که درستی آن‌ها تنها تابعی از درستی یا غلطی متغیرهای آن باشد. در این منطق در یک گزاره فقط باید درستی و نادرستی متغیرها را به کار برد و نه خواص دیگر و اطلاعات دیگری که دربر دارند. توابع صدقی که متحد با ارزش درست هستند همان استدلال‌هایی هستند که قابل استفاده می‌باشند. به این فرمالیسم حساب گزاره‌ها می‌گویند. در کنار آن منطق کلاس‌ها قرار دارد که توسط Boole فرمول‌بندی شده از مهم‌ترین اتفاقات منطق و فلسفه‌ی ریاضی این بود که اگر هر گردایه‌ای کلاس فرض شود به تناقض می‌انجامد.

تابع گزاره ای، $\phi(x)$ مجموعه همه اشیایی است که $\phi(x)$ درست باشد. با درنظر گرفتن توابع گزاره‌ای یک مفهوم تبدیل به شیء ریاضی می‌شود. با کمک توابع گزاره‌ای، راسل یک hierarcy از types تعریف می‌کند که مشکل پارادوکس راسل را در مورد نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور حل می‌کند.

سورها اگر دامنه‌ای متناهی از اشیاء به کار روند، قابل نمایش به صورت یک تابع صدق هستند. اما اگر در یک دامنه نامتناهی تغییر کنند مانند $\forall x \in z$ احتیاج به فرض اصول موضوعه‌ای جدید داریم. چنین اصول موضوعه‌ای از دیدگاه هیلبرت ابزار تکنیکی و صوری هستند و ازدیدگاه براوئر غیر قابل قبول، چون طبیعت ریاضیات با چنین اصول موضوعه‌ای تناقض دارد. هر تئوری منطقی باید هم از دیدگاه ساختار ریاضی و هم از دیدگاه فلسفی مورد نقد قرار گیرد. سؤال مهم این که آیا این دیدگاه نسبت به ریاضیات موفق می‌شود ریاضیات را جزئی از منطق بداند؟ یا اینکه ریاضیات کاربردی را توجیه کند؟

نقد ریاضیات به عنوان منطق

این که ریاضیات محض به منطق قابل تحویل باشد، بر فرض پیشینی بودن ریاضیات تکیه می‌زند. ریاضیات و الهیات هردو پیشینی هستند اما مرز کاملاً مشخصی دارند. ممکن است برای ریاضیات و منطق هم چنین باشد.

فرض کنید L یک مشخصه موروثی از گزاره‌ها باشد. یک راه نشان دادن وحدت ریاضیات و منطق پیدا کردن مشخصه‌ای است که گزاره‌های هردو از آن پیروی کند. حتی برای ریاضیات و منطق مشخصه‌های موروثی جداگانه‌ای ارائه نشده است. البته، شاید حتی بین گزاره‌های چنین مرز دقیقی وجود نداشته باشد. شاید بتوان دقت ریاضی را مرز پیشنی و پسینی دانست و فرض وجود را فرق بین ریاضیات و منطق.

در مدل‌های منطقی برای حساب، بینهایت باالفعل معنی دار است، در صورتی که رد و اثبات وجود چنین عددی به طور طبیعی غیر ممکن است. در حالی که اعداد طبیعی موجوداتی تجربی هستند. کاربرد ریاضیات فرض می‌کند بین تجربه و مفاهیم به دست آمده از ایده‌آل‌سازی آن ارتباطی وجود دارد. اما در منطق چنین نیست. حتی ارتباطات مفهومی در ریاضیات به محض از ایده‌آل‌سازی تجربه به دست می‌آیند.

از طرف دیگر، ایده‌ی ریاضیات فرا متناهی کانتور بدون شک انقلاب بزرگی در ریاضیات به پا کرد این اصل که هر کلاس را می‌توان مرتب کرد، هم به منطق مربوط است و هم به ریاضیات فرامتناهی اما در بسیاری از قسمت‌های ریاضیات کاربرد جدی دارد. اما سر آخر منطق‌دانان موفق به ارائه یک تئوری قابل قبول از حساب کاردینان‌ها نشدند.

ایده‌ی بی‌نهایت منطقی در هندسه مشکل‌سازتر از حساب است. هر دیسیپلین هندسه را می‌توان با مفهوم پیچیده‌ای از زبان حساب بیان کرد. نیاز به اعداد حقیقی مفهوم ناشمارا را فرض می‌گیرد. راه دیگر این است که مفاهیم هندسی و ارتباطات آن‌ها را مستقیماً به زبان منطق ترجمه کنیم. منطق‌دانان راه اول را برگزیدند که با

شکل‌گیری تجربی مفاهیم هندسه به کمک ایده‌آل‌سازی تطابق ندارد. این ایراد به راه دوم نیز وارد است. مشکلات دیگری هم می‌تواند پیش بیاید.

منطق‌دانان اگر بخواهند راه دوم را انتخاب کنند، در مبانی هندسه مثل اصل توازی دچار مشکلات جدی می‌شوند. به علاوه، مفاهیم در هندسه با فرض وجود مطرح می‌شوند و تا هنگامی که مدلی برای هندسه‌ی نااقلیدسی پیدا نشد، هندسه‌دانان آرام نگرفتند. در صورتی که منطق چنین دیدگاهی نسبت به هندسه ندارد.

در هرحال، منطق ریاضی به خاطر استاندارد بالای دقت ریاضی شاخه‌ای از ریاضیات محسوب می‌شود و به خاطر تأکیدات خاص این دیسیپلین، یک منطق‌دان شخصیتی بسیار متفاوت با یک ریاضی‌دان دارد. همان طور که استقلال و قائم به خود بودن ریاضیات و منطق این نکته را تأیید می‌کند. اوخر قرن ۱۹ شاهد شکل‌گیری و استقلال این دیسیپلین دیگر دیسیپلین‌هایی هم شکل گرفتند. از جمله ریاضی‌دانان محض، ریاضی‌دان کاربردی و ریاضی‌فیزیکدانان هریک دیسیپلین مستقلی را شکل دادند.

ریاضیات به عنوان علم سیستم‌های صوری

بر خلاف لایبنیتز که مبانی ریاضی را به سوی منطق جدید پیش راند، کانت مقدمات دو فلسفه دیگر را پیش کشید. هیلبرت ایده‌های کانت را چنین فرمول‌بندی می‌کند که ریاضیات از موجوداتی فرا منطقی تشکیل شده که به طور شهودی به عنوان تجربه مستقیم نزد ما حاضرند و همه‌ی افکار ما را هدایت می‌کنند. عقیده مشترک کانت، هیلبرت و براوئر این است که اگر ریاضیات محدود شود به توصیف اشیا ریاضی خاص و روابط منطقی بین آن‌ها که همه به دقت و روشنی بیان شده‌اند، جایی برای ظهور تناقض نمی‌ماند. مثلاً مفهوم بی‌نهایت که به شیء دقیق و روشنی تعلق نمی‌گیرد، باید حذف شود. صورت‌گرایی هیلبرت بر خلاف شهودگرایی براوئر اصرار دارد که عقیده با ریاضیات فرامتناهی کانتور تناقضی ندارد. آشتی صورت‌گرایی با نظریه کانتور مدیون آراء فلسفی کانت است در فلسفه‌ی اخلاق.

کانت اعتقاد داشت آزادی اخلاقی و ایمان دینی و مفاهیمی مانند بی‌نهایت از توسعه مفاهیم پیشینی به یک سیستم بدون تناقض به دست آمده‌اند و این روش کانت برای جا باز کردن برای ایمان دینی بود. در دستان هیلبرت این یعنی اثبات عدم تناقض ریاضیات و کانتور مهر تأیید به آن میزند. روش هیلبرت اصل موضوعه‌سازی و ارائه یک مدل است و این آغاز برنامه‌ی حسابی‌سازی ریاضیات است. برای این کار هیلبرت باید ابتدا سازگار بودن علم حساب را ثابت می‌کرد. راه حل هیلبرت تکیه بر روش‌های متناهی است چه این روش‌ها تناقضی را به وجود نمی‌آورد. پس مسئله بازسازی حساب با روش‌های متناهی است، منظور ارائه یک فرمول‌بندی متناهی از یک حساب است که هر گزاره قابل اثبات در آن صحیح باشد و هرگزاره صحیحی را بتوان با آن فرمول‌بندی به اثبات رساند.

در حساب ساختارهایی هست که کاملاً نا متناهی است. از جمله اعداد حقیقی از نظر وجود اعداد متعالی و هم از نظر کاردینالیتی که از اعداد صحیح بیشتر است. Zermelo نیز یکی دیگر از اصول غیر ساختارگرایانه ریاضیات را کشف کرد و آن اصل انتخاب است. او متوجه شد که این اصل نتیجه می‌دهد که هر کلاسی خوش ترتیب است و لذا هر دو کاردینالی قابل مقایسه‌اند.

اضافه کردن کلیات بی‌نهایت، چیزی مشابه اضافه کردن نقاط در بی‌نهایت در هندسه تصویری بود که قبلاً هم در ریاضیات پیش آمده بود. مفاهیم ایده‌آل و گزاره‌های ایده‌آل در مورد بی‌نهایت که لازم بود با ریاضیات متناهی تعامل داشته باشد، باید یه ریاضیات اضافه می‌شد. در این جا مرزی بین صدق و صحت برقرار می‌شد.

فرمول بندی حساب باید در یک فرا تئوری صورت می‌گرفت که در آن قواعدی برای فرمول ساختن و گزاره پیشنهاد کردن وجود داشته باشد. سازگار بودن صوری این فرا تئوری معادل سازگار بودن تئوری منطقی تئوری حساب خواهد بود. از آنجا که این تئوری صوری بر خود استوار است نه بر علم حساب، خود می‌تواند موضوع علم ریاضی‌دانسته شود. این تفکر موجب افراط در فلسفه صورت‌گرایی شد. گویی که ریاضیات چیزی جز تئوری صوری نیست. حتی صورت‌گرایی افراطی انکار می‌کند که ریاضیات تنها از منطق نتیجه شود. هیلبرت در مورد ریاضیات کاربردی نظری نداده، اما به نظر می‌رسد ایزومرفیسمی بین ریاضیات محض و خواستگاه تجربه قائل بوده است. سر انجام قضیه ناتمامیت گودل برنامه هیلبرت را نقش بر آب کرد.

نقد ریاضیات به عنوان علم سیستم‌های صوری

صورتگرایان فرض وجود مجموعه نامتناهی یا ریاضیات فرا متناهی را در فرا ریاضی خود راه نمی‌دهند. اما اجازه می‌دهند برای چنین موجوداتی نمادی به‌کار رود. این که همه‌ی ریاضیات را بتوان نمادین کرد، بعد از قضیه گودل بسیار مشکل آفرین خواهد بود.

یک مسئله فلسفی بسیار قدیمی که نه ریاضی‌دانان و نه فاریاضی‌دانان به آن علاقه‌مندند، این است که بین مفهوم ریاضی و مفهوم نمادین نمایش دهنده آن در فاریاضی چه ارتباطی هست. از آنجا که مفاهیم فاریاضی و گزاره‌های آن تجربی نیستند طبیعت فاریاضی نمی‌تواند با ریاضیات یکی باشد. بدون وجود تئوری‌های ریاضی، چگونه ممکن است فرمول‌های فاریاضی آن به وجود بیایند؟ البته این از اهمیت برنامه‌ی هیلبرت کم نمی‌کند.

مسئله ریاضی کاربردی برای منطق‌دان، ارتباط گزاره‌های منطقی که هرگز غلط نیستند با گزاره‌های تجربی است که ممکن است غلط باشند و برای صورت‌گرایان، ارتباط گزاره‌های صوری با گزاره‌های تجربی است که همان مشکل را دارد. معمولاً این مشکل را با ایجاد تناظر یک به یک بین ساختارهای مفهومی صوری و تجربی حل می‌کنند. اما تناظر بین اشیاء ایده‌آل‌سازی شده و اشیاءروزمره غیر ممکن است. نکته این است که باید بین یک تئوری و تناسب آن برای کاربردی خاص تمایز قائل شد. در واقع ریاضیات محض و کاربردی در این دیدگاه یک چیزند، اما صحنه

کاربرد آنان یکی محض و دیگری تجربی است. در واقع مدل‌های ریاضی در ریاضیات کاربردی صحنه‌ی تجربه را تقریب می‌زنند، اما مدل‌های ریاضی در ریاضیات محض با مصداق‌های خود تطابق کامل دارند.

در برابر مفهوم نامتناهی سه گرایش فلسفی قرار دارد. متناهی گرایی، فرا متناهی‌گرایی و فرامتناهی‌گرایی متدولوژیک، متناهی‌گرایان مانند ارسطو و گاوس و شهودگرایان هر گونه واقعیتی در باره‌ی این مفهوم را انکار می‌کنند. فرا متناهی‌گرایان مانند کانتور و پیروانش ریاضی متناهی و نامتناهی را هر دو به یک اندازه واقعی می‌دانند و فرا متناهی‌گرایان متدولوژیک مانند هیلبرت، اجازه‌ی ورود مفهوم نامتناهی را می‌دهند، اما بودن آن که آن را واقعی بدانند. هرکدام ازاین دیدگاه‌ها وقتی ارزش دارند که به عنوان برنامه تحقیقاتی به اجرا گذاشته شوند.

این سه دسته در سه دسته بزرگتر فلسفی: پزیتیویست‌ها، واقع‌گرایان متافیزیکی، واقع‌گرایان متدولوژیک جای می‌گیرند. ریاضیات متناهی و فرا متناهی هر دو دقیقند و این نظریه پزیتیویست‌های تجربه‌گرا را رد می‌کند. واقع‌گرایی متافیزیکی در ریاضیات، علم و سیاست رو به کمرنگ شدن است. می‌ماند واقع‌گرایی متدولوژیک که مهم‌ترین سؤال بر علیه آن این است که شاید استدلاهای فرا متناهی در خود فرمالیسم نیز مجاز باشد. چرا مفهوم بی‌نهایتِ واقعی در ریاضیات مجاز نیست. پس باید فرقی بین ریاضیات متناهی و نامتناهی باشد.

مسئله اولیه و اصلی منطق لایبنیتز، فرمول‌بندی دقیق مفهوم بی‌نهایت کوچک و دیگری بی‌نهایت‌ها و سپس نتیجه گرفتن کل ریاضیات از منطق بوده است. اما مسئله صورت‌گراها این بوده که به جای توسعه منطق، فقط آنقدر که مورد نیاز صورت‌گرایی است استخراج کنند. زیرا صورت‌گراها برای بررسی صوری یک اثبات فقط از ریاضیات ساختارگرا استفاده می‌کنند.

از طرفی ایده‌ی ساختارگرایی خود یک ایده مجرد است و در عمل همه ساختارهای عظیم ریاضی را نمی‌توان در متناهی مرحله ساخت. از طرفی دیگر در ستی این ساختارها نیاز به منطق دارد و نرمال نیست. به همین دلیل شهودگرایان تفکر صوری را کافی نمی‌دانند.

ریاضیات به عنوان ساختارهای شهودی

تز شهودگرایان این است که ریاضیات اگر درست درک و انجام شود، یک فعالیت مستقل و قائم به ذات خود است. روش‌های ریاضی، نه می‌توانند و نه نیازی دارند به حمایت منطق‌دانان و صورت‌گرایان. این نیاز فقط در جاهایی احساس می‌شود که ریاضی به درستی انجام نمی‌شود. براوئر نیز مانند هیلبرت تحت تأثیر کانت بود و نظر لایبنیتز را که ریاضیات سراسر تحلیلی است، نمی‌پذیرفت. بلکه اعتقاد داشت اصول موضوعه هندسه و حساب توصیف کننده‌ی شهود محض فضا و زمان و ساختارهای آنان هستند. ریاضیات شهودگرایان از اشیاء و ساختارهای شهودی تشکیل شده که به طور درونی ادراک می‌شوند و با فراریاضی صوری صورت‌گرایان تفاوت دارد. نقطه مشترک شهودگرایان و صورت‌گرایان این است که، درک مستقیم بی‌نهایت نه با تجربه ممکن است و نه با شهود درونی. لذا شهودگرایان هم

به ریاضی متناهی تأکید دارند و این بسیار سرسختانه‌تر از صورت‌گرایان است. چرا که آنان فقط درساختارهای صوری به تناهی تاکید دارند.

تأکید براوئر بر این است که ریاضیات واقعی، ریاضیات شهودی است و مستقل از زبان و منطق سوار بر مفهومی درونی از زمان انجام می‌شود و زبان یک ابزار بیان ریاضیات است. وقتی که ساختا رهای نامتناهی را در زبان، و منطق به کار می‌بریم، زبان از حقیقت ریاضی پیشی گرفته است. ممکن است تصور شود تأکید بر ریاضیات متناهی ما را بسیار محدود خواهد کرد، اما شهودگرایان ادعا می‌کنند که مفهومی از بی‌نهایت باالقوه وجود داردکه در بسیاری مسائل حوزه ریاضیات سنتی را وسیع‌تر نیز می‌کند.

پس کار شهودگرا این است که ریاضیات را در محیط شهود محض می‌سازد. آنگاه به دقت آن را بیان می‌کند. چنانکه دیگران هم بتوانند همین عمل را به طور دقیق در دامنه شهود خود کامل کنند. کار شهود، ساختن مفاهیم ریاضی است، نه اینکه به ما اطمینان دهد که چنین مفاهیمی وجود دارند. لذا از دیدگاه شهودگرایان، قضایای وجودی جایی در ریاضیات ندارند.

منطق از دیدگاه شهودگرایان یک رکود از اصول استدلال‌هایی است که در ساختارهای ریاضی به کار رفته‌اند. در واقع، منطق سعی می‌کنند ریاضیات را برخود استوار کند، اما شهودگرایان منطق را استوار بر ساختارهای ریاضی که در آینده شکل خواهند گرفت می‌دانند. پس شهودگرا تنها با منطق ریاضی یا منطق ریاضیاتی سر و کار دارد. هر چند شهودگرایان سیستم‌های صوری نیز می‌سازند، اما آن را فاریاضی نمی‌دانند. بلکه نتایج زبانی فعالیت مستقل از زبان تلقی می‌کنند. پس منطق شهودگرایان یک زیر مجموعه‌ای از منطق کلاسیک است.

در واقع مطرح کردن این که ریاضیات پیشینی است، توسط کانت رگه‌هایی از شهودگرایی براوئری را نیز در خود دارد. شهودگرایی براوئر بسیار نزدیک‌تر به ایده‌های کانت است تا صورت‌گرایی هیلبرت. فراموش نکنید که کانت برای اینکه جایی برای بی‌نهایت، ایمان دینی و مانند آن در فلسفه خود باز کند، قائل شد به این که ذهن می‌تواند مفاهیمی که از تجربه نیامده‌اند انتزاع کند. با این شرط که این انتزاع به وجود نیاورد. این ایده بسیار شبیه شهود براوئری است، اما نقدهایی که در برابر تفکر دینی و تجربیات عرفانی و علوم لدنی به عنوان علم تجربی قرار می‌گیرد، برشهود براوئری هم تعلق می‌گیرد. شهودگرایان به خاطر تأکید برساختار گرایی، برهان خلف را نیز نمی‌پذیرند. با این کار استدلال‌هایی را که بی‌نهایت مرحله دارند از ریاضیات خارج می‌کنند.

نقد ریاضیات به عنوان ساختارهای شهودی

هم صورت‌گرای فاریاضی‌دان و هم ریاضی‌دان شهودگرا اعتقاد دارند که گزاره‌های آنان منطق محسوب نمی‌شوند. آن‌ها ساختاری را می‌سازند و سپس توصیف می‌کنند. ساختارهای صورتگرایان در دنیای فیزیکی ممکن هستند، اما شهودگرایان تنها در محیط ذهن خود ساختارسازی می‌کنند. از دید شهودگرایان یک ساختار ریاضی یک

تجربه درونی بدیهی و روشن است و از تجربه خارجی نتیجه نمی‌شود. چنین تجربه‌ای درونی باید برای همه در دسترس باشد. تجربیات درونی خاص هرگز علم مدرن را تشکیل نمی‌دهد. بعلاوه بداهت و روشنی تجربه، باید در ذات آن باشد نه بسته به تجربه گر. اگر دو گزارش در مورد تجربیات درونی متناقض باشند، این تجربه‌ها نمی‌توانند بدیهی باشند. شاید کسی بگوید هرگز دو نفر نمی‌توانند دقیقاً یک تجربه درونی مشترک یا بداهت و روشنی آن، دو نفر اختلاف نظرداشته باشند.

مثلاً تجربه هندسی اقلیدسی را کانت پیشینی می‌داند و لذا بدیهی و روشن، اما به خاطر وجود هندسه‌های نااقلیدسی، براوئر این تجربه را بدیهی و روشن نمی‌داند. با وجود اینکه شهودگرایی ادعا می‌کند که امنیت را برای ریاضیات به ارمغان می‌آورد، اما ما را در وضعیتی قرار می‌دهد که هر لحظه ممکن است این اختلاف نظرها در مورد بداهت و روشنی ساختارهای شهودی پیش بیاید. البته می‌توان فرض کرد که ساختارهای شهودی حاضر را می‌توان توسعه داد و سازگاری این توسعه را به ثبوت رسانید. با این کار ریاضیات شهودگرا حفظ شده، اما فلسفه شهودگرا نابود گردیده است. گویی این‌ها صورت‌گرایانی هستندکه به روشی غیر هیلبرت صورت‌گرایی می‌کنند. برای اینکه خطر اختلاف نظر در بداهت و روشنی از بین برود، می‌توان به دنبال محکی برای بداهت گشت، اما این با غرض شهودگرایان تناقض دارد. چرا که انجام ریاضیات باید یک تلاش بدون زبان و بدون منطق باشد.

بادید شهود گرایی، دو امکان برای ریاضیات کاربردی وجود دارد. یکی این که به ریاضیات محض بپیوندد و دیگری اینکه بپذیریم ریاضی کاربردی غیر خالص، تجربی، و قابل انحراف است و قضایای آن بر شهود بدیهی و روشن یا ساختارها بنا نشده‌اند. اولین حالت دیدگاه کانت است و دیگری دیدگاه هرمان وایل. فراموش نکنید که کانت دلیلی منطقی برای کار آمدی ریاضیات در درک پدیده‌های طبیعی دارد. توجه کنید که کانت مکانیک سماوی را پیشینی می‌داند، همان طور که هندسه اقلیدسی را پیشینی می‌دانست.

از دیدگاه و ایل ریاضیات شهودگرا بسیار باریک‌تر از آن است که به فیزیک خدمت کند. پس او ادعای یگانگی تفکر پیشینی کانت را به کناری می‌نهد. در برابر می‌گوید که ریاضیات باید واقع‌گرا باشد و بنابر نیازهای فیزیک تولید کند. وایل ریاضیات کاربردی را شامل ریاضی– فیزیک می‌دید. تعدد ساختارهای ریاضی فیزیکدانان به آنان اجازه نمی‌داد مبانی ریاضی کارخود را دقیق کند و این باعث شد وایل ریاضیات کاربردی را ریاضیاتی با استاندارد پایین بداند. وایل هم کمکی به فلسفه‌ی ریاضیات کاربردی نکرد.

براوئر اعتقاد دارد دنباله‌های نامتناهی، تنها نامتناهی باالقوه هستند که هرگز به کار می‌آیند. او ریاضیات فرامتناهی هیلبرت را غلط می‌داند چرا که از ریاضیات صدق می‌خواهد نه صحت. بسیاری بدون اعتقاد به مباین فلسفی براوئر به مسائل ریاضی شهودگرایان علاقه‌مندند و این ادامه یک جریان را تضمین می‌کند.

ریاضیات به عنوان علم جریان‌های مفهومی

هر چند فلسفه‌های منطق گرا، صورت‌گرا و شهودگرا رفته رفته طرفداران خود را از دست دادند، اما شاخه‌های ریاضی وابسته یعنی منطق، ریاضیات صورت‌گرا و ریاضیات شهودگرا به حیات خود ادامه دادند. عملاً هم می‌بینیم بسیاری از این ریاضی‌دانان دغدغه‌های فلسفی ندارند. پس چرا این شاخه‌ها به حیات خود ادامه می‌دهند؟

شاید بتوان گفت، یک تئوری از یک هسته اصلی که از دریافت‌های تجربی می‌آیند تشکیل می‌شود و سپس ساختارهای شهودی و ایده‌آل‌های سازگار به آن هسته اصلی اضافه می‌شوند. آنچه منجر می‌شود یک شاخه به حیات خود ادامه دهد، ساختار مفهومی و جریان‌های مفهومی آن است که به حیات خود ادامه می‌دهند. اگر بخواهیم در آراء فیلسوفان در مورد این که مفهوم ریاضی چیست غوطه‌ور شویم، دوباره در چاه فلسفه افتاده‌ایم. ریاضیات محض ریاضیاتی است که از مفاهیم دقیق تشکیل شده، در صورتی که دریافت‌های تجربی مفاهیم نادقیقی را شکل می‌دهند. این ما را به یاد تز کانت که ریاضیات پیشینی است می‌اندازد.

مسئله قضایای وجودی و یاضیات ساختنی هم به همان اضافات سازگاری که به هسته‌ی اصلی یک تئوری می‌پیوندند باز می‌گردد. توسعه نظریات به وسیله‌ی شهود، که خواه ناخواه ذاتی ریاضی‌دانان است، جایی برای اصرار بر ساختارگرایی باز نمی‌گذارد.

در ریاضیات کاربردی مفاهیم دقیق و نادقیق تجربی در کنار هم آمده‌اند. طبیعت ارتباط بین این دو نوع مفهوم چیست؟ مثلاً در فیزیک، هندسه را برای فرمول‌بندی گرانش به کار می‌بریم. چگونه این دو مفهوم در کنار هم می‌آیند؟ ابتدا با مفاهیم فیزیکی چنان رفتار می‌کنیم که گویی مفاهیم دقیق ریاضی هستند و سپس سعی می‌کنیم ساختارهای دقیق ریاضی بسازیم که همان رفتار را از خود نشان دهند. مثلاً تانسور به خاطر نیازهای فیزیکی تعریف شد و انتظاراتی محاسباتی از تانسورها تعیین گردید. سپس ریاضی‌دانان فرمول‌بندی ریاضی دقیقی برای آن ساختند. برای دقیق کردن یک ساختار مفهومی، کافیست ساختار مفهومی دقیقی بسازند که بر ساختار قبلی قابل انطباق است.

پس روش کار این است که مفاهیم تجربی را با مفاهیم دقیق ریاضی جایگزین می‌کنیم، سپس تئوری دقیق ریاضی را به کمک استانداردهای ریاضیات محض توسعه می‌دهیم و نتایج به دست آمده را دوباره به زبان مفاهیم تجربی که نادقیق‌اند ترجمه می‌کنیم. به همین دلیل است که فیزیکدانان تعبیر فیزیکی بسیاری از محاسبات خود را نمی‌دانند، اما نتیجه محاسبات را به‌راحتی می‌توانند به زبان فیزیک ترجمه کنند.

اگر ادامه حیات شاخه‌های ریاضیات مستقل از فلسفه است، پس فلسفه به چه کار می‌آید؟ آیا نقش فلسفه، ساختن تئوری‌های جدید است و نه ساختن قضایای جدید؟ تئوری‌سازان به طور جدی تحت تأثیر فرضیات، دیدگاه‌ها، و تعصبات فیلسوفان قرار دارند. هرچند فیلسوفان این فرضیات دیدگاه‌ها و تعصبات را از ریاضیات کلاسیک برگرفته‌اند، اما اختلاف نظرها و شباهت‌های بسیاری بین نظرات آنان یافت می‌شود که هر یک به نوبه خود بر ریاضی‌دانان تأثیر گزارند. تفکر فلسفی ریاضی‌دانان، به علاوه می‌تواند در حل مسئله به ایشان کمک کند. یک

فیلسوف بهتر می‌تواند روند تفکر خود را از بیرون مشاهده و هدایت کند. اما این کاربردهای فلسفه معمولاً پنهانی صورت می‌پذیرد.

ریشه‌های شکوفایی ریاضیات در قرن بیستم

شکوفایی ریاضیات در اوائل قرن بیستم از طرفی ریشه در ساختار علم و شکل‌گیری ساختارهای اجتماعی حامی آن در قرون ۱۷ تا ۱۹ دارد. و از طرفی تنوع دیدگاه‌های فلسفی که هر کدام در ابعاد خاصی از توسعه‌ی ریاضیات موفقیت به دست آوردند. از طرفی تعداد ریاضی‌دانان به یک حد بحرانی رسید که مسائلی که عصر حل آن‌ها رسیده بود، بالاخره توسط یک ریاضی‌دان با یک مدرسه و مکتب حل می‌شدند و منتظر ظهور نابغه‌ای نمی‌ماندند. ساختارهای اجتماعی مناسبی برای هدایت جریان ریاضیات تعبیه شده بود. از جمله کنگره بین المللی ریاضی‌دانان که هر چهار سال تشکیل می‌شد و تاکنون ادامه پیدا کرده است.

آزادی اندیشه در دانشگاه‌ها اجازه داد دیسیپلین‌های مختلفی در دانشگاه‌ها متولد شدند و بتوانند به حیات خود ادامه دهند. آموزش دبیرستانی در اروپا چنان پیشرفت کرد که استعدادهای ریاضی ساده‌تر شناخته می‌شدند و به مسیر طبیعی تکامل استعدادهایشان هدایت می‌شدند. شکوفایی ریاضی به شکوفایی بسیاری از شاخه‌های علمی دیگر همراه بود و منجر شد که بسیاری از کاربردهای ریاضی در علوم دیگر که بسیار تعیین کننده بودند و منجر به توسعه ریاضیات نیز شدند، کشف گردند. موفقیت‌های علمی، سر انجام چنان در فرهنگ اروپایی تأثیر گذاشت که روشنفکران به علم پرستی روی آوردند.

کتاب «جهان بینی علمی» راسل سرشار از تند روی‌هایی است که در آن عصر، روشنفکران به آن دچار شده بودند. مردم سعادت بشری را در پیشرفت علمی می‌دیدند و از دین رویگردان می‌شدند تا اینکه افسردگی ناشی از جنگ جهانی مردم را ناامید کرد و به فلسفه‌های پوچ‌گرا سوق داد.

ریاضی‌دانان محض

از لحاظ فرهنگی، ریاضی‌دانان اوایل قرن بیستم را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد که با چهار فرهنگ مختلف به فعالیت ریاضی خود می‌پرداختند. مسلماً می توان ریاضی‌دانانی پیدا کرد که در دو یا چند دیسیپلین فعالیت داشته باشند، اما فرهنگ هر یک از این دیسیپلین‌ها ایجاب کرد که تحقیقات ریاضی‌دانان در هریک چنان باشد که مورد قبول جامعه علمی آن دیسیپلین قرار گیرد.

از همه پرطرفدارتر، ریاضی‌دانان محض بودند که ادامه طبیعی ریاضی‌دانان محض قرن ۱۹ محسوب می‌شوند. روش علمی ایشان تحت تأثیر جامعه بزرگشان به سوی حل مسئله گرایش داشت تا تئوری پردازی. چراکه جلب نظر

جامعه علمی به یک تئوری جدید برای عده‌ی کمی از هدایت کنندگان و پیش‌کسوتان ممکن بود و ریاضی‌دانان ترجیح می‌دادند با حل مسائلی که مورد توجه جامعه‌ی ریاضی بود، اعتبار بیابند و سپس به تئوری پردازی مشغول شوند. ولی در ریاضیات قرن ۱۹ تئوری پردازی و حل مسئله در کنار هم اهمیت داشتند.

با وجود اینکه ریاضی‌دانان بسیاردانی وجود داشتند، رفته‌رفته هر یک از شاخه‌های ریاضیات محض فرهنگ مقاله‌نویسی و حل مسئله خاصی را پیش گرفتند و رفته‌رفته از دیدگاه سبک حل مسئله نیز از یکدیگر مستقل شدند. هرچند هنوز هم ازدواج زیر شاخه‌ها منجر به شکل‌گیری شاخه‌های جدید می‌شد که به زودی پا می‌گرفتند و ریاضی‌دانان جوان را به خود مشغول می‌کردند. چرا که شانس ریاضی‌دانان جوان در کسب اعتبار به وسیله‌ی تحقیقاتی که مورد توجه بود، اما هنوز مد نشده بود بیشتر بود.

ریاضی‌دان کاربردی

ریاضی‌دانان کاربردی نیز از قرن نوزدهم سنت‌های تحقیقی محکمی را شکل داده بودند. ریاضی– فیزیک را به دلایلی که بعداً توضیح خواهیم داد جزو این دسته قرار نمی‌دهیم. البته فرهنگ علمی ریاضی‌فیزیکدانان با ریاضی‌دانان کابردی تفاوت‌های جدی دارد.

ریاضی‌دانان کاربردی هر چند به مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی می‌پرداختند، اما تئوری‌سازی نمی‌کردند. بلکه تئوری‌های موجود را در صنعت، مهندسی، شیمی و مانند آن به کار می‌بردند. توسعه‌ی روش‌های عددی از تحفه‌های این دیسیپلین است که تئوری‌های ریاضی را فقط با تقریب خاصی مورد استفاده قرار می‌دهد. این دیسیپلین از جهاتی مانند کار کردن با مفاهیم نادقیق و دایره اطلاعات گسترده در مورد تئوری‌های ریاضی با ریاضی‌فیزیکدانان شباهت دارند.

ریاضی‌دانان کاربردی، برخلاف ریاضی‌دانان محض، اشخاصی عمل‌گرا، واقع‌بین و غیرفلسفی هستند و ریاضیات را ابزاری برای خدمت به علوم دیگر و در نهایت خدمت به بشریت برای زندگی بهتر می‌دانند. به هیچ وجه تحت تأثیر تفکرات افلاطونی قرار نمی‌گیرند و حرفه‌ی خود را با متافیزیک مرتبط نمی‌دانند. این ریاضی‌دانان به مهندسانی توانا مانند ارشمیدس بیشتر شباهت دارند تا به فیلسوفانی مانند افلاطون و ارسطو. همچنین ریاضیات را چون ریاضی‌دانان محض، هنر نمی‌دانند و با جنبه‌های زیبا شناسانه آن نیز بیگانه‌اند. با این حال ریاضیات کاربردی خدمات شایانی به توسعه‌ی ریاضیات محض ارائه کرده است.

ریاضی– فیزیکدانان

ریاضی– فیزیکدانان در اوایل قرن ۲۰ به عنوان یک دیسیپلین جداگانه از ریاضیات کاربردی قد علم کردند. دیسیپلین جدید از وقتی شکل گرفت که پس از مدل‌سازی مسئله فیزیکی، توسعه تئوریک ریاضیات مربوطه، مستقل از ارتباط با مسئله فیزیکی، منجر به درک بهتر پدیده‌ی مورد مطالعه می‌شد. به عبارت دقیق‌تر ریاضی– فیزیکدانان نیازمند تئوری‌سازی بودند و از این لحاظ به ریاضی‌دانان محض نزدیک بودند.

فرهنگ عدم دقت ساختارهای ریاضی که در ریاضی– فیزیک ساخته می‌شدند، از پیشینه‌ی نزدیکی این ریاضی‌دانان با ریاضی‌دانان کاربردی تأثیر می‌پذیرفت. اما نیاز به کار تئوریک کم‌کم منجر شد که ریاضی– فیزیکدانان، تئوری پردازان قهاری شوند که به دلیل کثرت تئوری‌های خود وقت نمی‌کنند مبانی ریاضی آن‌ها را محکم کنند. کم‌کم تحقیقات ریاضی– فیزیک سرچشمه‌ی پرآبی برای ایده‌های جدید در ریاضیات محض گردید. در بسیاری از شاخه‌ها، مسائل فیزیکی نقش هدایت کننده‌ای داشت. به این دلیل ریاضی– فیزیک تبدیل به شاخه‌ای شد که در آن ریاضی‌دانان مراتب کمال را سریع‌تر از ریاضیات محض طی کردند. هر چند ریسک قبول تئوری‌های ارائه شده بالا بود. به این دلیل بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ در کنار تحقیقات ریاضی محض خود به ریاضی– فیزیک هم می‌پرداختند و این منجر به اغنای این دیسیپلین تازه شکل گرفته شد. ریاضی فیزیک دانان، عادت خوب ریاضی‌دانان کاربردی را حفظ کردند و ارتباط با ریاضی‌دانان محض را یک اصل غیر قابل حذف در دیسیپلین خود قرار دارند که منجر به ریاضی– فیزیک جدید شد.

منطق‌دانان

منطق شاخه‌ای جدید از ریاضیات محض است که در اوایل قرن ۲۰ شکل گرفت. از نظر دقت ریاضی به ریاضی محض نزدیک بلکه قوی‌تر است. منطق‌دانان در اوایل شکل‌گیری این رشته در جامعه علمی پذیرش نداشتند. براوئر ناچار شد مقالاتی در توپولوژی دیفرانسیل چاپ کند تا شغل دانشگاهی خود را محکم کند و سپس به ارائه‌ی تئوری‌های خود بپردازد. شاگردان هیلبرت تحت نفوذ او مورد پذیرش قرار گرفتند و راسل نیز که یک فیلسوف بود، نیازی به پذیرش جامعه‌ی ریاضی نداشت. بلکه او بود که فرگه را به دیگران معرفی کرد و تئوری منطقی او را به جامعه ریاضی شناساند.

منطق از طرفی به مبانی ریاضیات و فلسفه نزدیک است و از طرفی به کاربرد، به خصوص در عصر کامپیوتر. همه‌ی منطق‌دانان به ریشه‌ها و ثمرات توجه ندارند و بسیاری به تحقیقات در منطق محض می‌پردازند و از سؤالات فلسفی مهم بی‌اطلاعند و از کاربرد چیزی نمی‌دانند. منطق محض رفته‌رفته به شکل یک شاخه از ریاضیات محض در آمد و فلسفه‌ی منطق به فلسفه‌ی ریاضیات پیوست. رفته‌رفته بسیاری از مسائل مهم ریاضی با روش‌های منطقی حل شدند و منطق، زیر شاخه‌های محض دیگری پیدا کرد. با این حال، امروزه هم منطق به عنوان یک دیسیپلین که دغدغه‌های مبانی دارد قابل تشخیص است.

کسانی هستند که منطق را فاریاضی می‌دانند و این دیسیپلین را جزو دیسیپلین‌های ریاضی حساب نمی‌کنند. هرچند با ارتباطاتی که در نیمه‌ی دوم قرن ۲۰ پیدا شده این دیدگاه دیگر بستری برای پذیرش پیدا نمی‌کند.

شاخه‌های ریاضیات در اوایل قرن بیستم

ریاضیات قرن ۱۹ به سه شاخه‌ی اصلی آنالیز، جبر و هندسه که به طور مستقل مبانی خود را تحکیم می‌کردند، تقسیم می‌شد. این سه شاخه در قرن بیستم هریک چندین زیر شاخه پیدا کردند که در همین سه جریان قرار می‌گیرند. به علاوه چندین شاخه ی مرزی این سه رود خانه بزرگ را پیوند می‌دهند.

هندسه شاهد ظهور نظریه‌های خمینه‌ها، هندسه‌ی دیفرانسیل، توپولوژی، توپولوژی دیفرانسیل، توپولوژی جبری، هندسه‌ی جبری، سیستم‌های دینامیکی، نسبیت خاص و عام و مانند آن بود. جبر شاهد ظهور نظریه‌ی جبری اعداد، نظریه میدان‌ها، نظریه‌ی حلقه‌ها، نظریه‌ی گالوا، جبر خطی، نظریه‌ی گروه‌های متناهی، نظریه‌ی گروه‌ها و جبرهای لی، نظریه‌ی نمایش، تئوری ناورداها، نظریه‌ی جبرهای شرکت پذیر، و مانندآن در خود این رودخانه بود. آنالیز شاهد ظهور آنالیز تابعی، حسابان پیشرفته، آنالیزهارمونیک، نظریه‌ی احتمال، حساب تغییرات، نظریه‌ی کوانتوم، آنالیز مختلط، معادلات دیفرانسیل، و مانند آن بود.

تعداد شاخه‌های بین این سه دیسیپلین مختلف بسیار زیاد است، اما هرکدام به‌زودی به‌روی پا ایستادند و به سؤالات درون رشته‌ای خود پرداختند. پیچیدگی سیستم اطلاعاتی این رشته‌ها منجر شد به اینکه، کم‌کم هر دانشگاهی روی یک سری از این شاخه‌ها تمرکز کند و استادانی که بتوانند با هم ارتباط علمی در آن رشته‌ها برقرار کنند، استخدام نماید. این منجر به ظهور مکاتب ریاضی مختلف در قرن بیستم گردید.

ریاضیات در خدمت چه کسی است؟

سؤال کلیدی اینکه، این بنای عظیم علم در ربع اول قرن بیستم، در خدمت چه کسی بود؟ در خدمت رفاه اجتماعی، فرهنگ جامعه، حکومت‌ها، سرمایه داری، ارتباط فرهنگی، افراد با استعداد که خود را راضی نمایند، فرهنگ علمی، توسعه صنایع، رشد تفکر بشری، ساختار دانشگاهی، و یا مثلاً در خدمت خود ریاضیات؟ آنچه مهم است اینکه در این عصر ریاضیات آزاد بود که به هر که می‌خواهد خدمت کند. کسی یا نظامی، تحقیقات علمی در این رشته را تحت فشار قرار نمی‌داد تا بهره‌ی خاصی از آن حاصل نماید. اما در دوران جنگ جهانی و جنگ سرد، ریاضیات در خدمت حکومت‌ها قرار گرفت و به عنوان ابزاری برای کسب قدرت اهمیت یافت.

از اینجا به بعد، دولت‌ها با اهرمِ بودجه‌های تحقیقاتی، بر فرهنگ علمی، مسائل مهم مورد تحقیق، شخصیت ریاضی‌دانان، جو دانشگاه، فلسفه ریاضیات و هر آنچه که ممکن بود آن‌ها را به اهدافشان نزدیک کند، حکومت کردند

و ساختار علم زیبایی عاریت گرفته از علم قرن ۱۹ را به انبار تاریخ باز گرداند. با این حال شاخه‌های ریاضیات محض به حیات خویش ادامه دادند و داستان ریاضیات پرشورتر از همیشه دنبال می‌شد.

فلسفه‌های جدید سعی کردند روند توسعه‌ی ریاضیات را تحت نظام فکری خود مهار کنند، اما هر یک جز به پیچ و خم این رود خانه‌ی وحشی نیافزودند.

فصل ۱۱

ریاضیات سال‌های جنگ جهانی

سال‌های جنگ جهانی عصر پیچیده و درهم گره خورده و تکینه‌ای از دیدگاه فرهنگی، اجتماعی، اقتصادی و سیاسی می‌باشد و برای درک این تکینگی‌ها نیاز به باز گشایی آن در پهنه‌ی وسیع تری از تاریخ هست.

نیمه دوم قرن ۱۸ عصر انقلاب صنعتی در انگلستان و عصر مخاصمه‌ی پادشاهان اروپا برای تشکیل امپراطوری بود. انقلاب کبیر فرانسه منجر به ظهور ناپلئون و امپراطوری غرب اروپا در اوایل قرن ۱۹ شد که در کشورهای فرانسه، ایتالیا، آلمان، اسپانیا اصلاحات مدیریتی و ایدئولوژیک انقلاب کبیر فرانسه را به‌اجرا گذاشت. امپراطوری اتریش Habsburgs و عثمانی از لحاظ فرهنگی از امپراطوری ناپلئون عقب ماند. بریتانیا، روسیه و اتریش نیروهایی بودند که توسعه بیشتر این امپراطوری را مطرح می‌کردند.

قرن ۱۹ عصر انقلاب صنعتی اروپا بود و همچنین عصر مهاجرت اروپاییان به آمریکا. ۱/۷ میلیون از کشورهای اسکاندیناوی، ۴/۱ میلیون از ایرلند ۱۲/۷ میلیون از بریتانیا، ۵ میلیون از آلمان به آمریکا مهاجرت کردند. میلیون‌ها ایتالیایی به آمریکا و آمریکای جنوبی و میلیون‌ها اسپانیایی و پرتغالی به آمریکای جنوبی و بخصوص برزیل و ۱/۵ میلیون فرانسوی به شمال آفریقا مهاجرت کردند. هرکدام از این گروه‌ها، سعی کردند در ناحیه‌ای از دنیا تمدنی جدید به پاکنند. قرن ۱۹ عصر ظهور تفکرات ملی‌گرایانه در اروپا تحت تأثیر انقلاب کبیر فرانسه و تجزیه‌ی اروپا بود. بسیاری از کشورهای اروپای شرقی در آن طرف مرزهای امپراطوری عثمانی در قرن ۱۹ شکل گرفتند. آلمان و ایتالیا هریک برای اتحاد ملی مبارزه کردند. قرن ۱۹ بود که عصر توسعه‌ی آمریکا به سمت غرب بود. نیمه غربی آمریکا در نیمه دوم قرن ۱۹ به طور جدی مسکونی شد. سپس جنگ‌های شمال و جنوب آمریکا رخ داد که سرآخر موجب رشد اقتصادی آمریکا شد.

ربع اول قرن بیستم سال‌های شکل‌گیری و استحکام ساختار سیاسی و اجتماعی آمریکا و سال‌های توسعه‌ی انقلاب صنعتی از اروپا به کل جهان بود. امپراطوری عثمانی که تحت تأثیر امواج استقلال طلبانه در قرن ۱۹ ضعیف شده بود، در ربع اول قرن بیستم با انقلاب روشنفکران ترک مواجه شد. از آنجا که ترکیه به طرفداری آلمان وارد جنگ جهانی شد، پس از جنگ تحت کنترل فرانسه و انگلیس قرار گرفت. امپراطوری عثمانی شامل رومانی، بلغارستان، یونان، آلبانی، ترکیه، سوریه، عراق، فلسطین، قسمت‌های کلیدی عربستان، مصر، لیبی، تونس و الجزایر می‌شد.

امپرا طوری روسیه نیز که در سراسر قرن ۱۹ به توسعه و مدرن‌سازی خود مشغول بود، در ربع اول قرن بیستم دوچار امواج انقلاب شد که پس از جنگ جهانی اول به ظهور روسیه کمونیست منجر شد. امپراطوری چین هم که در نیمه‌ی دوم قرن ۱۹ در برابر جنبش‌های استقلال اسلامی ضعیف شده بود، در ربع اول قرن ۲۰ تحت فشار ژاپن و سپس کمونیسم برچیده شد. شبه قاره هند تا ۱۹۳۵ بریتانیایی‌ها را تغذیه می‌کرد. ۱۸۸۰ تا ۱۹۱۳ اصل تجزیه

آفریقا تحت نظر کشورهای اروپایی بود. این سال‌های توسعه و مدرن‌سازی ژاپن و همچنین سال‌های شکل‌گیری نیوزلند و استرالیا بود. آمریکا دراین سال‌ها به یک قدرت جهانی تبدیل شد. عصر جنگ جهانی، پس از تنش شدید چند دهه‌ای تلاش‌های ضد استعمار پدید آمد که در برابر عصر استعمار یعنی قرن ۱۹ شکل گرفته بود. جنگ جهانی اول ۱۹۱۷-۱۹۱۴ موجب از هم پاشی سه امپراطوری عثمانی، اتریش و روسیه تزاری بود. در ۱۹۱۴ به شکل یک جنگ اروپایی و در ۱۹۱۷ تبدیل به یک جنگ جهانی شد و نمایانگر ظهور عصر سیاست جهانی و افول عصر سیاست اروپایی بود. عصر جدید، عصر تمدن جهانی بود.

اتحاد علمی اروپا

نمی توان گفت جنگ جهانی ریشه اقتصادی داشته است. شکل‌گیری اقتصاد جهانی در ربع قرن قبل ازجنگ اتفاق افتاد. سرمایه‌گزاری خارجی انگلستان، فرانسه. آلمان مقام‌های اول تا سوم را در ۱۹۱۴ احراز کرده بود که بین هر دو رتبه متوالی تا دو برابر اختلاف بود. سپس هلند، آمریکا بلژیک و روسیه قرار داشتند. در سال‌های بین دو جنگ جهانی، روسیه مشغول انقلاب مارکسیت و شکل‌گیری و استحکام نظام جدیدی بود که در سراسر دنیا خطری برای تفکر سرمایه داری محسوب می‌شد.

عصر استعمار ادامه داشت. از برمه تا هند و پاکستان بعلاوه مصر و عراق و عربستان جنوبی تحت استعمار انگلیس، کشورهای اتیوپی و لیبی تحت استعمار ایتالیا، کشورهای الجزایر و هند و چین تحت استعمار فرانسه و قسمتی از هند و چین تحت استعمار آلمان بود. از ۱۹۱۹ تا ۱۹۴۱ اروپا تحت فشارهای نهضت‌های ضد استعماری بود. انقلاب چین، آن را به روسیه کمونیسم پیوند داد و کمونیسم نیروی دیگری بود که اروپا راتحت فشار قرار داده بود اروپا سراسر درگیر پیمان‌های صلحی بود که سعی داشت بر ساختار سیاسی منطقه تأثیر بگذارد. تا اینکه سر انجام آلمان نازی جنگ جهانی دوم را آغاز کرد.

مشکلات اقتصادی در ۱۹۲۹ موجب سقوط بازار بورس گردید و ۱۰ سال فشار اقتصادی به اروپا تحمیل شد. دلائل این رکود را می‌توان چنین بیان کرد: جنگ جهانی اول موجب افزایش تولید به خصوص در بیرون اروپا شد، اما تقاضا متقابلاً افزایش نیافت. در سطح جهانی بین صنعت و کشاورزی عدم تعادل وجود داشت و منافع اقتصادی بیشتر به کشورهای صنعتی سرازیر می‌شد. افزایش تولید موجب کاهش قیمت مواد خام و غذا شد و وضعیت اقتصاد کشورهایی که بر مبنای صادرات مواد خام و غذا استوار شده بود، رو به وخامت گذاشت. با این حال حقوق کارگران از سود تبعیت می‌کرد و این اجازه ظهور بازارهای محلی و صنایع جدید را نمی‌داد.

قوانین تبدیل ارز ثابت قبل از جنگ، تبدیل به ارز رقابتی وابسته به طلا شد و هرگز پایداری لازم برای بازسازی اقتصاد جهانی فراهم نشد. سرمایه‌ها به آمریکا سرازیر شد و ثروت شکننده‌ی اروپایی از دست رفت. هرچند آمریکا نیز شاهد رکود اقتصادی بود.

دهه ۱۹۳۰ شاهد حمله ژاپن به کشورهای اطراف به منظور توسعه اقتصادی نیز بود. اختلاف موضع گیری‌های سیاسی کشورهای اروپایی، موجب تضعیف انگلستان و فرانسه و مشکلات سیاسی بین این دو کشور و ایتالیا شد و این طراز قدرت را به نفع آلمان تغییر داد. جنگ جهانی دوم در واقع یک جنگ اروپایی به همراه یک جنگ آسیایی در آسیا و اقیانوس آرام بود.

پس از ۱۹۱۴ سال‌های آرامش اروپا هرگز باز نگشت. مرزهایی که جوانان اروپایی به راحتی از آن عبور می‌کردند تا در هر دانشگاهی که بخواهند و با هر استادی که دوست داشته باشند به علم اندوزی بپردازند، تبدیل به مرزهای صلبی شد که جابجایی دانشمدان و دانشجویان را دشوار می‌کرد. محققان طراز اول ناچار بودند به بنیه‌ی علمی مؤسسات خود تکیه کنند تا بر ارتباطات علمی با دانشمندان سایر کشورهای اروپایی. اوضاع آشفته اقتصادی اروپا مزید بر علت شد تا دانشمندان به کشوری مهاجرت کنند که در آن بتوانند به راحتی باهم قطاران خود ارتباط داشته باشند. پس اتحاد علمی دانشمندان اروپایی پیش از جنگ جهانی، از دلائل مهم مهاجرت دانشمندان به آمریکا بود. اروپای بین دوجنگ جهانی دیگر توانایی حمایت از ساختارهای علمی سنتی اروپا را نداشت. پس از جنگ جهانی اول همه منتظر بودند تا آرامش قرن ۱۹ به اروپا باز گردد، اما هرچه زمان بیشتر می‌گذشت، مردم می‌دانستند که به قرن جدیدی پا گذاشته‌اند.

جریان تعمیم و مجردسازی

سؤال اینکه در سال‌های پر تشنج جنگ جهانی، چگونه ریاضیات به حیات خود ادامه داد؟ در حالی که ساختارهای اجتماعی حامل علم یا ضعیف شده بودند و یا جهت گیری‌های غیر علمی داشتند و در حالی که محققان با مشکلات اقتصادی دست به گریبان بودند و دانشجویان حمایت مالی نمی‌شدند، و با وجود بسته شدن مرزها، چرا این همه موجب رکود علمی در رشته ریاضیات نگردید؟ چرا همه شاخه‌های مختلف ریاضیات داستان تکامل خود را دنبال کردند و از تکاپو باز نایستادند؟

حیات شاخه‌های مختلف ریاضیات به جز سرچشمه‌ها باید پیوسته آن را سیراب کنند و ارتباط با شاخه‌های همسایه در تئوری‌پردازی و حل‌مسئله، توسط جریان مهارتی تعمیم و مجردسازی تضمین می‌گردد. تحت این جریان، شاخه‌های علمی می‌توانند با حمایت موضعی یک دانشگاه یا مؤسسه تحقیقاتی خاص به حیات خود استمرار بخشند. در سراسر قرن۱۷و۱۸ همین جریان بود که موجب ادامه حیات ریاضیات شد. چرا که ساختارهای اجتماعی حامی علم همه در قرن ۱۹ قوت گرفت و پیش از آن دانشگاه‌ها فقط برای آموزشی متعلمین تلاش می‌کردند و مؤسسان تحقیق و آکادمی‌های علوم توسط پادشاهان حمایت می‌شدند. رمز ادامه‌ی حیات ریاضیات در طول تاریخ، نیاز به آن در کاربردهای روزمره بود که حیات هسته‌ی اصلی ریاضیات را تأمین می‌کرد و سپس جریان تعمیم و مجردسازی بود که توسعه هسته اصلی را تضمین می‌کرد. به این روش، ریاضیات می‌توانست در سخت‌ترین شرایط اجتماعی به حیات خود ادامه دهد و نسل‌به‌نسل به عنوان یک دستاورد بشری انتقال یابد.

شاید بتوان گفت، جریان تعمیم و مجردسازی، جدی‌تر از همیشه در قرن بیستم دنبال شد. مثلاً در آنالیز قرن ۱۹ به دنبال تعریف دقیق پیوستگی در اعداد حقیقی و مختلط بودند. فرشه در ربع اول قرن ۲۰ توجه کرد که پیوستگی به ساختار جبری C,IR ربطی ندارد و فقط به مفهوم نزدیکی بستگی دارد که منجر به تعریف فضای توپولوژی توسط هاوسدورف در سال ۱۹۱۴ شد. و یا امیل‌بورل، بیگ، فاتو، یونگ در ۱۸۹۰ تا ۱۹۱۰ نظریه‌ی انتگرال را به نظریه‌ی اندازه توسعه دادند. نظریه فوریه که به توابع انتگرال پذیر روی دایره مربوط بود، به گروه‌های کلاسیک تعمیم داده شد. ریس، فرشه و هیلبرت آنالیز توابع روی یک فضا را به فضای هیلبرت و سر انجام باناخ به فضای باناخ تعمیم دادند. جبر مدرن هراه با تعاریف اصل موضوعه‌ای گروه، حلقه، میدان، فضای برداری در اوایل قرن ۲۰ پایه‌گذاری شد. کولموگورف نظریه اندازه را به احتمال مربوط کرد و تئوری مدرن احتمال را پایه‌ریزی کرد. پوانکاره هندسه خمینه‌ها، توپولوژی جبری و نظریه‌ی هموتوپی را بنیان‌گذاری کرد که از ایده‌های ریمان سرچشمه می‌گرفته و سپس کارتان پیشرفت‌های آنالیز و نظریه‌ی گروه‌های لی را با نظریه خمینه‌ها مربوط کرد. هندسه جبری روی میدان دل‌خواه فرمول‌بندی شد و سر انجام منجر به هندسه جبری روی حلقه‌ها در اواسط قرن ۲۰ گردید.

در سال‌های بین دو جنگ جهانی، اتفاقات مهمی در ریاضیات اروپا افتاد. از جمله، نظریه‌ی گودل در ۱۹۳۱، نظریه احتمال کلوموگورف در ۱۹۳۳، نظریه رسته‌ها در ۱۹۴۲ که توسط آیلنبرگ و مکلین پایه‌گذاری شد و نظریه گلفاند در ۱۹۴۰ که منجر به هندسه جبری روی حلقه‌ها گردید.

مؤسسات آموزشی و پژوهشی تأثیرگذار در اروپا

میراث قرن ۱۹ مکتب ریاضیات فرانسه، انگلیس، آلمان، ایتالیا، روسیه و دانشگاه‌های پراکنده در سایر کشورهای اروپایی بود. هلند و لهستان، نروژ و مجارستان، رومانی، و سوئیس دانشگاه‌هایی داشتند که تازه پا گرفته بودند و سنت قرن نوزدهمی رهبران ریاضیات در اروپا را پشت سر نداشتند.

در فرانسه‌ی قرن ۱۹ اکثر ریاضی‌دانان توانا در پاریس جمع شده بودند. در انگلستان، کمبریج و آکسفورد، و در آلمان، برلین و گوتیگن، در ایتالیا، دانشگاه پیزا، در روسیه مسکو و سن‌پطرزبورگ مراکز ریاضی مهم محسوب می‌شوند. در ربع قرن اول بیستم، دانشگاه‌های معروف در سراسر اروپا توسعه یافته بودند. تقریباً در تمام شهرهای بزرگ دپارتمان ریاضی فعالی وجود داشت و در این میان چندین دانشگاه موفق به کسب اعتبار بالایی شده بودند. کشورهای مجارستان رومانی، سوئیس، نروژ، هلند لهستان هریک صاحب سبکی در ریاضیات بودند. در کشور آلمان، چندین انجمن ریاضی در شهرهای مختلف فعالیت می‌کردند. کنگره‌های بین المللی ریاضیات، مسائل مطرح در ریاضیات را با قدرت جهت دهی می‌کرد. جامعه ریاضیات، تبدیل به یک امپراطوری بزرگ علمی شده بود که رهبران شناخته شده‌ای داشت. هیلبرت در آلمان، پوانکاره و الی کارتان در فرانسه، سگره و مکتبش در ایتالیا، هاردی در انگلستان، گولموگورف در روسیه رهبران کاریزماتیک ریاضیات عصر جدید بودند که ریاضیات عصر انقلاب صنعتی را

به ریاضیات سال‌های جنگ جهانی تحویل دادند. نسل بعدی رهبران علمی به آمریکا مهاجرت کردند یا در روسیه کمونیست به سر می‌بردند.

قدیمی‌ترین انجمن‌های ریاضی انجمن ریاضی مسکو ۱۸۶۴ و انجمن ریاضی لندن ۱۸۷۷ بودند. انجمن ریاضی آمریکا ۱۸۸۸ و انجمن ریاضی کانادا تنها در ۱۹۴۵ تشکیل شدند. مجلات مهم فرانسوی *Journaldel'EcoleNormaleSuperieure*، *Journaldel'Ecolepolytechnique* از قرن ۱۹ چاپ می‌شدند. *Journal fur die reineund angewrandte Mathematik* در ۱۸۲۶ درآلمان توسط کرله چاپ شد. در ایتالیا Annali di scienze matematiche e fisiche ۱۸۵۰ انجمن ریاضی مسکو Matemateicheskii sbornik را در ۱۸۶۶ و در سوئد Acta Mathematica در ۱۸۸۱ چاپ شد. The American Journal of mathematics در ۱۸۸۱ در جانزهاپکینز چاپ شد. تا پایان قرن ۱۹ در تمام کشورهای اروپایی، به علاوه ژاپن و آمریکای شمالی مجلات تخصصی ریاضی چاپ می‌شد. در اکثر کشورهای اروپایی تا پایان نیمه اول قرن ۲۰ زنان اجازه‌ی دریافت درجه‌ی دکترا یا احراز پست استادی در دانشگاه‌ها را نداشتند. اگر هم در بعضی موارد چنین اجازه‌ای می‌یافتند، باید چندین سال برای ترقی سمت خود زحمت می‌کشیدند. نمونه آن امی‌نوتر که ۴۰ سال زحمت کشید تا پستی را احراز کند که اگر مرد بود، به سادگی در ۲۰ سالگی آن را به دست می‌آورد.

آمریکا پس از پایان جنگ‌های داخلی در ۱۸۶۵ توسعه آکادمیک خود راشروع کرد. به دلیل تولیدات بیش از نیاز ریاضی‌دانان در اروپا، چندین ریاضی‌دان شغل خود راپس از چند سال به مشاغل غیر دانشگاهی عوض می‌کردند و چندین ریاضی‌دان اروپایی نیز در اواخر قرن ۱۹ و اویل قرن ۲۰ به آمریکا مهاجرت کردند.

ریاضیات در روسیه‌ی کمونیست

ریاضیات در روسیه داستانی غیر از اروپا داشت. پس از انقلاب اکتبر ۱۹۱۷ حزب کمونیست تصمیماتی در باب حمایت اقشار مستضعف جامعه گرفت. از جمله دانشگاه‌ها برای تمام طبقات اجتماعی در دسترس بود. آکادمی علوم، استقلال خودرا اندکی بیشتر حفظ کرد. اولین حمله‌ی کمونیست رئیس انجمن ریاضی روسیه Egorov را نشانه گرفت. او را مجبور به استعفا از تمام مسئولیت‌های خود کردند. Egorov که مسیحی ارتدکس بود تحت فشار دانشجویان کمونیست که با تفکر دینی مخالفت داشتند، قرار گرفت. او در جلسات مجمع عمومی به خرابکاری متهم شد، ولی او درجواب گفت: خرابکاری واقعی تحمیل یک جهانبینی از پیش تعیین شده به دانشمندان است. او را به اردوگاه کار اجباری فرستادند. اما او اعتصاب غذا کرد و جان باخت. مقایسه‌ی زندگی نامه‌ی Egorov در دایره‌المعارف‌های قبل و بعد از فروپاشی روسیه بسیار آموزنده است. Luzin شاگرد Egorov جا پای او گذاشت. او تحت تأثیر نفوذ ریاضی‌دانان، فیزیکدان و فیلسوف بزرگ Florenski تز خود را در مورد«ایده ناپیوستگی به عنوان مؤلفه‌ای از جهان بینی کمونیستی» نوشت. اوپس از مدتی کشیش شد و مورد حمله‌ی کمونیست‌ها قرار گرفت. در ۱۹۳۳ اوو Florenski به ده سال کار اجباری محکوم شدند. Florenski را وادار کردند اعتراف کند که رهبر یک

تشکیلات مربوط به حزب نازی در روسیه است. اورا مجبور کردند Luzin را هم به عنوان عضو معرفی کند. اما چون Luzin محقق برجسته‌ای بود و دوستان فراوانی در آلمان و فرانسه داشت، حزب کمونیست او را تا ۱۹۳۶ رها کرد تا داستانی برای او ترتیب دهند و اورا دشمن نظام فرض کنند. اما به خاطر حمایت انجمن ریاضی و دوستان خارجیش از این تله نجات یافت.

باوجود چنین شرایطی در روسیه، ریاضی‌دانان روسی درصد بالایی از ریاضی‌دانان طراز اول دنیا را برای ۵۰ سال تشکیل می‌دادند. جالب آنکه دانشجویان Luzin نقش بسیار مهمی در این میان ایفا کردند. ریاضی‌دانان یهودی در روسیه سال‌ها از بی‌عدالتی رنج می‌بردند تا اینکه پس از فروپاشی به آمریکا مهاجرت کردند.

بعضی روسیه کمونیست را محکوم می‌کنند که ریاضی‌دانان برجسته را برای تبلیغات داخلی و خارجی خود تشویق می‌کرده است و یا اینکه ریاضیات محض بنابر ایدئولوژی مارکسیست باید طبیعت دیالکتیک خود را نشان دهد تا تفکر مارکسیستی حتی در صحنه تفکر محض نیز اثبات گردد. اما روس‌ها برای پیشرفت در تولید و تکنولوژی به ریاضیات پیشرفته نیاز داشتند و اگر بخواهیم با انصاف باشیم، باید اعتراف کنیم که موفق‌ترین نظام در تربیت استعدادها نظام آموزشی کمونیستی بوده است.

نکته جالب در تحقیقات ریاضی‌دانان روسیه، عدم انتشار تحقیقاتی است که با بودجه‌ی هسته‌ای انجام می‌شده است. محصول این تحقیقات ریاضی که اکثراً ربطی به انرژی هسته‌ای ندارند محرمانه حفظ می‌شد و بسیاری از نتایجی که در نیمه دوم قرن بیستم ثابت شد، صاحبان روسی در بین این تحقیقات محرمانه پیدا می‌کردند. این از نتایج جهان دو قطبی علم تحت تأثیر نظام سیاسی دو قطبی پس از جنگ جهانی بود که به آن خواهیم پرداخت.

ریاضیات در آلمان نازی

آلمان نازی بر خلاف روسیه کمونیست که ایدئولوژی مجرد تری داشت، ایدئولوژی خود را بر پایه اصالت نژاد استوار کرده بود. بنابراین خارج سرزمین آلمان این ایدئولوژی هیچ موافقی نداشت و مجبور به جنگ با نژادهای دیگر شد. رژیم نازی دانشمندان آریایی را حمایت کرد و دیگران را نابود کرد. در برابر، رژیم روسیه‌ی کمونیست، سرمایه داران را به اردوگاهای کار اجباری فرستاد.

دانشگاه‌های آلمان در طی قرن ۱۹ به استاندارد بالایی قابل مقایسه با فرانسه، رسیده بودند. برخلاف دانشگاه‌های انگلیس، دانشگاه‌های آلمان بیشتر بر تحقیق تأکید داشتند تا تدریس و تربیت رهبرانی برای خدمت به عموم. دانشگاه‌های آمریکایی بسیار شبیه دانشگاه‌های انگلیسی بودند، اما پس از جنگ داخلی به سمت دانشگاه‌های آلمانی گرایش پیدا کردند.

ملی‌گرایی جو حاکم بر دانشگاه‌های آلمان در بین دو جنگ جهانی بود. بسیاری از ریاضی‌دانان در همین چارچوب فعالیت می‌کردند تا متفکران آلمانی را در بین متفکران جهان جایگاهی مناسب ببخشند، اما این تفکر به

طور طبیعی جلوی رشد بسیاری از خصال والای انسانی را می‌گرفت. علوم اجتماعی در دانشگاه‌های آلمان مورد بی‌توجهی قرار گرفتند و بر خلاف انگلستان جو عمومی به سمت دموکراسی پیش نمی‌رفت. چنین اوضاعی بود که پذیرای هیتلر شد. هیتلر علاقه‌ای به علوم نداشت، اما به تکنولوژی توجه بسیار داشت. تربیت از دید هیتلر هدفی جز تربیت خدمت گزاران نظام نداشت. طبیعتاً مهم‌ترین درس تاریخ بود اما تاریخ از دید نازی‌ها.

به محض به قدرت رسیدن هیتلر در ۱۹۳۳ انشتین دانشمند یهودی که قبلاً به آمریکا سفر کرده بود، مورد حمله قرار گرفت. انشتین به سوئیس رفت و منتظر بهبود اوضاع شد. به زودی دریافت که متعلقاتش به فروش رفته و برای سرش در آلمان جایزه گذاشتند. آلمان همه‌ی شهروندان را به خدمت نظام فرستاد تا آن‌ها را از غیر آریایی پاک کند. تأثیر اصلی این تصمیمات در دانشگاه‌ها بیرون کردن استادان یهودی بود. دراین عمل دانشجویان که به انجمن دانشجویان آلمانی پیوسته بودند نظام نازی را حمایت کردند. حتی کتاب‌های نوشته شده توسط غیر آریایی‌ها را سوزاندند. اولین استادان یهودی که از کار برکنار شدند ریچارد کورانت و امی نوتر بودند. کورانت و ریاضی‌دانانی نظیر Neugebauer و هرمان وایل و فیزیکدانانی نظیر بورن و Franck تصمیم گرفتند دسته جمعی استعفا دهند. واعتراض خودرا ابراز کنند. Neugebauerیهودی نبود. همین طور هرمان وایل، اما همسر او یهودی بود. بسیاری از متخصصان مانند پلانک، ها یزنبرگ، شرودینگر، Sommerfeld در حمایت او تظاهرات کردند. Kurt friedrichs و Kneser به دولت مرکزی اعتراض کردند. اما کورانت می‌دانست که ناچار باید آلمان را ترک کند. نتیجه‌ی اخلاقی آنکه، به جای آنکه تهاجم فرهنگی غیر خودی‌ها را از بین ببرد، صدمه‌ی غیر قابل جبرانی به تمدن خود زد. مقایسه Mathematische Annalen در سال‌های اوایل قرن بیستم و دهه‌ی ۱۹۳۰ نشان دهنده‌ی این است که چقدر آلمان از دست داده است.

ریاضیات در آمریکای پیش از جنگ جهانی دوم

تا اواخر قرن ۱۹ بیشتر ریاضیاتی که آمریکا انجام می‌شد کاربردی بود. کتاب‌های نجوم و کشتیرانی جزو برنامه‌ی درسی بیشتر دانشگاه‌های آمریکا بود. Benjamin Banneker که دارای آباء آفریقایی بود و Nathaniel Bowditch که پدران اروپایی داشت، رهبران این حرکت ریاضیات کاربردی بودند. در ۱۸۹۳ سومین کنگره‌ی بین المللی ریاضی‌دانان در شیکاگو برگزار شد و کلاین و پوانکاره شخصیت‌های اصلی این مجمع بودند. بعد از پایان جنگ‌های داخلی که بین آمریکا، کانادا و انگلیس ارتباطات محکمی برقرار شد، دانشجویان این دو کشور برای تحصیل به اروپا رفتند. بسیاری به کشور خود برنگشتند، اما راه را برای نسل‌های بعدی باز کردند. در ۱۸۷۶ Johns Hopkins افتتاح شد و Sylvester به این دپارتمان پیوست. و چاپ American Journal of math را آغاز کرد. قبل از آن در هاروارد و میشیگان برنامه‌ی دوره‌ی دکترا وجود داشت، اما بعد از Johns Hopkins کم‌کم دوره‌ی دکترا در دانشگاه‌های آمریکا توسعه یافت. MIT و شیکاگو در اواخر ۱۸۸۰ و در اوایل ۱۸۹۰ مشغول به کار شدند و تا دهه‌ی ۱۹۲۰ آمریکا چندین جوان ریاضی‌دان داشت که در صحنه جهانی شناخته شده بودند. اما موقعیت

برتر آمریکا در نتیجه‌ی مهاجرت‌های دهه‌ی ۳۰و۴۰ از اروپا به آمریکا بود. اما باید خاطر نشان کرد که توسعه ریاضیات در آمریکا به حدی بود که ساختارهای محکمی که قادر به جذب این ریاضی‌دانان باشد را فراهم کرده باشد. از آنجا که اکثر این ریاضی‌دانان مهاجر بودند، سنت قبول دانشجویان خارجی از همان زمان در برنامه‌ی کاربردی دکتری دانشگاه‌ها قرار گرفت تا جریان مهاجرت دانشمندان به آمریکا همواره ادامه پیدا کند.

ریاضیات در خدمت جنگ جهانی دوم

صدماتی که دولت نازی به جامعه علمی خود وارد کرد، درست به اندازه‌ای بود که هیتلر را از دست ساختن بمب اتم دور نگه دارد. در ۱۹۳۹ otto Hahn خدمت‌گزار رژیم نازی، واپاشی اورانیوم تحت فیزیون را ثابت کرد و در ۱۹۴۱ جایزه نوبل را از آن خود کرد. اما آلمان نه متخصصان کافی و نه مواد اولیه لازم را برای ساخت بمب اتم داشت. اتحاد انگلیسی و آمریکایی و به هم پیوستن امکاناتشان منجر شد در ساختن بمب اتم پیشی بگیرند.

تکیه دولت‌های بزرگ بر تحقیقات برای کسب قدرت، منجر شد که دانشمندان و ریاضی‌دانان در مسائل سیاسی مربوط به توسعه علم دخالت کنند. تئوری نسبیت انشتین که منجر به فرمول $E=mc^2$ شده بود، امکان ساختن بمب اتم را پیش‌بینی کرده بود. سال‌های بین دوجنگ جهانی که روسیه و آمریکای مدرن در حال شکل‌گیری بودند، ساختار علمی هر دو کشور را برای مسائل تحقیقاتی جدی آماده کرده بود. پس از کشف otto Hahn دولت‌ها برای کسب برتری اتمی مسابقه گذاشتند. چندین دانشمند فیزیکدان و ریاضی‌دان در لوس‌آلاموس جمع شدند تا ساختن بمب اتم را تحقق ببخشند.

کاربرد ریاضیات در دوران جنگ محدود به بمب اتم نمی‌شد. در رمزنگاری، دریانوردی، هوانوردی، استراتژی‌های نظامی، اقتصاد جنگ، ریاضیات به طور کلان کاربرد داشت. بسیاری از اختراعات نظامی که توسط کشورهای درگیر جنگ انجام می‌شد، تقریباً بر کاربرد سنگین ریاضیات استوار بود. **مهاجرت دانشمندانی آلمانی**

از گوتینگن لاندائو اخراج شد که تا زمان مرگ در آلمان باقی ماند. همچنین Paul Berneys شاگرد لاندائو و کورانت و نوتر اخراج شدند. Lewy شاگرد کورانت به رم و سپس به دانشگاه براون و کالیفرنیا رفت. Busemann شاگرد دیگر او نیز به کالفرنیا رفت. هرمان و ایل به IAS و Neugebauer به براون رفتند. Neugebauer به تاریخ ریاضی تغییر رشته داده در Bonn اقامت گزید. Toeplitz شاگرد هیلبرت در ۱۹۳۳ اخراج شد و به فلسطین رفت. هاوسدورف اجازه یافت که در آلمان باقی بماند اما سرانجام با خانواده‌اش به کمپ برده شد و در آنجا خود کشی کرد ۱۹۴۲. بوخنر از مونیخ به انگلستان و سر انجام به پرینستون رفت. Hartogs مجبور به بازنشستگی شد. در هامبورگ امیل آرتین به پرینستون و زرن Zorn نیز به آمریکا مهاجرت کرد. Baer به فرصت مطالعاتی رفت و هرگز برنگشت. او هم از آمریکا سر در آورد. در برلین، برگمن ابتدا روسیه و سپس به آمریکا رفت. Lowenheim و شور مجبور به باز نشستگی شدند. Breslan رادماخر و Dehn به آمریکا رفتند. از فرانکفورت Hellinger و

Szasz به آمریکا رفتند. در Freiburg، Loewy و ادار به باز نشستگی شد و از Marburg به اورشلیم رفت ۱۹۳۳. زیگل از ۱۹۴۰ تا۱۹۵۱ را در پرنستون گذراند. از توبینگن Reichenbach به ترکیه و سپس آمریکا رفت.

پس از توسعه‌ی قلمرو آلمان دانشمندان بیشتری اروپا را ترک کردند. در ۱۹۳۸ که اتریش بدست آلمان افتاد، وین گودل و Helly را از دست داد. همین طور Karl Menger. وقتی هیتلر به چک اسلاواکی رسید Loerwner از دانشگاه آلمانی در پراک به آمریکا رفت. Cech ازBrno اخراج شد. Kac اوکراین را به سمت Cornell در آمریکا ترک گفت ۱۹۳۸. وقتی لهستان بین آلمان و شوروی تقسیم شد Zygmund در ۱۹۳۹ Vilnius را ترک گفت و شاگرد Marcinkiewicz در زندان‌های روسیه جان باخت.

در برابر ریاضی‌دانان نازی رژیم نازی را حمایت کردند. Teichmuller از آن جمله بود. هیلبرت هرگز نازی‌ها را حمایت نکرد، اما در آلمان باقی ماند. تا ۱۹۴۱ آمریکا سعی کرد خنثی عمل کند و مهاجران را به سختی می‌پذیرفت. بنابراین خیلی از دانشمندان مجبور به ماندن در آلمان بودند. عده‌ی کمی به روسیه رفتند. Cohn– Vossen از Koln به لنینگراد و Fritz برادر Emy Noether به tomsk رفت ؤاما پس از رسیدن نیروهای نازی به روسیه به جرم خیانت و جاسوسی اعدام شد. این آثار نشان می‌دهد که تقریباً تمام دانشمندان بزرگ آلمان را ترک گفتند. آمریکا چندین نفر از مهاجران را پذیرفت، تا جایی که به سختی در دانشگاه‌های آمریکا شغل یافت می‌شد. با این کار آمریکا آینده‌ی علمی خود را بیمه کرد.

مهاجرت دانشمندان اروپایی به آمریکا

بحران‌های اقتصادی دهه‌ی ۳۰ در اروپا از دلایل جدی مهاجرت دانشمندان اروپایی به آمریکا بود. اما نمی‌توان تمام فشارهای بین دوجنگ جهانی و پس از جنگ جهانی را ناشی از دلایل اقتصادی دانست. پس از جنگ اول بسیاری از مرزها تغییر کردند و بسیاری از کشورهای جدید تشکیل شدند. ازجمله فنلاند، استونیا، لاتویا، لیتوانیا، لهستان، چک و اسلاواکی، گسلاوی که همه پس از جنگ اول تشکیل شدند. این تغییرات تعادل قوا را به هم زد و منجر شد که سر آخر پرجمعیت‌ترین و صنعتی‌ترین کشور اروپا همان آلمان شروع کننده جنگ اول باشد.

سیاست داخلی بسیاری از کشورهای اروپایی، در چنین جوی ناپایدار بود. به خصوص در اروپای شرقی مشکلات اقتصادی مردم جدی‌تر بود. حرکت‌های تأثیرگذار سیاست‌ها مانند روسیه کمونیست و ایتالیای فاشیست، اروپا را به شدت لرزاند. به علاوه مشکلات اقتصادی اروپا منجر به شکست و نابودی سیستم اقتصاد آزاد، بلکه موجب شکست مؤسسات سیاسی لیبرال شد. نوبت به دولت‌های دیکتاتور رسید. اما به زودی معلوم شد چنین دولت‌هایی هم قادر به حل مشکلات و باز گرداندن نظم قدیمی نیستند. هنگام آغاز جنگ جهانی دوم، روسیه، آمریکا و آلمان در قدرت تقریباً هم‌رده بودند و این منجر شد که آینده‌ی اروپا تحت تأثیر قدرت‌های خارجی شکل بگیرد. نیروی هوایی آمریکا

در آلمان و نیروی زمینی روسیه موفق به مهار آلمان شدند. پس از جنگ جهانی نیز اروپا تشنجات زیادی را تحمل کرد.

اسپانیا و پرتغال تا ۱۹۷۰ حکومت‌های دیکتاتوری داشتند. در کنفرانس‌های Yalta و Potsdam آمریکا و روسیه و انگلیس مرزهای دنیای جدید را مشخص کردند. آلمان و اتریش تقسیم شدند. شرق و غرب اروپا به سوی دو آینده‌ی کاملاً متفاوت سیر کردند. در غرب دموکراسی و در شرق کمونیسم. در غرب اروپا، با کمک‌های آمریکا بازسازی، به سرعت پیشرفت کرد. شش کشور صاحب ذغال سنگ و آهن جامعه‌ی اقتصادی اروپا را تشکیل دادند. EEC و بعد انگلستان، ایرلند و فنلاند به آن‌ها پیوستند. روند سریع توسعه، ناگهان در ۱۹۷۳ با تشکیل OPEC تقریباً ایستاد و این به علت بالا رفتن قیمت نفت بود که پیش از آن با قیمت بسیار ارزان در اختیار اروپاییان بود. اروپای شرقی نیز رشد اقتصادی قابل توجهی داشت، اما شک‌های فرهنگی کمونیست دانشمندان آنان را بسیار راغب به مهاجرت می‌کرد. هرچند دولت کمونیست این اجازه را نمی‌داد. در ۱۹۹۰ که شوروی فرو پاشید، خیل دانشمندان روسی، اروپا، وآمریکا و حتی دیگر کشورها را فرا گرفت.

بازسازی اروپا کم‌کم سبب شد که دانشگاه‌های اروپا هم رونق بگیرد و دانشمندان اروپایی رغبت پیدا کنند تا در اروپا بمانند و مهاجرت نکنند. اما تا اروپا به این جا رسید، آمریکا بار خود را بسته بود. بر خلاف ربع اول قرن بیستم که بیش از ۹۰ ٪ جوایز نوبل به اروپاییان اختصاص یافت، در سه ربع دیگر بیش از ۹۰٪جوایز نوبل نصیب آمریکاییان شد. بعلاوه تا پیش از اتحاد اقتصادی اروپا در دهه آخر قرن ۲۰ اروپا توانایی مالی پذیرفتن دانشجویان خارجی را نداشت و سیل مغزهای متفکر جوان به سوی آمریکا سرازیر بود. در سال‌های بعد از جنگ، به جز پاریس که مرکز مهم ریاضیات به شمار می‌رفت، سایر شهرهای اروپا افت شدید استانداردهای علمی را تجربه کردند.

بمب اتم و تأثیرات آن بر ساختار اجتماعی علم

برای اولین بار در تاریخ علم، جنگ جهانی باعث شد عده‌ی زیادی از دانشمندان روی یک مسئله تمرکز کنند. تعداد گروه‌های تحقیقاتی چنان زیاد بود که ریاضی‌دان معروف فون فویمان مسئولیت برقراری ارتباط علمی بین این گروه‌ها را به عهده داشت. همین مسئولیت منجر به ایده‌ی ماشین محاسبه‌ی مدرن یعنی کامپیوتر گردید.

این واقعه هم بر سیاست‌گذاری تحقیقاتی در صنعت آمریکا تأثیر گذاشت و منجر به ظهور مؤسسه‌های تحقیقاتی عظیمی خارج از دانشگاه‌ها شد، و هم در مدیریت تحقیقات توسط بودجه در NSF تأثیر گذاشت و منجر به جهت‌گیری کلان تحقیقاتی در آمریکا شد. مسابقات تحقیقاتی این چنین، پس از جنگ جهانی نیز ادامه پیدا کرد. پس از اینکه روسیه اولین سفینه را به فضا فرستاد، آمریکا به تکاپوافتاد تا هر چه سریع‌تر عقب ماندگی خود را جبران کند. این مسابقات تحقیقاتی هم بر فرهنگ تحقیقات و هم بر مدیریت آن تأثیرات تعیین کننده‌ای داشت. کم‌کم در کنار مدیریت زمان، مدیریت اقتصادی هم در دولت و هم در صنعت اهمیت پیداکرد و عصر علم که با شروع

جنگ‌های جهانی پایان یافته بود، جای خود را به عصر سرمایه‌داری داد. که در آن علم در خدمت کسب قدرت بود. این تحولات در ساختار اجتماعی علم، صرفاً در کشورهای آمریکا و روسیه اتفاق افتاد و مبانی جهان دوقطبی علم را فراهم ساخت.

ریاضیات در خدمت قدرت

پس از جنگ جهانی و فرض آن که آمریکا رهبر دموکراسی غربی است، نتایج زیادی در علوم و ریاضیات امریکا داشت. شک‌هایی که به نظام کمونیستی در آمریکا وجود داشت، در دهه ۵۰ منجر به از کار برکنار شدن عده‌ای از استادان دانشگاه در امریکا شد. Struik استاد MIT به خاطر دیدگاه‌های مارکسیستی On leave گذاشته شد. ترس آمریکایی‌ها در اکتبر ۱۹۵۷ که اولین سفینه فضایی روسی به فضا پرتاب شد، بسیار تشدید گردید. در کمتر از ۴ سال اتحاد جماهیر شوروی سفینه‌ای با سر نشین به فضا فرستاد. غرور آمریکایی‌ها چنان جریحه دار شد که بودجه تحقیقاتی علوم به شدت افزایش یافت. و توسعه NSF در دستور کار قرار گرفت. در دهه ۶۰ امکانات مالی بسیاری در دسترس محققین آمریکایی قرار داشت و بسیاری از محققان ریاضی توسط نیروهای مسلح مانند نیروی هوایی و نیروی دریایی حمایت مالی می‌شدند.

این جریان به دو دلیل پایان یافت. یکی جنگ و یتنام و دیگر مخالفت‌های بر علیه آن که اکثراً در دانشگاه‌ها مرکزیت داشت. این مخالفت‌ها دولت را از دانشگاه‌ها ناامید و اندکی نیز بدبین کرد. این یک سؤال جدی برای استادان بود، که آیا درست است از حمایت مالی نیروهای مسلح که چنین جنگی را دنبال می‌کنند برخوردار شوند؟ در مقابل نیروهای مسلح دوست نداشتند از دانشمندانی حمایت مالی کنند که بر علیه فعالیت آن‌ها در دانشگاه مبارزه می‌کنند. دلیل دیگر افول حمایت مالی، بحث فلسفی در اواسط دهه ۶۰ بود که ریاضیات را مورد سؤال قرار می‌داد. از آنجا که ریاضیات علم نیست، چرا باید دولت توسعه آن را مورد حمایت خود قرار دهد؟ رویه‌های ریمانی کمکی به رفتن به ماه نمی‌کند.

سال‌های جنگ سرد

جنگ سرد به سال‌ها قبل از جنگ جهانی باز می‌گشت. اولین اختلاف روسیه و آمریکا بر سر سیاست‌هایشان در کشور چین بود. اما دو عامل مهم همیشه از جنگ بین این دو قدرت جلوگیری می‌کردند. یکی این که هر دو دولت مشغول رفع مشکلات داخلی خود بودند، دیگر اینکه آلمان نازی و امپراطوری ژاپن برای هر دو خطر به شمار می‌رفت و باید بر علیه این دو دشمن متحد می‌شدند. پس از جنگ جهانی کشورهای دیگر از جمله انگلیس چنان ضعیف شده بودند که آمریکا و شوروی تبدیل به دو ابر قدرت شدند. شرایط شدیدتر از قبل از جنگ بود، چون اختلافات این دو دولت تبدیل به اختلافاتی سرتاسری در همه‌ی دنیا شده بود و به علاوه وجود بمب اتم منجر شود به اینکه زندگی

بر روی کره‌ی زمین خاتمه یابد. ابتدا بر سر چین، خاور میانه، و اروپا و سپس بر سر آفریقا، آمریکای لاتین و آسیا اخلافات دو دولت جدی شدند. کشورهای تازه استقلال یافته‌ی خاور میانه سعی کردند طرف هیچ کدام از دو قدرت را نگیرند و این به تشنج سیاست جهانی می‌افزود. سر انجام در ۱۹۶۳ به دلیل اختلاف ایدئولوژیک و مرزی پس از کسب انرژی اتمی توسط چین، اتحاد چین و شوروی از هم گسست و پیمان NATO بیشتر از پیش آنان را تحت فشار قرار داد. در جنگ کره، در جنگ هند و چین و در جنگ افغانستان دو قدرت جهانی به دشمنان دشمن خود کمک کردند. ساختار سیاسی دو قطبی جهان بر ساختار علمی آن نیز تأثیر گذاشت و جهان علم نیز تبدیل به جهانی دوقطبی شد که دانشمندان آن در دو قطب برای پشت سر گذاشتن مرزهای دانش مسابقه گذاشته بودند.

شکوفایی ریاضیات در روسیه

پس از جنگ جهانی، ریاضیات در روسیه و آمریکا هردو به شکوفایی رسید، اما هر کدام تحت فلسفه کاملاً متفاوتی. ریاضی‌دانان روسی همه کمونیست نبودند، اما تفکرات کمونیستی بر روند توسعه ریاضیات در روسیه حکم فرمایی داشت.

ریاضیات عالی در دسترس همگان قرار گرفت و مختص طبقه خاصی نبود. کولموگورف خانه‌های حل مسئله‌ای تأسیس کرد که در آن دانش آموزان دبیرستانی به مباحثه و حل مسائل ریاضی می‌پرداختند. ساختار عظیمی در مدارس سراسر روسیه شکل گرفت که به طور شبکه‌ای برای توسعه ریاضیات و جستجو برای استعدادهای ریاضی فعالیت می‌کرد. چندین مسابقه ریاضی سرتاسری صحنه‌ی رقابت دانش آموزان بود. در نتیجه این تلاش‌ها ریاضی‌دانان روسی همه چیزدان بودند. به جز تئوری‌های مجرد ریاضی، معادلات دیفرانسیل و ارتباط آن با مسائل طبیعی و ریاضی فیزیک را به خوبی می‌دانستند. هدایت تحقیقات علمی در مسکو مرکزیت داشت و تواناترین ریاضی‌دانان در دانشگاه مسکو و انستیتوی استکلو با یکدیگر درباره جهت‌گیری ریاضیات و مسائل مهم آن هم‌فکری می‌کردند.

سطح آموزش دانشگاه‌ها بسیار بالا بود به طوری که ریاضی‌دانان در سنین پایین همه چیزدان می‌شدند. چنین جوی محل ظهور چندین مکتب ریاضی و رقابت‌های جدی درون فرهنگی بود. این همه، تحت فلسفه‌ی کمونیستی در دسترس قرار دادن علم در معرض استفاده همگان ممکن شده بود. بعضی ادعا می‌کنند که تأکید نظام کمونیستی بر ریاضیات جنبه تبلیغاتی هم داشته است. اما در همه صحنه‌های علمی فلسفه آن‌ها موجب ترقی شده بود و این محدود به ریاضیات نمی‌شد. صحیح نیست اگر بگوییم جامعه کمونیستی برای تبلیغات در همه جنبه‌ها از خود رشد و شکوفایی نشان داد.

فلسفه کمونیستی که بر تقابل تز و آنتی‌تز و ارتباط ضدین استوار بود، فلسفه عمیقی است. که به عالم ماده محدود شده است. در واقع فلسفه حرکت جوهری ملاصدرا که حرکت را در تمام لایه‌های تجرید در نظر می‌گیرد

صورت صحیح همین فلسفه است. شکی در این نیست که چنین فلسفه‌ای در شکوفایی علم در روسیه بسیار اهمیت داشته است. و ریاضی‌دانان تولید شده تحت این فلسفه بسیار عمیق‌تر و تواناتر از ریاضی‌دانان آمریکایی هستند که تحت فلسفه‌ای ناشی از نظام سرمایه‌داری تربیت شده‌اند.

در چین نیز که رفته‌رفته ازروسیه کمونیست مستقل شد، همین شاخصه‌های رشد دیده می‌شود. اما در سال‌های اخیر شکوفا شده است. علل عدم شکوفایی هم زمان علم در چین و روسیه و تأخیر آن در چین جدید و شکوفایی آن پس از فروپاشی نظام کمونیستی، مسئله‌ای است که باید به دقت مورد بررسی قرار بگیرد. شاید بتوان گفت فلسفه‌های تائوئیسم وبودایی که خصلت ترکیب شونده با هر فلسفه جدیدی را دارند، عامل عقب نگه داشته شدن چین از نظام کمونیستی روسیه بودند. شاید چین در برابر دنیای مدرن و در تقابل با فلسفه‌ی سرمایه‌داری از سنت‌های دیرینه خود خلاصی یافته و همین عامل موجب تکامل و توسعه علمی و اقتصادی چین امروز شده است. ریاضی‌دانان چین به هیچ وجه به ریاضی‌دانان روسی شباهت ندارند و روشن است که تحت فلسفه متفاوتی تربیت شده‌اند. علی‌الخصوص، مانند مکتب ریاضیات روسیه به ریاضی– فیزیک چندان توجه ندارند.

شکوفایی ریاضیات در آمریکا

ریاضیات در آمریکا کاملاً چیز دیگری بود. سطح ریاضیات در مدارس پایین بود و جامعه علمی بر مغزهای وارداتی تکیه داشت. بعضی مدارس قویتر و بعضی دانشگاه‌های جدی‌تر در آمریکا پیدا می‌شدند اماتوجه به ریاضیات همه گیر نبود.

از آنجا که نظام سرمایه‌داری فلسفه‌ی حاکم بر علم را تعیین می‌کرد، رشد علم بسیار وابسته به بودجه‌های دولتی بود. شاید بتوان گفت NSF بیشتر بر جهت‌گیری علم در آمریکا تأثیر داشته تا ریاضی‌دانان بزرگ آمریکایی. حقوق ریاضی‌دانان بود که تعیین می‌کرد در مراکز بزرگ علمی بمانند یا به دانشگاه‌های کوچکتر بروند. مثلاً همه تلاش می‌کردند تا در دانشگاهی معتبر به تحقیق بپردازند تا بتوانند پیشنهادهای بهتری از سوی دانشگاه‌های کوچک دریافت کنند. و به آن دانشگاه‌ها کوچ نمایند. مسابقات ریاضی پاتنام، در بین دانشجویان استعداد ریاضی را کشف می‌کرد، اما در سطح دبیرستانی در کشف و حمایت استعدادها جدی نبودند. تحقیقات محققان تحت فلسفه‌ی آمریکایی بسیار باریک و یک بعدی بود.

یک متخصص باید هرچه سریع‌تر به تخصص در یک شاخه باریک می‌رسید و در آن مقاله چاپ می‌کرد. تولید مقاله و حجم آن مورد تأکید دانشگاه‌ها بود و این تأکید از نظام سرمایه‌داری سر چشمه می‌گرفت جلوی رشد و عمیق شدن دانسته‌های ریاضی‌دانان را می‌گرفت. اما ریاضیات آمریکا را همواره مغزهای وارداتی نجات می‌دادند و این روند تا امروز هم ادامه دارد. نظام سرمایه‌داری شرایط چاپ چند صد مجله و ارتباط علمی مستقیم ریاضی‌دانان آمریکایی را در این کشور پهناور فراهم نمود که از اهرم‌های مهم شکوفایی ریاضیات در آمریکا محسوب می‌شوند. آمریکا حتی ایده‌های علمی را هم همراه صاحبانشان وارد می‌کند. بسیاری از شاخه‌های ریاضی که در آمریکا شکوفا

شدند از تلاشهای محاسباتی که در مکاتب دیگر کشورها شکل گرفته‌اند، استفاده می‌کنند. می‌توان گفت ریشه‌ی بسیاری از علوم آمریکایی در کشورهای دیگر دنیا قرار گرفته است. رفته‌رفته با ضعیف شدن نظام کمونیستی و قوی‌تر شدن تفکر امپریالیستی آمریکا سراسر دنیا را پهنه بهره‌کشی خود قرار داد. حتی بسیاری از کشورهای اروپایی در نیمه دوم قرن بیستم هم از فرار مغزهایشان شکایت دارند. هنوز هم اقتصاد شکننده‌ی اروپا بر چاپیدن ملت‌هایی که غیر مستقیم تحت استعمارشان قرار دارند استوار است و هنوز هم برتری اقتصادی آمریکا بر اروپا بر حیله‌های سیاسی آمریکاییان در صحنه‌های بین المللی تکیه می زند. بازرگانان آمریکایی به قیمت حیله‌گری موفق‌ترین بازرگانان دنیا هستند و مغزهای مستعد را نیز مانند همه‌ی سرمایه‌های دیگر بشری تجارت می‌کنند. این منجر به عصری شد که در آن علم در خدمت قدرت نیست، بلکه در خدمت سرمایه‌داری است.

رفته‌رفته ریاضی‌دانانی که مانند قرن ۱۹ از روی عشق به دانستن به این حرفه اشتغال دارند کم و کمتر می‌شوند. ریاضی‌دانان دنیای جدید، فرصت طلبانی هستند که به دنبال سرمایه‌ها راه افتاده‌اند و در تفکر علمی خود از منافع صاحبان سرمایه دارشان پیروی می‌کنند. خلاصه آنکه استعمار مادی قرن ۱۹ در قرن ۲۰ به استعمار معنوی تکامل پیداکرد و بسیاری از دانشمندان برده‌های فکری استعمار جهانی شدند. خوشبختانه در عصر اطلاعات، این نظام از هم پاشید.

فصل ۱۲

ریاضیات بحران‌های شناختی پس از جنگ جهانی

اگر سال‌های جنگ سرد را تقابل دو فلسفه و انسان‌شناسی بدانیم، لازم است که به تاریخ فلسفه‌ی قرن بیستم بپردازیم تا ریشه‌های این تقابل را جستجو کنیم. در نیمه دوم قرن ۱۹ جرج بول با دو کتاب «تحلیل ریاضی منطق» ۱۸۴۷ و «قوانین اندیشه» ۱۸۵۴ سعی کرد رؤیای لایبنیتز را زنده کند و عام‌ترین قوانین اندیشه را به زبان جبری بیان نمایند.

فرگه تصمیم گرفت که با فرمول‌بندی حساب آنرا نیز از قید پیوندهای آن با زبان طبیعی برهاند و دستگاهی از نشانه‌های قراردادی برای آن به وجود بیاورد. او در مقاله‌ای به نام «معنا و ارجاع» ۱۸۹۲.

ادعا کرد که باید از یکی گرفتن معنای یک نشانه که یک مفهوم عینی است با تصور ذهنی که با آن نشانه همراه است پرهیز کنیم و بین آن‌ها تمایز قائل شویم. به زبان ریاضی معنای یک قضیه نباید با مرجع استناد آن اشتباه شود. هوسرل در برابر فرگه فنومنولوژی را بنیان‌گذاری می‌کند که در آن تنها واقعیتی که وجود آن بر ماتحمیل می‌شود، فنومن‌هایی است که بر ذهن ما پدیدار می‌شوند. این نوایده‌آلیسم ترنسندنتال یا متعالی است. هدف هورسل این است: چون ریاضیات نمی‌تواند بر پایه منطق استوار شود، بیاییم فلسفه را بر مبانی علمی استوار کنیم.

هوسرل در واقع بر ضد طبیعت‌گرایی و تاریخ‌گرایی پوزیتیویست قد علم می‌کند و علم به ذرات را دوباره مطرح می‌کند. راسل نیز با آزمون‌گرایی منطقی سعی در ترمیم آراء فرگه دارد. راسل از مور الهام می‌گیرد که بر پایه ساخت‌های زبان به ایده‌آلیسم اروپایی حمله می‌کند. این روش، پیام‌آور چرخشی زبان شناختی در اندیشه مدرن است. او به پیروی از فرگه بین معنا و دلالت فرق می‌نهد. هر نامی بیان کننده‌ی «معنای مفهومی» است، در حالی که مفهوم به وجود شئ «دلالت» می‌کند. اواین هستی شناسی افلاطونی را به ریاضیات عرضه می‌کند. راسل از علامت‌گذاری پئانو الهام گرفت تا منطقی ارائه کند که همه چیز را ثبت نماید. سپس پارادوکس راسل کشف می‌شود.

دستگاه منطقی راسل در برابر فکر نگاری فرگه دارای عمق کمتر ولی قابلیت کار بردی بیشتری است. او مجبور است از مبانی آن عقب نشینی کند و بپذیرد که بعضی اصطلاحات یا تعابیر به هیچ شیئ دلالت نمی‌کنند. سرانجام فرمالیسم هیلبرت راه را برای ناتمامیت گودل باز می‌کند که دژ محکم راسل را که به کمک وایتهد ساخت ویران می‌نماید.

راسل پس از جنگ اول به گفته خود او به بیهودگی فرهنگ و ریاکاری اخلاقی پی می‌برد لذا از فیثاغورس رویگردان می‌شود و از فلسفه به سیاست رو می‌کند. سعی می‌کند با روزنامه‌نگاری، ایراد سخنرانی، بحث و مناظره نبرد در راه خرد را پیش گیرد. راسل و هوسرل موفق نشدند فلسفه را وارد صحنه علم کنند و از تأثیر پذیری از وقایع‌اجتماعی مصون بدارند.

بهترین حمله‌ها به راسل توسط وینگنشتاین، شاگرد راسل، به فلسفه راسل وارد شد که سعی کرد ماهیت کار فلسفی را درک کند. طرح و یتگنشتاین این است که ثابت کند مشکلات فلسفی مشکلات کاذب‌اند و از ادراک نادرست منطق زبان سرچشمه می‌گیرند. به عبارت دیگر، فلسفه بر مبانی نوعی سوء تفاهم زبان شناختی پایه‌گذاری شده است. با این کار سعی می‌کند شکاف بین فلسفه و منطق را بیشتر کند. او تئوری توازی اندیشه. زبان را مطرح می‌کند و اینکه تجاوز از قواعد زبان جاری تا چه حد بی‌معناست. به عبارت دیگر، به جز توصیف علمی وضع اشیاء، هیچ گفتار فلسفی امکان پذیر نیست. منطق و ریاضیات هم بیهوده هستند، چون به اشیاء موجود دلالت نمی‌کنند. فلسفه نه موضوع خاص خود رادارد و نه روش خاص خود را. فلسفه نظریه نیست. فقط نوعی فعالیت است. تنها مادی‌گرایی افراطی است که می‌تواند منجر به چنین افکاری شود. تفکری که ریشه‌های آن در تفکر راسل استاد او وجود دارد. شرکت در یک سمینار براوئر در اواخر عمر فلسفه را در نگاه و ینگنشتاین نجات می دهد. دوباره به متافیزیک روی می‌آورد و از حلقه‌ی وین و تفکرات راسلی دوری می‌گزینند.

علم و فرهنگ در اروپا بین دو جنگ جهانی

دیدیم که جنگ جهانی چگونه در آراء راسل و وینگنشتاین تحولاتی را به وجود آورد. فلسفه‌های بین دو جنگ جهانی فلسفه‌های «پایان» بود. از آنجا که مذاکره کنندگان قرارداد ورسای نتوانستند پایه‌های یک صلح با دوام را بگذارند، پوچی و بیهودگی کشتارهای جنگ جهانی اول اثری بسیار ماندگار داشت. این تأثر فلسفی بر فلسفه، هنر و روانشناسی این عصر تأثیر گذاشت. کتاب «روانشناسی جمعی و تحلیل من» فروید زاده‌ی این عصر است. در فلسفه، نه تنها بعضی فیلسوفان نتوانستند درباره‌ی وسوسه‌های مبارزه جویانه «میهن دوستی »در طول جنگ مقاومت کنند، بلکه هیچ فیلسوفی نتوانست این فاجعه را پیشگویی کند یا از آن درس‌های روشنی بگیرد.

کاسیرر شاگرد هرمان کوهن، پس از آشنایی با هیلبرت، کتاب «فلسفه صور نمادین» خود را نوشت و از سری فیلسوفانی بود که سعی کردند روشنگری عقلی دوران بیداری را بدون تزلزل ادامه دهند و زیر پرچم فنومنولوژی یا نمودشناسی دور نمای فلسفه در اروپا را شکل دادند. «کوکب رستگاری» روزنتسوایگ و «هستی و زمان» هایدگر بهترین کارهای بیانگر بحران درگذار آلمان هستند. این دو اثر به زودی جنبش «اگزیستانسیالیسم» را پایه‌گذاری کردند. این دو اثر برفلسفه هگل تکیه دارند که به خوبی پیش‌بینی کرده بود که حرکت تاریخی سرشتی دیالکتیکی دارد. روزنتسوایگ سعی در رد فلسفه هگل دارد که فقط جنگ را توجیه می‌کند. او از فلسفه مسیحی به بنیادهای فلسفه یهودی گرایش پیدا می‌کند. امابا صهیونیسم مخالف است، تا مبادا مردم یهود درگیر ملی‌گرایی و تلاش برای حفظ آن شوند. هرمان کوهن نیز «مذهب عقل بر پایه‌ی سرچشمه‌های یهودیت» را نوشت.

در برابر هایدگر از بنیادهای نمودگرایی فاصله می‌گیرد تا بنیادهای فعالیت فلسفی را زیر سوال ببرد. هایدگر فلسفه‌اش را بر انسان شناسی بنا می‌کند و زمان را به عنوان افق درک هستی می‌شناسد. متاثر از هگل و بر پایه درس هوسرل «نمود شناسی آگاهی درونی زمان»۱۹۰۵ زمان شناسی کانت را طور دیگری می‌سازد.

در روسیه ماتریالیسم مارکس به معنای پذیرش تقدم علم بر فلسفه و عمل بر فکر است و اینکه نباید وقت صرف انتقاد از فیلسوفان کرد و باید همه‌ی نیروها بر دگرگون کردن جامعه متمرکز شود، حرکت دیگری به سوی پایان فلسفه شکل گرفته است. مارکس، دیالکتیک هگلی را به اصطلاح واژگون می‌کند تا آن را بر پایه‌هایش استوار نماید. انگلس کار مشکلی کرد و آن اینکه از انبوه نظرات مارکس فلسفه‌ای بیرون کشید. اما مارکس اثر خود را گذاشت و آن تسلیم نقش فلسفه به جامعه شناسی بود. نوعی سوسیالیسم علمی که مصممانه جبرگرا، طبیعت‌گرا و داروینی است. لنین، تفکر مارکس را چنین تعبیر می‌کند که همه چیز سیاسی است و ارزش اندیشه‌ها در به ثمر رساندن استراتژی انقلابی سنجیده می‌شود. لنین همان قدر ریشه در مارکس دارد که او در هگل و هگل در کانت. بعد از جنگ دوم رفته‌رفته جامعه شناسی علم در فلسفه علم نیز جای خود را باز می‌کند.

پایان متافیزیک از دیگر پایان‌های فلسفی این عصر است. حلقه وین سعی می‌کند با مجموعه‌ای از علوم موجود جای متافیزیک را پر کند. چرا که متافیزیک خود نمی‌تواند علمی شود. این مکتب پوزیتیویسم نام دارد. حلقه وین به دنبال رویای لایبنیتز در جست‌وجوی زبانی جهان شمولند که به محض ترجمه‌ی یک مسئله به آن زبان جوابی قطعی برای آن پیدا شود. ایشان سعی می‌کنند با آزمون‌گرایی از کانت فاصله بگیرند. این حلقه تحت تأثیر ماخ به وجود آمد که از متافیزیک رویگردان بود. همان کسی که ظهور نسبیت به طور فلسفی و امدار اوست. او اصل علیت را قبول ندارد. این فلسفه به شدت با متافیزیک نزدیک است و بسیاری از سردمداران آن فیزیکدان هم هستند. گودل که او هم ریاضی– فیزیک‌دان است، در این مکتب تربیت می‌شود. کارناپ و رایشنباخ دراین مکتب، هدف مشترک جانشینی روش علمی و فاداربه منطق و اجبارهای تجربه، به جای نظر و رزی فلسفی را دنبال می‌کنند. پس از تحقیقات کارناپ است که حلقه و ین رسماً شکل می‌گیرد و بیانیه معروفش را می دهد. سابقه‌ی این بیانیه، سندی است که ماخ، انشتین، فروید و هیلبرت در حمایت فلسفه‌ی پوزیتیویسم امضاء می‌کنند. پوپر کسی است که کارناپ را سرنگون می‌کند.

تأثیرات فلسفی جنگ جهانی

تفکرات پزیتیویست سرانجام نه تنها منجر به پایان متافیزیک نمی‌شود، بلکه طرح کانت مبنی بر ایجاد نوعی فلسفه‌ی علمی که در راه علم گام بردارد، ولی از عرصه علم متمایز بماند را به موفقیت نزدیک می‌کند. کل این حرکت منجر به فلسفه‌ی تحلیلی می‌شود که بر پایه چرخش زبان شناختی استوار است. فلسفه‌های مربوط به زبان شناسی به خاطر طبیعت ریاضیات به سادگی قابل ارائه به ریاضیات هستند و ریاضیات مدل خوبی برای محک گذاشتن صدق آن‌هاست. اما پس از جنگ جهانی دیگر ریاضیات «بلکه علم» نقش کلیدی خود در فلسفه را از دست داده است. عصر علم‌گرایی پایان یافته است. دیگر کسی باور ندارد جهان بینی علمی بشر را به سعادت خواهد رساند.

اعلام یکی شدن اتریش و آلمان در ۱۹۳۸ زنگ خطری بود که کسانی چون فروید و شرودینگر را مصمم به ترک اتریش کرد. مهاجرت مشابهی از پنج سال پیش در آلمان آغاز شده بود. ۱۹۳۳ همان سالی است که هایدگر به

ریاست دانشگاه فریبورگ در می‌آید و به عضویت حزب ناسیونال سوسیالیست می‌رسد. نقش فلسفی هایدگر این است که نقش بنیادگذاری علم را از فلسفه می‌گیرد و به اندیشه می‌دهد. دیدگاه‌های فلسفی او که به بن‌بست می‌خورد و کتاب هستی و زمان را ناتمام می‌گذارد، اعلام رسمی پایان عصر فلسفه در دیدگاه اوست. از نظر هایدگر، روسیه و آمریکا از نظر متافیزیکی هردو یک چیزند. هر دو به یک اندازه نمودار جنون تکنیک افسار گسسته‌اند. هایدگر به علم، تکنیک و پیشرفت پشت می‌کند. اخلاق را غیر ممکن می‌داند. هایدگر نماد بسیار روشنی است از این که جنگ جهانی دوم بر آلمان اشغالگر چه تأثیری گذاشته است.

کسانی که از اردوگاه‌های مرگ نازی‌ها جان به در بردند وضع دیگری داشتند. حقیقت این است که بیشتر فیلسوفان در ۱۹۴۵ فعالیت‌های عادی خود را سر می‌گیرند. فیلسوفان انگشت شماری استثناء هستند. از جمله ژان پل سارتر که در ۱۹۴۶ «تفکراتی در باب مسئله یهود» را می‌نویسد و نشان می‌دهد که تفکرات ضد یهودی در اروپا ریشه‌دار بوده است.

یک حقیقت تاریخی است که سازمان‌های یهودی خارج از کنترل نازی‌ها خیلی زود توانسته‌اند در سوئیس و ایالات متحده خبر راه حل نهایی هیتلر در برابر قوم یهود را به جهان برسانند. نه حکومت آمریکا و نه دیگر دولت‌های غربی و نه واتیکان در برابر این اطلاعات، عکس‌العملی از خود نشان نمی‌دهند. هیچ برنامه‌ای برای نجات جان یهودیان تدوین نمی‌شود. در ۱۹۴۴ که بمب‌افکن‌های نیروهای هوایی متفقین به آشوییس می‌رسند، تنها هدف‌های صنعتی آن ناحیه را مورد اصابت بمب‌های خود قرار می‌دهند. ارتش سرخ نیز چون به حوالی آشویتس می‌رسد، چند روزی این دست و آن دست می‌کند تا سرانجام تصمیم به محاصره‌ی محل می‌گیرد.

فرانسه به سوی گرایش‌های جامعه شناسانه میل می‌کند تا فلسفی. تأثیر تاریخ در این گرایش‌ها به روشنی نمایان است. فلسفه آلمانی فلسفه شکست است و فلسفه انگلیس به سوی گرایش‌های تحلیلی قدم برمی دارد. اینها هیچ کدام هنوز در قلمرو تأثیرگذاری فلسفه بر جامعه قرار نمی‌گیرند. آنچه مهمترین اتفاقات فلسفی عصر پس از جنگ جهانی است، در روسیه کمونیست و آمریکای امپریالیست اتفاق می‌افتد و نتایج این تحولات فلسفی سراسر جهان و بیش از همه سر نوشت اروپا را تحت تأثیر می‌گذارد.

یهودیان زیر پرچم امپریالیست، ضمن حفظ گرایش‌های قومی خود به علم و فلسفه، ادامه‌ی حیات خود را بر اقتصاد استوار می‌کنند و سعی می‌کنند در ذات ساختار امپریالیستی ریشه بدوانند. در واقع علاقه نژادی یهودیان به مال اندوزی که متأثر از ظلم و ستم آشکار نسبت به ایشان در طول تاریخ است، موجب همرنگی و هماهنگی آنان با نظام امپریالیستی است. به همین دلیل یهودیان روسیه پس از فروپاشی همه به آمریکا مهاجرت می‌کنند.

فلسفه درجهان دو قطبی جنگ سرد

جنگ جهانی با خطر تهدید پایان جهان پایان یافت و آن آغاز جنگی دیگر بود که ۴۴ سال طول کشید. در واقع بمب اتم هدفی جز ضرب شست نشان دادن به روس‌ها نداشت. طی قرارداد نوشته نشده‌ای، ابر قدرت‌ها از جنگ در ناحیه حساس اروپا پرهیز کردند. اما در جاهایی نظیر کره، ویتنام، آفریقا، آمریکای لایتن در گیر شدند و جامعه مصرفی غرب به حیاتش ادامه داد، در حالی که سایر نقاط زمین صحنه رقابت‌های پوچ و بی معنا و گرفتار فقر و دیکتاتوری بودند. فیلسوفان تصمیم گرفتند چشم خود را بر تراژدی ببندند. نمودشناسان و فیلسوفان تحلیلی، تفکر حرفه‌ای خود را از آلوده شدن به تماس با جهان برکنارداشتند. روشنفکران مسئول یک دسته از مدافعان لیبرالیسم غربی بودند مانند پوپر.

پوپر از افکار مارکسیستی شروع می‌کند و سر آخر ضد مارکسیسم و ضد تاریخ‌گرایی می‌شود. به این معنی که قانون تاریخی معنا ندارد. اوسعی می‌کند از اصل عدم قطعیت در فیزیک در این راه بهره بگیرد ۱۹۵۰. پوپر آراء هگل رامشتی قواعد بی‌اعتبار دانست و سنت فلسفه تحلیلی به سرعت از او پیروی کرد.

فیلسوف دیگر، ریمون‌آرون فرانسوی بود که با عقاید سوسیالیستی به شدت مقابله کرد. پوپر و آرون در جنبش‌های ضد سوسیالیست بسیار تأثیرگذار بودند، اما نتوانستند تشخیص بدهند که کمونیسم نباید تهدیدی جدی به شمار می‌رفت.

ژان پل ساتر مدافع آزادی بود و سخنان او چپ و راست همه را می‌آزرد. او در فرانسه چندان شناخته شده نیست که در بیرون فرانسه. در فرانسه اورا نویسنده‌ای بد، فیلسوفی میانه‌حال و آشوبگری نامسئول می‌دانند. فلسفه‌ی هایدگر برای سارتر به دست دادن ساحتی جهان شمول به پیش پا افتاده‌ترین موقعیت‌های زندگی هرروزی است.

بر خلاف سارتر که اعتبار خود ار بین جوانان از دست داده بود، مارکوزه که مانند او در برابر سرمایه‌داری منتقد بود و به سنت دیالکتیکی هگل و مارکس ارادت داشت، به مرجع استناد عمده جوانان در کشورهای غربی تبدیل شد. او نیز تحت تأثیر کتاب هستی و زمان هایدگر قرار گرفت و او نیز مانند سارتر به امکان هم نهادی اگزیستانسیالیسم و مارکسیسم باور داشت. لذا از ۱۹۲۸ تا۱۹۳۲ دستیار هایدگر شد تا سعی کند راهی متمایز با او و مارکسیسم پی بگیرد.

مارکوزه در ۱۹۴۲ در خدمت دستگاه آمریکایی «اداره‌ی خدمات استراتژیک» مأمور می‌شود درباره‌ی جنبش‌های نازی و ضد نازی مطالعه کند. در ۱۹۴۹ در پروژه‌ای آمریکایی به نام «امکانات باالقوه کمونیسم جهانی» شرکت می‌کند. بعدها در برابر سرمایه‌داری نیز قد علم می‌کند. مارکوزه در فلسفه‌اش بسیار محتاط بود. جنبش‌های دانش جویی اروپا و آمریکا در دهه ۶۰ و سرکوب خشن آن‌ها حق را به مارکوزه می‌دهد.

ساتر و مارکوزه بین مارکسیسم و سرمایه‌داری همواره به دنبال راه سوم بودند. از دهه۶۰ به بعد از احزاب کمونیست غربی شاهد نزول رأی‌های خود بودند و این فروپاشی روسیه در ۱۹۸۹ را پیش‌بینی می‌کرد. فیلسوفان تأثیرگذار مارکسیسم مانند آلتوسر به سمت و سوهایی رفتند که تمام اندیشه‌های جاری در درون جنبش کمونیستی بین‌المللی را به هم ریخت. آلتوسر به دنبال قرائتی جدید از مارکس بود. او به‌خوبی در یافته بود که تفسیرهای جاری

از مارکس نیازهای حزب کمونیسم را برآورده نمی‌کند. شکست او در این تلاش فلسفی سر آخر او را به سمت عدم تعادل روحی برد. عدم تعادل او، برای فیلسوفان، دلیلی بر فروپاشی نظام فکری کمونیسم بود. این سؤال مهمی است که پس از فروپاشی، وقتی ترازوی فلسفه یکسره به سوی غرب سنگین شد چه گرایش‌هایی ظهور کردند؟

به مبارزه طلبیدن مبانی ریاضی

دیدم که پیش از جنگ جهانی بسیاری از فلسفه‌ها از فلسفه ریاضی منبعث شده بودند. در واقع، ریاضیات یک آزمایشگاه بزرگ بود که هر فلسفه‌ای را در آن پیاده می‌کردند تا موفقیت آن را محک بزنند. گرایش‌های فلسفه پس از جنگ جهانی در باب در معرض سؤال قرار دادن عقل، در واقع تلاش‌هایی برای به مبارزه طلبیدن مبانی ریاضی نیز بود. چرا که ریاضیات آزمایشگاه عقل شناسی است. در عمل نیز این تلاش‌های فلسفی تأثیر خود را بر مبانی ریاضی و فلسفه‌ی ریاضیات گذاشتند.

سؤال اینکه آیا می‌توان بنیادی استوار برای عقل یافت، یا اینکه برعکس، عقل چیزی جز یک الگوی فرهنگی همچون دیگر الگوهای فرهنگی نیست که فقط برتری نسبی بر الگوهای دیگر دارد یا اصلاً برتری ندارد؟ این بحث در دو میدان علم و سیاست به طور موازی صورت می‌گیرد. در علم سؤال این است که آیا گاهی چیزی درباره‌ی حقیقت به ما می‌آموزد یا جز ساختمانی زبانی نیست که هیچ ربطی با حقیقت ندارد. در سیاست سؤال این است که آیا دموکراسی تنها نظام عقلانی است که هدفش ایجاد عدالت اجتماعی با رعایت دقیق آزادی‌های فردی است و یا اینکه دیگر الگوهای حکومتی نیز هستند که ممکن است به همین خوبی باشند؟

اگر بخواهیم نسبیت‌گرا باشیم، باید قرن بیستم را عصر پشت سر گذاشتن فلسفه بدانیم. یعنی فلسفه را در حد نوعی فعالیت فرهنگی پایین بیاوریم که می‌شود به عنوان امری هنری یا زیبایی شناسانه به آن توجه داشت، ولی سودمندی اجتماعی آن بسیار محدود است. این دیدگاه در برابر عقل از لحاظ آینده بشریت بسیار خطر ناک است. چرا که مایه‌ی سقوط ارزش‌های اخلاقی و سر برآوردن نژاد پرستی خواهد شد.

اگر بخواهیم نسبیت‌گرا باشیم، تاریخ قرن بیستم نه تنها نامنسجم و اساساً منفی نبوده، بلکه به پاره‌ای پیشرفت‌ها هم دست پیداکرده، دیگر مسئله بنیاد ریاضی مسئله‌ای صرفاً ریاضی است و مسئله سرشت ماده یا حیات به حوزه‌ی علوم فیزیکی و زیست شناسی حواله شده است و مسائل شناخت‌شناسی به عهده علم زبان‌شناسی است.

از طرف دیگر اگر بخواهیم مطلق‌گرا باشیم، این سؤال اساسی در برابر ما قرار دارد که چرا پس از فروپاشی کمونیسم مشکلات اصلی بشری همچنان بر سر جای خود باقی است؟ آیا فلسفه در خور رسالتی که همه از آن انتظاردارند هست؟ در حالت خاص آیا علم و علی‌الخصوص ریاضیات نقش هدایت کننده‌ی خود در برابر فرهنگ بشری را به خوبی ایفا می‌کند؟ انتظارات بالایی که بسیاری از علم و علم‌گرایی داشتند و برآورده نشدن این انتظارات که در طی جنگ‌های جهانی اثبات شد بسیاری را به این سمت و سو سوق داده که حتی در مورد ریاضیات

نسبیت‌گرا باشند. این گرایش تأثیرات مهمی بر جنبش‌های آموزش ریاضی و فلسفه ریاضی نیمه دوم قرن بیستم گذاشت. در نتیجه انتظار اجتماعی از توانایی‌های یک ریاضی‌دان چه در عرصه‌ی استانداردهای بالای شناختی و چه در عرصه‌ی فلسفه علم نزول کرد. جامعه علمی به این سمت رفت که ریاضی‌دانان به تکنسین‌هایی تبدیل شوند که مسئله حل می‌کنند و تئوری می‌دهند. دیگر کسی انتظار ندارد یک ریاضی‌دان فردی دانا باشد و فکری سلیم داشته باشد و یا از نظر اخلاقی شخصیتی بی‌آزار و کمال‌گرا داشته باشد. در صورتی که در قرن گذشته شناخت‌شناسی یک ریاضی‌دان و فیلسوف مآبی او چنین نتایجی به دنبال داشته است.

ریاضیات در بستر زبان

پس از اینکه فیلسوفان از تأثیرگذاری بر جهان ناامید شدند، ترجیح دادند که به نگرش جهان از دور سرگرم باشند. در این بین دوجنبش شکل می‌گیرد. اولی سعی می‌کند معنای از دست داده فرهنگ مدرن را از راه «تأویل» باز یابد که آن را تأویل‌گرایی فلسفی می‌نامیم. دومی سعی می‌کند با تحلیل «ساختار» فرایندها طرز کار آن‌ها را روشن نماید، که آن را ساخت‌گرایی علمی می‌نامیم. ایندو شیوه‌ی رقیب در عصر بحران نسبیت‌گرایی اروپا هستند.

هرمنوتیک از واژه یونانی hermenia به معنی تفسیر به روش تفسیر انتقادی متون توراتی اطلاق می‌شد. معنی رایج آن ادراک درونی متن در مقابل تبیین بیرونی است. پس از گادامر هرمنیوتیک به معنای کشف رمز در هر زمینه‌ی علمی و هر تولید فرهنگی است که خود مجموعه‌ای از نشانه‌ها در نظر گرفته می‌شود. معنا پس از جنگ جهانی چنان گم شده که این شاخه از فلسفه در حال تلاش در جست‌وجوی آن است. تاریخ از دیدگاه گادامر خواستگاه انتقال سنن سازنده فرهنگ است، فرهنگی که سهمی از حقیقت را در خود نهفته دارد. این دیدگاه سبب می‌شود وظیفه تأویل فلسفی رفته رفته برادراک متقابل اذهان بشری و تسهیل آن تأکید نماید که سر آخر بر پایه‌ی زبان استوار می‌شود.

پل ریکور فیلسوف دیگری است که تلاش‌های او برای نوسازی در دانشگاه با شکست مواجه شد و اعتصاب دانشجویی فرانسه(۱۹۶۸-۱۹۶۹) منجر به پایان مطلوب اونگشت و سپس به آمریکا مهاجرت کرد و به علوم زبان شناختی علاقه‌مند گردید. وی و گادامر اولین فیلسوفان قاره‌ای بودند که باب گفتگو با فلسفه تحلیلی را گشودند. از نظر ریکور معنای جهان یامعنای زندگانی بدون تردید در فراسوی نشانه‌هایی که بیانگر آن هستند قرار دارد.

جنبش تأویلی فلسفی در برابر ساخت‌گرایی قرار دارد. این جنبش بر پایه تلقی جدیدی از زبان بنا شد که در آن زبان دستگاهی از نشانه‌هایی است که بنا به قواعدی و یژه با هم پیوند دارند. زبان یک کلیت خود فرمان را تشکیل میدهد که فقط تابع خودش است و از ساخت ویژه خودش برخوردار است. بنابراین کار خاص زبان شناس باید تحلیل همین ساخت و یژه‌ی زبانی باشد.

بر خلاف فلسفه‌ی گادامر و ریکور که اجازه معناجویی و فرانگری در علوم و ریاضیات را می‌داد و اجازه تأویل احکام ریاضی و شناخت باطن آنان را صادر می‌کرد، جنبش ساخت‌گرا کل ریاضیات و علوم دیگر را جز ساختارهای زبانی نمی‌دانست. این ساخت‌گرایی صورتی افراطی از فلسفه‌ی صورت‌گرایی هیلبرت بود. صورت‌گرایان سعی داشتند تمام ریاضیات را بر مبنای فرمالیسم بنا کنند اما به حقایق باطنی ریاضی تعرضی نمی‌کردند. در حالی که صورت‌گرایان افراطی ریاضیات را چیزی جز فرمالیسم نمی‌دانستند. همین گرایش منجر شد به فلسفه‌های ساخت‌گرا که کلاً معرفت را پدیده‌ای زبانی می‌دانند و فرای زبان هیچ هویتی برای معرفت و شناخت قائل نیستند. این جنبش مقدمه‌ای است برای حمله به عقل و نهایتاً انکار آن که منجر به پایین آوردن فلسفه در حد یک پدیده‌ی فرهنگی می‌شود.

دیدگاه‌های انسان‌گرای نوین به ریاضیات در نتیجه همین ساخت‌گرایی است که ظهور می‌کند. در این دیدگاه‌ها ریاضیات را جز پدیده‌ای فرهنگی نمی‌بینند؛ دانشی نسبی که که در آن خطا و اشتباه راه دارد.

جنبش ساخت‌گرایی

جنبش ساخت‌گرایی در زبان شناسی از سوسور زبان شناس سوئیسی شروع می‌شود. کتاب «دوره‌ی زبان شناسی عمومی» او ۱۹۱۶ در دوران انقلاب روسیه مورد توجه زبان شناسان روسی قرار گرفت که سعی کردند نظریه‌ای جدید برای ادبیات را به عنوان ساختمان محض مطالعه می‌کند و شعر را نوعی «زبان در زبان». این صورت‌گرایان روسی، تحت تأثیر پیشینه‌ی نژادی اسلاو قرار دارند. او سرانجام از روسیه به چک‌اسلاواکی و سپس به آمریکا می‌رود. در آنجا با چامسکی و الکساندر کویره ملاقات می‌کند و این آینده‌ی ساخت‌گرایی را رقم می‌زند.

کویره یهودی بود و به مسئله پیوندهای بین ایده‌آلیسم آلمانی و عرفان نظری علاقه‌مند بود. او توجه کرد که فلسفه را بدون درک تاریخ علم نمی‌توان فهمید. پس به مطالعه تاریخ و فلسفه‌ی علم پرداخت. او به این نظریه اعتقاد پیداکرد که پیشرفت علمی به شیوه‌ی خطی صورت نمی‌گیرد، بلکه فرایندی است ناپیوسته. زیرا تحت تأثیر «برش»ها و «گسست»هایی است که اغلب براثر مطرح شدن دیدگاه‌های نظری تازه‌ای پیش می‌آیند.

این‌ها نظریات «باشلار» فیلسوف فرانسوی است که توسط کویره به فیزیک و اخترشناسی ارائه شد. از دیدگاه او ریاضی شدن فیزیک توسط گالیله، نه اصلاحی در جزییات است ونه یک نوآوری فنی. بلکه برعکس نوعی انقلاب فکری است که از فضای نامتناهی دکارتی شروع می‌شود. این کار کویره، تأثیری قاطع بر تحقیقات میشل فوکو و توماس کوهن گذاشت. کار دیگر کویره، ارتباط دادن زبان شناسی روسی یا کوبسون و زبان شناسی فرانسوی بود. یاکوبسون پایه‌گذار آواشناسی است که از شاخه‌های بنیادین زبان‌شناسی ساخت‌گرا است. کویره ساخت‌گرایی یاکوبسونی را وارد فلسفه علم کرد.

لوی استراوس مردم‌شناس، پس از برخورد با کویره و یاکوبسون، به فکر می‌افتد که این ایده‌ها را در زمینه مناسبات خویشاوندی در جوامع فاقد خط به کار ببرند و با این کار ایده‌های ساخت‌گرا را وارد جامعه شناسی کرد و منجر به تئوری «انسان شناسی ساختی» او شد که پا فراتر از کاسیرر گذاشته بود.

تلاش‌های لوی استراوس، روانکاو مشهوری چون ژاک لاکان را به ساخت‌گرایی متمایل ساخت. لاکان روش تحلیل ساختارگرایانه رادر روانکاوی به کار می‌برد. از دیگاه او ساخت ناخود آگاه از ساخت ذهنی زبان تأثیر می‌گیرد و این منجر به کتاب بزرگ «تعبیر رؤیاها»ی او می‌شود. سپس به ساخت «عالم روح» می‌پردازد.

در عین این که ساخت‌گرایی در برابر معناگرایی است، اما در واقع، ساختار که مفهومی ریاضی است را به همه علوم انسانی عرضه می‌کند پس می‌توان گفت این جنبش همانند نگاه ساختارشناسانه‌ی یک ریاضی‌دان است که به فلسفه و علوم انسانی توجه می‌کند. می‌بینیم که جنبش ساختارگرایی تحت تسلط و حکومت ریاضیات است، بر خلاف جنبش تأویل فلسفی که در خدمت پیشرفت ریاضیات و تعمیق آن، و همچنین پیشرفت سایر علوم است. پس با وجود خراب شدن بنای فلسفه، هنوز ریاضیات ارتباط تنگاتنگ با داستان شناخت دارد. شناخت شناسی شاخه‌ای است که سعی کرده در نیمه‌ی دوم قرن ۲۰ جای فلسفه را بگیرد.

ساختار اجتماعی انقلاب‌های علمی

میشل فوکو از ساختارگرایی الهام می‌گیرد تا به مفهوم کلی حقیقت حمله نماید. او همفکر باشلار و کویره است که تحول اندیشه جنبه ناپیوسته دارد. اندیشه در هر دوره، زندان شده در محدودیت‌هایی است که از ساختار معین فرهنگ آن دوره بر وی تحمیل می‌شود. برای آنکه تحولی در شیوه‌ی اندیشیدن ما ظهور کند، باید گسستی در شیوه‌ی نگاه ما نسبت به جهان صورت گیرد. فوکو روانکاوی را با دید ساخت‌گرایی آموخت و سپس به سمت فلسفه حرکت کرد. لذا انسان‌شناسی ساخت‌گرای او به کشف عالم درون نزدیک‌تر است تا نظریات لوی‌استراوس. او به «باستان شناسی دانش» می‌پردازد ۱۹۶۹ تا گسست‌های معرفتی آن را امورد بررسی و تحلیل قرار دهد و آن را به زبان تاریخ ناپیوسته بیان نماید. بحث در باره‌ی بنیاد عقل، درباره‌ی توانایی‌ها و آینده اش، به ابتکار فوکو به بحث بنیادین فلسفه‌ی کنونی تبدیل شده است.

باید توجه داشت که پیوند بین نسبیت‌گرایی و تلقی ناپیوسته از تاریخ، پیوندی حتمی نیست. این درسی است که از آثار توماس کوهن می‌توان گرفت که مستقلاً از کویره الهام گرفته است. کوهن یک فیزیکدان بود که در طی تحصیلش به طور تصادفی با تاریخ علم آشنا شده بود. او پس از آشنایی با کویره با باشلار ملاقات کرد و از آن پس مخالف سرسخت نظریات او شد. کوهن در ۱۹۶۲ کتاب «ساخت انقلاب‌های علمی» خود را چاپ کرد که در آن از تاریخ، فلسفه و جامعه شناسی شناخت مایه می‌گیرد.

در نظریه کوهن پیشرفت علمی به صورت جهش تحقق می‌یابد و آن وقتی است که مجموعه‌ای از نظریه‌ها دچار بحران می‌شود و جای خود را به مجموعه‌ی نظری دیگری با سازمان متفاوتی می‌دهد. کوهن از این جهان بینی‌های پیاپی با عنوان پارادایم نام می‌برد. هر پارادایم مرکب از فرضیه‌های نظری عام بعلاوه مجموعه‌ی قوانین و فن آوری‌های لازم برای به کار انداختن آن‌هاست. پارادایم هنجار فعالیت مشروع در هر زمینه‌ی داده شده را تعریف می‌کند. کوهن با اصل بطلان پذیری، که از ایده‌های لاکاتوش، پوپر و کارناپ می‌آمد، مخالف بود و به جای بطلان مفهوم انقلاب علمی را جایگزین کرد. این حمله دیگری به بنیاد عقل بود که به موازات حمله‌ی فوکو صورت گرفت.

کوهن در عینیت عقل تردید دارد، نه در درستی این امر که علم برترین درجه‌ی عقلانیت را تشکیل می‌دهد. او باور دارد که پیشرفت علمی را نمی‌توان فرایندی در نظر گرفت که در طی آن ذهن بشر به سوی حقیقتی از پیش موجود رهنمون می‌کند، چرا که تعریف حقیقت تا حدی تابع زبان و لذا تابع تاریخ است.

روشن است که ایده‌های فوکو و کوهن به طور جدی مبانی ریاضی را سرنگون می کنند. گسست معرفتی باشلار می‌گوید شاید عدم هماهنگی فرمول‌بندی کوانتوم و نسبیت دلایل عمیقی داشته باشد و شاید این دو حوزه معرفتی اساساً جمع پذیر نیستند.

حمله نهایی به عقل

ایده‌های باشلار، کویره، فوکو و کوهن این مشکل را مطرح می‌کرد که شاید در آینده معلوم شود که علم ریاضیات به عنوان یک حوزه‌ی معرفتی سازگار دیگر معنی ندارد. فوکو و کوهن به نوعی منتقد جریان ساختارگرایی محسوب می‌شوند. دریدا فیلسوفی است که حمله را نهایی می‌کند. دریدا با وجود اینکه می‌پذیرد که همه چیز زبان است، به مفهوم متافیزیک «نشانه» نیز حمله می‌کند و آن را نیز حذف می کند. او هر گونه مفهوم یا وجود متعالی‌تر از زبان را منکر می‌شود. جالب این جاست که این دشمن مبانی ریاضی نیز کار خود را با مقدمه‌ای طولانی بر کتاب «خاستگاه هندسه» ۱۹۶۳ شروع کرد. از نظر دریدا خود مفهوم «نظریه» هنوز ریشه در متافیزیک دارد. او به خوبی می‌داند که اگر روشی برای مبارزه تدوین کند، خود آن روش نیز به متافیزیک خواهد پیوست. لذا تمام تلاش خود را صرف شالوده شکنی می‌کند. اندیشه‌های دریدا انقلابی بر ضد عقل است. از خطرات سیاسی اندیشه‌های او این است که مانع اندیشه‌های نژادپرستانه نمی‌شود. این همان زیان همیشگی فرار از عقل است.

رورتی نتایج فلسفی عقاید دریدا را آشکارا بیان نمود. از دید او هر گونه کوششی برای بنیاد نهادن عقل بر پایه‌ای ثابت و مطمئن کوششی موهوم است. رورتی منکر هرگونه ذات دائمی برای عقلانیت است. توجه کنید که رورتی بیست سال در پرینستون درس داده و تفکرات حمله کننده به عقل تا زمان او همه در آمریکا شکل گرفته‌اند. جالب این جاست که بسیاری از این تفکرات ضد عقلانی ریشه‌ی کمونیستی داشته‌اند. بسیاری از این متفکران ابتدا مارکسیست بوده‌اند یا از خانواده‌ای با این پیشینه بر خاسته‌اند.

از دید رورتی این مسئله که آیا قضایای ما حقیقی هستند یانه، آنقدر اهمیت ندارد که توانایی ما در اختراع «واژگان» تازه برای بیان آنچه ما می‌اندیشیم یا احساس می‌کنیم. این همان فکر دریداست که همه چیز زبان است. در فلسفه ریاضی دریدا و رورتی دشمنان ساخت‌گرایی هستند. چرا که ساخت‌گرایی به ساخت‌ها اصالت می‌دهد. ایشان ساختارهای ریاضی را منکر می‌شوند. نه اینکه روش ساختارشناسانه را منکر شوند، بلکه حتی وجود مفهوم ساختار را منکر می‌شوند. علم ریاضی چیزی نیست جز زبان ریاضی. ریاضی‌دان چیزی نیست جز زبان‌شناس. البته زبان شناسی که متخصص یک زبان خاص است و از علم زبان شناسی چیزی نمی‌داند.

تحولات ریاضیات محض

تأکید بیش از اندازه به زبان، جنبه مشترک همه‌ی گرایش‌های فلسفی پس از جنگ جهانی بوده است. چه گرایش‌های تأویل‌گرا و چه گرایش‌های ساخت گرا، فلسفه‌ی خود را بر نوعی زبان شناسی پایه‌گذاری کردند. این تأکیدات بر ریاضیات محض نیز تأثیر کرد. درک بهتر یک تئوری از طریق کشف زبان جدیدی برای آن و تنوع زبان‌هایی که بتوان از یک سری اشیاء ریاضی و قضایای مربوط به آن‌ها صحبت کرد. مورد تأکید قرار گرفت. مثلاً دیکشنری بین دو شاخه ریاضی اولین بار در پایان قرن ۱۹ مطرح شد، اما در نیمه قرن ۲۰ ناگهان شکوفا شد. مثلاً دیکشنری Sullivan بین نقاط حدی گروه‌های کلاینی و مجموعه‌های ژولیا یا دیکشنری VOjta بین نظریه توابع ارتفاع در نظریه اعداد و نظریه Nevanlinna در توزیع مقادیر توابع مختلط از جمله‌ی این تحولات زبانی در ریاضیات هستند. تنوع زبان فرمول‌بندی همه جا آشکار است؛ به خصوص در نظریه اعداد. مثلاً نظریه‌ی فرم‌های مدولار، به زبان توابع مختصات، نمایش‌های بی‌نهایت بعدی گروه‌های لی، نمایش‌های بی‌نهایت بعدی adelic، سری‌های توانی، نمایش‌های گالوایی، L – تابع‌ها، فضاهای مدولی و غیره قابل نمایش هستند. در حل مسائل دشوار تأکید بر جنبه‌های زبان شناسانه در انتخاب استراتژی حمله به مسئله مورد استفاده قرار می‌گرفت. در تئوری‌پردازی باید استانداردهای زبان شناسانه‌ای رعایت می‌شد. نظریه‌ی رسته‌ها مثال خوبی برای این مدعاست.

تحولات ریاضیات کاربردی

برخلاف ریاضیات محض که چندان تحت تأثیر سوسیالیسم یا سرمایه‌داری قرار نگرفت، یا لااقل ریاضی‌دانان این تأثیرات را در تحقیقات خود به نمایش نمی‌گذاشتند، ریاضی کاربردی وضع دیگری داشت.

ریاضیات کاربردی در سراسر جنگ سرد در شرق و غرب در اختیار کسب قدرت و ثروت قرار داشت. هر چند در شرق، قدرت در اختیار قدرت حکومت مرکزی و در غرب، قدرت حکومت مرکزی در اختیار سرمایه داران قرار داشت.

در کنار این خدمت ریاضیات کاربردی، عصر الکترونیک که ناگهان پس از جنگ جهانی به شکوفایی رسید، تحولات خود را مدیون ریاضیات کاربردی و فیزیک کاربردی می‌باشد. رفاه ناشی از این خدمت‌گذاری ریاضیات، در کشورهای پیشرفته مانند اروپای غربی، ژاپن و آمریکا، منجر به تحولاتی در ساختار اجتماعی شد که بسیار سریع‌تر از انقلاب صنعتی به اقصی نقاط جهان انتقال داده شد.

طبق معمول، همیشه مسائل جدید ریاضیات کاربردی، سرچشمه‌ای از ایده‌های نو برای ریاضیات محض محسوب می‌شد و بسیاری از شاخه‌های ریاضی کار بردی مانند رمز نگاری رفته‌رفته به صورت شاخه‌ای مستقل از ریاضی روی پای خود ایستادند و به ریاضیات محض پیوستند.

نقش اجتماعی در جهان علم که توسط ریاضیات محض و کاربردی ایفا می‌شد متفاوت بود و حکومت‌ها نیز به ریاضیات کاربردی اقبال بیشتری داشتند. این سبب شد تا دانشکده‌ی ریاضیات محض و کاربردی در بسیاری از دانشگاه‌ها از هم جدا شوند. چون قرار بود هر یک دانشمندانی با شخصیت‌های متفاوتی تربیت نمایند.

تحولات ریاضی فیزیک

ریاضی– فیزیک به نهایت موفقیت‌های خود رسید. ریاضیات تنها به عنوان یک زبان در اختیار فیزیکدانان قرار گرفت، اما زبانی که بوسیله‌ی آن در جست‌وجوی حقیقت بودند. این نگرش به ریاضیات بسیار موفق بود. فیزیک انرژی‌های بالا بسیار پیشرفت کرد که تاحدی که ذرات بنیادی بسیاری از ابتدا توسط فرمول‌های ریاضی کشف می‌شدند و سپس در آزمایشگاه مشاهده می‌شدند. دیدگاه فیزیکدانان به ریاضیات به عنوان یک زبان موجب شد ریاضی فیزیکدانان در خلق ساختارهای ریاضی بسیاری از ریاضی‌دانان را پشت سر بگذارند. همچنان سرچشمه عظیمی از ایده‌های ریاضیات محض از ریاضی فیزیک سرچشمه می‌گرفت.

عصر الکترونیک در خدمت فیزیک آزمایشگاهی قرار گرفت و آزمایشگاه‌های پیشرفته همچون چراغی روند تحقیقات ریاضی فیزیک را به سوی حقیقت هدایت می‌کرد و این برای ریاضی‌دانان غنیمت بود، چرا که محکی به دستشان می‌دادکه به وسیله آن صحت جهت‌گیری‌های مجرد خود را تخمین بزنند. برای یک فیزیکدان محض افتخار محسوب می‌شد که با داده‌های آزمایشگاهی در ارتباط باشد و برای یک ریاضی‌دان محض افتخار محسوب می‌شد که ریاضی فیزیک بداند. در واقع اکثر ریاضی‌دانان بزرگ روسی که همه‌چیزدان بودند ریاضی‌فیزیک نیز می‌دانستند. در صورتی که ریاضی‌دانان حرفه‌ای در غرب، معمولاً توجه خود را منحصر به قسمتی از ریاضیات می‌کردند. با این همه، تنها قسمتی از ریاضی- فیزیک می‌توانست به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات محض تلقی شود.

تحولات منطق ریاضی

عصر زبان، منطق ریاضی را نیز شکوفا کرد. چرا که با فلسفه منطق بسیار هماهنگ بود. به علاوه تلقی زبان‌شناسانه از ریاضیات منجر شد که بین منطق و ریاضی محض نزدیکی جدی برقرار شود. روش نظریه مدل‌ها در حل بسیاری از مسائل ریاضی محض به کار رفت؛ مسائلی که هنوز هم تنها راه حلی منطقی برای آن‌ها وجود دارد. از جمله مسئله‌ی حدس موردل در حالت میدان توابع روی Fq.

بسیاری از شاخه‌های بین رشته ای، بین منطق و ریاضی محض شکل گرفت. جبر، آنالیز، هندسه و ترکیبات هر یک چندین زیر شاخه‌ی منطقی را پذیرا شدند. این موجب شد که منطق‌دانان که شخصیتی اساساً متفاوت با ریاضی‌دانان داشتند، به راحتی در بین ریاضی‌دانان پذیرفته شوند. ارتباط منطق با فلسفه و همچنین با زبان شناسی از تئوری‌های منطقی الهام می‌گرفتند. شاید بتوان گفت که در قرن بیستم منطق نزدیک‌ترین قسمت ریاضی به فلسفه‌ی محض بود. در مقام دوم، ریاضی-فیزیک قرار داشت که به خاطر نزدیکی با طبیعت همچنان با فلسفه طبیعی مجاورت داشت.

تحولات منطق ریاضی منجر به شکوفایی منطق کاربردی گردید که بار اصلی تأثیر ریاضیات بر ظهور عصر کامپیوتر و ارتباطات و اطلاعات را بر دوش داشت. زبان‌های کامپیوتر هنوز هم از دیدگاه منطقی ارزشمندند و مورد توجه قرار دارند.

فروپاشی کمونیسم و مهاجرت ریاضی‌دانان روسی به آمریکا

بحران «دولت سالاری صنعتی» منجر به فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی شد. روسیه از لحاظ اقتصادی در زمان سومین اقتصاد صنعتی و تنها کشورِ خودکفا از نظر انرژی و مواد خام بود. بعلاوه با بحران بین المللی که جدی‌تر از بحران‌های آمریکا باشد روبرو نبود. فرآیند اصلاحات دوران گرباچف در برابر بحران گذرا به جامعه اطلاعاتی بود که از کنترل خارج شد و بنیان‌های اقتصاد و جامعه شوروی را به‌لرزه در آورد. در نظام دولت سالار روسیه تصرف مازاد اقتصادی جامعه به دست صاحبان قدرت در دستگاه دولتی بود؛ برخلاف نظام سرمایه داران که مازاد در کنترل سازمان‌های اقتصادی است. سرمایه‌داری به دنبال حداکثر سود است و نظام دولت سالار به دنبال حد اکثر دولت. منظور از دولت سالاری صنعتی، نظامی است که در آن عوامل تولید مانند نیروی کار، سرمایه و منابع طبیعی، و نیز استفاده از منابع جدید انرژی، منبع اصلی بهره‌وری هستند. در برابر این نظام‌ها، اطلاعات‌گرایی است که در آن منبع اصلی بهره‌وری، توانایی ترکیب و استفاده‌ی بهینه از عوامل تولید و بر پایه‌ی دانش و اطلاعات است. گذر از صنعت‌گرایی به اطلاعات‌گرایی و از جامعه صنعتی به جامعه شبکه‌ای تفکیک ناپذیر، هم زمان با انقلاب تکنولوژی اطلاعات در ربع آخر قرن بیستم اتفاق افتاد. اصلاح طلبان نظام شوروی که در یافتند جامعه اطلاعاتی نفوذ نخبگان حزبی را کم خواهد کرد، دست به قمار زدند و در برابر مقاومت نخبگان به مردم متوسل شدند. همگام با فروپاشی نظام سیاسی روسیه، نظام علمی آن نیز که بر همان اصول بنا شده بود، به همان دلایل از هم فرو پاشید. این ساختار علمی نیز در برابر ساختار جدید علم در جامعه اطلاعاتی تاب مقاومت نداشت. دانشمندان روسی در نظام جدید علم،

قادر به شکوفایی نبودند. پس از فروپاشی، مسکو که تا زمانی سرشار از چندین سری کنفرانس بود، به دانشگاهی خلوت و بی جنب‌وجوش تبدیل شد. نخبگان علمی هر کدام که می‌توانستند از چنین شرایطی فرار کنند. بسیاری به اروپا و به خصوص فرانسه و آلمان و عده‌ی بیشتری به آمریکا مهاجرت کردند. چنان که ظرفیت دانشگاهای دانش گاه‌های آمریکا به سختی قدرت جذب نیروهای اضافی را داشت و با بحران کمبود شغل برای نسل‌های بعدی ریاضی‌دانان مواجه شد. مهاجرت ریاضی‌دانان به آمریکا محدود به ریاضیدادنان روس نبود. ریاضی‌دانان سراسر دنیا هر کدام که از توانایی قابل توجه در تحقیق برخوردار بودند در برابر وسوسه‌ی مهاجرت به آمریکا قرار داشتند و بسیاری نیز وطن خود را ترک کردند.

با توسعه شبکه اطلاعاتی به سراسر دنیا، روند این مهاجرت‌ها کندتر خواهد شد و جامعه علمی در بسیاری از دانشگاه‌ها به سمت و احدی سوق پیدا خواهد کرد تا با این شبکه جهانی هماهنگ گردد. این که فرهنگ‌های مختلف در برابر این روند جهانی شدن چگونه مقاومت خواهند کرد، موضوعی است که برای پیشگویی آینده‌ی علم باید به آن پاسخ داده شود.

ریاضیات عصر سرمایه‌داری اطلاعاتی

سرمایه‌داری و حکومت آن برجامعه علمی به سوی سرمایه‌داری اطلاعاتی گرایش پیدا کرد. این چنین نبود که سرمایه‌داری در برابر جامعه شبکه‌ای سرنگون شود، بلکه خود را با شرایط جدید و فق داد و به سوی سرمایه‌داری اطلاعاتی پیش رفت که تأثیرات متفاوتی بر جامعه علمی در برابر سرمایه‌داری صنعتی داشت. ظهور نابرابری، قطب بندی اجتماعی، فقر و بی نوایی در بیشتر نقاط جهان نشان می‌دهد، اطلاعات‌گرایی مرزهای مشخصی بین مردم باارزش و بی ارزش ترسیم می‌کند. جهان شناسی به طور گزینشی با شمول و حذف بخش‌هایی از اقتصاد و جوامع به درون یا بیرون از شبکه‌های اطلاعات، ثروت و قدرت همراه است. در برابر جوامع علمی هم همین واقعه رخ می‌دهد. بسیاری از قسمت‌های جامعه‌ی علمی جذب این شبکه هوشمند خواهند شد، در حالی که قسمت‌های دیگری ناجوانمردانه بیرون نگاه داشته می‌شوند. جامعه شبکه‌ای تبدیل به سیاه چاله‌ای می‌شود که با آنکه اعضای آن با یکدیگر در ارتباطند، به لحاظ اجتماعی فرهنگی هیچ رابطه‌ای با جریان اصلی جامعه ندارند. علم دراین شبکه با سرچشمه‌های خود ارتباط نخواهد داشت. بلکه علم تنها ابزاری خواهد بود در خدمت سرمایه‌داری اطلاعاتی، شکوفایی علوم کامپیوتر در ریاضیات و همچنین ریاضیات‌تر کیباتی که مسائل خود را از علوم کامپیوتر می‌گیرد، از علامت‌های ظهور عصر جدید در ریاضیات است. عصری که در آن ریاضیات ابزاری اطلاعاتی بیش نیست.

فصل ۱۳

ریاضیات عصر اطلاعات

انقلاب تکنولوژی اطلاعات، ساختار اجتماعی علم و ریاضیات را هم زمان متحول نمود. تحولی که برخلاف تاریخ اجتماعی علم، با تحولات ساختارشناسانه ریاضیات هدایت نمی‌شود. عصر ارتباطات از نادرصحنه‌هایی در تاریخ است که تاریخ دچار گسست نمی‌شود. چرا که رویدادهای عمده‌ای به سرعت بسیار رخ داده‌اند تا به استقرار دوره‌ی ثابت بعدی کمک کنند. ویژگی بارز انقلاب صنعتی نقش تعیین کننده‌ی علم در پرورش نوآوری بود. ویژگی بارز انقلاب تکنولوژیک اطلاعات، نه محوریت دانش و اطلاعات، بلکه کاربرد این دانش و اطلاعات در تولید دانش و وسایل پردازش و انتقال اطلاعات در یک چرخه بازخورد فزاینده میان نوآوری و کاربرد نوآوری است. چرا این انقلاب با چنین سرعتی شتابان در حال انتشار است؟

تجربه‌ی انقلاب‌های تکنولوژیکی، مانند انقلاب صنعتی اول در نیمه دوم قرن ۱۸ که مشخصه‌ی آن ماشین بخار، ماشین نخ‌ریسی، و به طور خلاصه جایگزینی افزار دستی با ماشین بود و همچنین انقلاب دوم صنعتی که ۱۰۰ سال بعد روی داد و مشخصه‌ی آن اختراع برق، موتورهای درون سوز، شیمی علمی، ریخته‌گری کارآمد فولاد و آغاز تکنولوژی‌های ارتباطی مثل تلگراف و تلفن بود و بر تولید انرژی و توزیع آن تکیه داشت، زیر بنای اقتصادی و اجتماعی انقلاب‌های تکنولوژیک را نمایانگر می‌شود. تحولات سریع‌تر اطلاعات چه دلایلی دارد؟ ابتدا باید متذکر شد که این انقلاب بر به وجود آوردن محیط‌های نوآوری‌بنیان گذاشته شده که در آن نخبگان با پدید آوردن یاد می‌گیرند. برخلاف همیشه که یادگیری بر مبنای استفاده از ابزارهایی که قبلاً پدیده آمده صورت می‌گیرد.

پارادایم تکنولوژی اطلاعات، مجموعه‌ای از نوآوری‌های فنی، سازمانی و مدیریتی به هم پیوسته است، که مزایای آن در طیف جدید محصولات، و عوامل کلیدی آن، کاهش هزینه‌های نسبی و دسترسی همگانی است. در انقلاب‌های تکنولوژی پیشین، تنها اطلاعات بر روی تکنولوژی عمل می‌کرد، اما پارادایم تکنولوژی اطلاعات از تکنولوژی‌هایی تشکیل شده که روی اطلاعات عمل می‌کنند.

فراگیری تأثیرات تکنولوژیک جدید، به این برمی گردد که اطلاعات بخش لاینفک تمامی فعالیت‌های بشری است. لذا همه‌ی فرآیندهای حیات فردی و اجتماعی ما تحت تأثیر مستقیم رسانه‌های تکنولوژیک قرار می‌گیرند. به‌علاوه، منطق شبکه‌سازی این پارادایم، در برابر پدیده‌های بدون ساختار انعطاف لازم را دارد و پدیده‌های بدون ساختار نیروی محرکه‌ی نوآوری در فعالیت‌های انسانی است. این انعطاف پذیری دقیقاً نکته‌ی اتّکاء پارادایم تکنولوژی اطلاعات است. فرآیندهای این پارادایم برگشت پذیرند. سازمان‌ها و نهادهای آن با آرایش مجدد اجزاء، قابل اصلاحند. این همه در سایه‌ی مکان و زمان مجازی است.

سؤال اینکه، این مفهوم «محیط نوآوری» چگونه بر ساختار اجتماعی علم و ریاضیات تأثیر گذاشته است؟ آیا این خلاقیت‌ها در تحقیقات ریاضی نیز متجلی‌اند؟ آیا عصر ارتباطات بر ارتباط بین شاخه‌های علم و یا شاخه‌های یاضیات

تأثیری جدی داشته است؟ امکانات جدیدی که برای پیشرفت علم فراهم شده کدامند و به چه بهایی به دست آمده‌اند؟ آیا ساختار جدید اجتماعی علم ادامه پیوسته تاریخ تحولات نظام علمی است؟

تحقیقات دسته جمعی در علوم پایه

در عصر اطلاعات، فرد در برابر جامعه‌ی شبکه‌ای قرار می‌گیرد و این پیامدهای اقتصادی، فرهنگی و سیاسی و یژه‌ای دارد. مدیریت انعطاف بیشتری دارد. شبکه‌ای شدن شرکت‌ها در روابط داخلی و بین شرکتی موجب تمرکز زدایی شده، سرمایه در برابر نیروی کار به طور چشمگیر قدرت یافته، از نفوذ جنبش کارگری کم کرده، روابط کاری تنوع روزافزون پیدا کرده و زنان در بازار کار مشارکت گسترده یافته‌اند. افزایش رقابت اقتصادی در سطح جهانی زمینه ساز انباشتگی سرمایه شده و این همه از ویژگی‌های بارز تجدید ساختار نظام سرمایه داری است. ویژگی اصلی چنین نظام اقتصادی، جنبش‌های اجتماعی بزرگ و تجلیات فرهنگی گذر است. هویت به اصلی‌ترین و گاه، به تنها سرچشمه‌ی معنا تبدیل می‌شود. مردم هر روز بیش از پیش معانی خود را براساس هویت خود و یا براساس آنچه گمان می‌کنند هویت آن‌هاست، سامان می‌دهند. ساختار جوامع، به طور روز افزون پیرامون تقابل میان فرد و شبکه شکل می‌گیرد. در تعیین سرنوشت جامعه، عوامل بسیاری از جمله خلاقیت فردی، کارآفرینی در فرآیند کشف علمی، نوآوری تکنولوژیک و کاربردهای اجتماعی آن دخالت دارند و نتیجه‌ی نهایی به الگوی پیچیده‌ای از تعاملات بستگی دارد.

بررسی تاریخ تکنولوژی در چین باستان، و افول آن در آغاز شکوفایی عصر تکنولوژی در غرب به ما می‌آموزد که دولت‌ها می‌توانند نیرویی پیشتاز در نوآوری تکنولوژیک باشند، از طرف دیگر دولت‌ها برای ثبات ساختار اجتماعی و حفظ قدرت ممکن است علاقه‌ی خود به توسعه‌ی تکنولوژی را از دست بدهند. پس عقب ماندگی تکنولوژیک بی‌معنی است و الگوی مناسبات دولت و جامعه است که موجب توسعه‌ی تکنولوژی است.

در شیوه‌ی توسعه به وسیله کشاورزی، منبع افزایشی مازاد تولید، افزایش کمّی نیروهای کار و منابع طبیعی است. در توسعه‌ی صنعتی، منبع اصلی بهره‌وری در معرفی منابع جدید انرژی و توانایی استفاده‌ی غیر متمرکز از انرژی در سراسر فرآیند تولید و توزیع نهفته است. در توسعه‌ی اطلاعاتی، منبع تولید در تکنولوژی دانش تولید، پردازش اطلاعات، و انتقال نمادها جای دارد. در واقع، کار دانش بر روی دانش منبع اصلی بهره‌وری است. اینجاست که تفکر گروهی موجب بهره‌وری بیشتر است و این منجر به تحولی در ساختارهای اجتماعی تحقیقات در تولید دانش و کار بر روی دانش شد. تفکر گروهی روی یک مسئله، افکاری را که در اقصی نقاط عالم هستند کنار هم می‌آورد و یک جامعه‌ی مجازی تشکیل می‌دهد. اینجاست که هویت اهمیت پیدا می‌کند و آن فرآیندی است که یک کنشگر اجتماعی به وسیله‌ی آن خود را می‌شناسد. البته همین هویت می‌تواند مبنای تشکیل جوامع مجازی قرار گیرد و لزوماً تفکر جمعی نیست که منجر به شکل‌گیری جامعه مجازی می‌شود. اما در یک تفکر جمعی، باید هویت یا ابعادی از هویت، موجب تشکیل آن جمع مجازی گردیده باشد.

این هویت می‌تواند بر مبنای علاقه‌های تحقیقی مشترک، مهارت‌های تحقیق و همپوشانی آن‌ها و مانند آن تعریف شود. یک فرد ممکن است با چندین هویت عضو چندین جامعه مجازی تحقیقی بشود و نقش خود را در نزدیک شدن به همه‌ی این اهداف جمعی هم زمان ایفا کند. از مهم‌ترین نتایج چنین نظام علمی، دور شدن تحقیقات و فرهنگ علمی از تحولات روزمره‌ی جامعه است. جامعه‌ی مجازی ارتباط خود را با زندگی واقعی از دست داده است.

ساختار ارتباطی دانشمندان و ساختار دانش

ساختار شغلی ریاضی‌دانان چه در شغل‌های دائم و چه در شغل‌های موقت و چه در شغل‌های شبکه‌ای در عصر ارتباطات متحول گشته و این تحولات بر نظام ارتباطات بین دانشمندان محیط است.

اولاً ، ریاضی‌دانان در ساختار شبکه‌ای هویت و احدی ندارند. حتی در شغل‌های دائم همکاری دانشمندان در جوامع مجازی متعدد، تنوع هویتی ایشان را باعث می‌شود. لذا ملاحظات انسان‌شناسانه که بهانه تشکیل جوامع تحقیقی و فکری بود، جای خود را به مناسبات کاری و خدماتی می‌دهد.

دوماً ، در اثر افزایش ارزش نسبی مشاغلی از قبیل مدیران، متخصصان و تکنسین‌ها که مشاغلی اطلاعاتی هستند، ریاضی‌دانان به این سمت گرایش پیدا می‌کنند که هم در تحقیق و هم در ارتباطات به هندسه‌ی اطلاعات توجه داشته باشند. علی‌الخصوص، هویت‌هایی که موجب تشکیل جوامع مجازی تحقیقاتی می‌شوند، به سمت اطلاعاتی شدن پیش می‌روند. مثلاً مسئله‌ای که به هندسه و جبر مربوط می‌شود، بهانه‌ی همکاری یک هندسه‌دان و یک جبردان در یک تحقیق مشترک می‌گردد. در صورتی که پیش از این، دو محقّق به دلیل اشتراک علاقه‌های تحقیقاتی و شباهت ساختار فکری در یک تحقیق همکاری می‌کردند.

سوم اینکه، ریاضی‌دانان رفته رفته به یک نیروی کار جهانی تبدیل می‌شوند که دانش مورد نیاز سایر حوزه‌های معرفتی را تولید می‌کنند. این جریان، برخلاف جریان تأثیرگذاری فرهنگ‌های مختلف بر رشد ریاضیات، در تمدن‌های متفاوت است. ارتباط علمی ریاضی‌دانان باید فراتر از تفاوت‌های فرهنگ‌های ایشان صورت گیرد و گرنه نمی‌تواند صورت جهانی به خود بگیرد.

البته این گرایش به جهانی شدن، به طور طبیعی در ریاضیات دیده می‌شد و سعی همواره بر این بوده که ریاضیات را به زبانی فرای فرهنگ‌ها بیان کنند و این در هماهنگی زبان تحقیقات و مقالات ریاضی آشکار بوده است. در فلسفه و منطق نیز ظهور زبان‌های فرافرهنگی یک تجلی از همین خصلت جهانی بودن ریاضیات بوده است و تحت تأثیر ریاضیات صورت گرفته است. این گرایش‌ها از ریاضیات به علوم پایه و سپس به ساختار مدیریتی جوامع توسعه پیدا کرد تا جایی که منجر به ظهور عصر اطلاعات شد. چرا که ساختارهای فرا اطلاعاتی هستند که در آن تنوع فرهنگی قابل ملاحظه است. اطلاعات پایین‌ترین سطح دانش است و پیچیدگی لازم برای نمایش تنوع فرهنگی را ندارد.

تأکید بر این سطح دانش، یعنی دانش اطلاعاتی، به نوبه خود بر ریاضی‌دانان و نظام ارتباطی آنان تأثیرگذاشت. شغل‌های موقت و شغل‌های شبکه، رو به افزایش گذاشتند و شغل‌های دائم تغییر هویت دادند. این تأکیدات بر دانش اطلاعاتی با استوار شدن نقش زبان در فلسفه قرن ۲۰ هم‌زمان و هماهنگ بودند که خود از تجلیات فلسفه صورت‌گرای هیلبرت بود. نتیجه اینکه، دانش در این عصر چیزی جز اطلاعات نیست و یا لااقل می‌توان ساختار آن را به زبان اطلاعات خلاصه نمود. در چنین نظام فکری، مشاغل علمی چیزی جز مشاغل اطلاعاتی نیستند و ارتباطات دانشمندان چیزی جز تبادل اطلاعات نیستند. جامعه‌ی شبکه‌ای ضربه‌ای نهایی به هر گونه معنی و باطن می‌زند و جالب آن که شکل‌گیری این جامعه نتیجه‌ی تحولات تکنولوژیکی است نه آراء فیلسوفان.

تأثیرات عصر اطلاعات بر شخصیت ریاضی‌دانان

فرهنگ مجازی، پایان عصر مخاطبان گسترده و ظهور شبکه‌های تعاملی را به همراه دارد و این تحول تأثیری جدید بر شخصیت ریاضی‌دانان دارد. ۲۷۰۰ سال پس از اختراع الفبا شاهد یکپارچگی شیوه‌های مختلف ارتباطات از جمله ارتباطات الفبایی و تصویری در چارچوب شبکه تعاملی هستیم و این بر محتوای فرهنگ بشری تأثیرات جدی دارد. این انقلاب، عمیق‌تر از انقلابی است که پس از ظهور تلویزیون رخ داد. در عصر اطلاعات، سیستم رسانه‌های همگانی با شبکه‌های تعاملی جایگزین خواهد شد. در هر دو مدل تعامل یک طرفه نیست. چرا که تعامل میان فرستنده و گیرنده به تفسیر پیام بستگی دارد. با وجود اینکه رسانه‌ها واقعاً در سطح جهانی با هم مرتبط شده‌اند و برنامه‌ها و پیام‌ها در شبکه‌ی جهانی در گردش هستند، نمی‌توان گفت که ما در دهکده‌ی جهانی زندگی می‌کنیم. ما در کلبه‌هایی فراخور حال هر منطقه زندگی می‌کنیم که در سطح جهانی تولید و در محدوده‌ی محلی توزیع شده‌اند.

ظهور شبکه و تعامل شبکه از دو ایده‌ی اولیه آمده است. اول Minitel فرانسه که شبکه‌ای رسانه‌ای است و برای جبران کردن ضعف فرانسه در صنایع الکترونیک به وجود آمد که ایده‌ی بانک اطلاعاتی را در خود داشت و دوم Arpanet که پدر اینترنت بود و یک استراتژی نظامی بود، با این هدف که شبکه‌های مخابراتی بتوانند پس از حمله‌ی اتمی به کار خود ادامه دهند. هر دوی این تجربه‌ها توسط دولت‌ها شروع شدند و عمیقاً در فرهنگ نهادهای مولد آن‌ها ریشه داشتند. این در دهه‌ی ۱۹۸۰ جای خود را به شبکه بیتنت دادند و در دهه ۱۹۹۰ شبکه اینترنت گسترش جهانی یافت. اولین موتور جست و جو ۱۹۹۲ اینترنت را به جام جهان نما تبدیل نمود و از این به بعد اینترنت به طور جدی بر سیستم ارتباطی دانشمندان حاکم شد. پست الکترونیکی هرگز به این اندازه تأثیرگذار نبود، چون تنها سرعت تعامل و سهولت آن را بیشتر می‌کرد و بر ساختار تعامل تأثیر نداشت.

امروز جست و جوگر گوگل تعامل علمی را به حدی سهل کرده که در عرض چند دقیقه می‌توان مهمترین مقاله‌های هر شاخه علمی و ساختار ارتباطی نخبگان آن‌ها و پیشرفت محققان در حل مسائل آن‌ها اطلاع حاصل نمود. پژوهش‌های محدود علوم اجتماعی در خصوص تأثیرات چنین شبکه‌ای به ما می‌گویند که شبکه اینترنت یک

رسانه‌ی ارتباط عمومی نیست و هرگز هم چنین نخواهد شد و غالباً نخبگان از آن استفاده جدی دارند. بنابراین تأثیرات اینترنت بر شخصیت علمی دانشمندان و علی‌الخصوص ریاضی‌دانان از نتایج عمده‌ی فرهنگی اینترنت است.

پژوهش‌های جامعه شناختی نشان می‌دهند که تکنولوژی در برابر فرهنگ بسیار انعطاف پذیر است و مردم به سرعت آن را برای رفع نیازهای روزمره‌ی خود به کار می‌برند. تعداد شیوه‌ها و اهداف کاربری اینترنت بسیار متفاوت است. ارتباط کامپیوتری هرگز جایگزین شیوه‌های دیگر ارتباطی نمی‌شود بلکه آنان را تقویت می‌کند. شاید بتوان گفت شبکه‌های کامپیوتری وسیله‌ی قدرتمندی برای انسجام اجتماعی نخبگان خواهد بود. از نتایج مستقیم آن طبقه بندی اجتماعی دانشمندان با تشکیل جوامع مجازی است و دیگر راز زدایی در ساختار پیشرفت علمی است. ریاضی‌دانان از شخصیت فرهنگی، تاریخی و اجتماعی جوامع خود تهی می‌شوند و در محیطی مجازی و در زمانی مجازی به زندگی تحقیقی خود ادامه می‌دهند. به ناچار از تعامل بین زندگی تحقیقاتی ریاضی‌دانان و رشد کمالات انسانی آنان کاسته می‌شود و به ابزاری برای تولید علم سفارشی تبدیل می‌گردند. چرا که جوامع مجازی انتظارات خاصی از تولیدات علمی ایشان دارند.

تأثیرات عصر اطلاعات بر تحقیقات ریاضی

فضای جریان‌ها و زمان مجازی از مشخصه‌های عصر اطلاعات است. در این جا مفهوم اجتماعی مکان و زمان مورد نظر است. همان طور که زمان و مکان در طبیعت در هم تنیده‌اند، زمان و مکان مجازی نیز ارتباط تنگاتنگ دارند. برخلاف اکثر نظریه‌های اجتماعی کلاسیک که فرض را بر تسلط زمان بر مکان می‌گذارند، در جامعه‌ی شبکه‌ای مکان است که زمان را سامان می‌دهد. ابتدا به الگوهای مکانی تولید توجه می‌کنیم.

منطق مکانی عصر الکترونیک چنین است که تحقیق و توسعه، نوآوری و نمونه‌سازی در شهرهای بزرگ متمرکزند. تولید با استفاده از نیروی کار ماهر در شعبات کارخانه‌ها که معمولاً در مناطق تازه صنعتی شده قرار دارند انجام می‌شود. مونتاژ و تست و آزمون با کمک نیروهای نیمه ماهر در خارج کشورهای صنعتی انجام می‌شود. خدمات تعمیر و نگهداری و پشتیبانی فنی، در مراکز منطقه‌ای سراسر جهان که در بازارهای الکترونیکی عمده سازمان دهی می‌شوند، ارائه می‌شود. در جامعه‌ی شبکه، محیط نوآوری که منبع اصلی نوآوری است، متمرکز است. این محیط نوآوری به راحتی می‌توانند که محل‌هایی که پیشینه صنعتی ندارند، جای بگیرند و فرآیند تولید و توزیع را می‌توان از همین محیط‌ها کنترل کرد. نتیجه هندسه‌ی متغیری است که پیوسته شرکت‌های جدید در رقابت شرکت‌های قدیمی را پشت سر می‌گذارند و محیط‌های نوآوری شبکه را تغییر می‌دهند. از گرایش‌های سیستم جدید، مرکزیت خانه و انعطاف زمانی است. انعطاف پذیر شدن زمان منجر می‌شود که مکان‌ها نامتعارف‌تر شوند. زیر الگوی رفت و آمد به این مکان‌ها روز به روز انعطاف بیشتری پیدا می‌کند. عصر اطلاعات شکل جدیدی از شهر را ایجاد کرده که شهر اطلاعاتی نام دارد.

شهرهای اطلاعاتی گروه‌های اقتصادی جهان هستند. ویژگی این شهرها قطع ارتباط محلی(فیزیکی و اجتماعی) است. دگرگونی‌های ساختاری جوامع ظهور شکل‌ها و فرآیندهای فضایی جدیدی را نتیجه می‌دهد.

از منظر نظریه‌های اجتماعی، مکان تکیه گاه مادی عملکردهای اجتماعی است که در یک زمان انجام می‌گیرند، اما در جامعه شبکه ای، «فضای جریان‌ها» سازماندهی مادی عملکردهای اجتماعی است که دارای اشتراک زمانی هستند و از طریق جریان‌ها عمل می‌کنند. نخستین لایه، نخستین تکیه گاه مادی فضای جریان‌ها، در واقع توسط مداری از محرک‌های الکترونیکی ایجاد می‌شود. دومین لایه، از گره‌ها یا بازوی آن تشکیل می‌شود که دارای ویژگی‌های اجتماعی، فرهنگی و فیزیکی خاص هستند. سومین لایه، به سازماندهی مکانی نخبگان مدیریتی مسلط مربوط می‌شود. همه‌ی این لایه‌ها در تحقیقات شبکه‌ای در جامعه‌ی ریاضی ظهور جدی و تعیین کننده دارند. هندسه‌ی گره‌ها و بازوهای تحقیقی به طور جدی بر نظام تحقیقات ریاضی حکومت می‌کنند. زمان در جامعه‌ی شبکه‌ای نه تنها نسبی است، بلکه این زمان‌ها برای ایجاد جهانی مجازی(که به نوعی ابدی است) همکاری می‌کنند. جامعه‌ای که خود را گسترش نمی‌دهد، بلکه حفظ می‌کند. چرخه‌ای نیست، بلکه تصادفی است. زمان شبکه‌ای، زمانی انعطاف پذیر است. نتایج مخرب این انعطاف، کوتاه شدن عمر کاری، در هم ریختن چرخه‌ی زندگی و دور شدن انسان در ریتم‌های طبیعی و انکار مرگ تحت تأثیر زمان مجازی و حیات مجازی است. دیدگاه لایبنیتز، که زمانی توالی چیزهاست و بدون این چیزها زمان وجود ندارد دقیقاً در جامعه شبکه‌ای صدق می‌کند. تفاوت فشردگی مکان و زمان در گره‌های مختلف، از ویژگی‌های نظام تحقیقات ریاضی در عصر اطلاعات است.

تشکیل اتحادیه‌ی اروپا

اتحاد اروپا نتیجه‌ی روند جهانی‌سازی و تشکیل هویت و دولت شبکه‌ای بود. همچنان که فروپاشی روسیه نتیجه چنین تحولاتی بود. تشکیل اتحادیه‌ی اروپا، قطبی علمی در برابر آمریکا پدید آورد که بر تحولات ریاضیات در دو دهه‌ی اخیر تأثیر شایانی داشت. در این بین، عوامل اقتصادی نقش عمده‌ای داشت.

در ۱۹۴۸ رهبران اروپایی در لاهه دیدار کردند تا درباره‌ی چشم اندازهای یکپارچه‌سازی اروپا مشورت کنند. ایشان به دنبال یک همزیستی دائمی با آلمان بودند تا از جنگ جهانی دیگری جلوگیری کنند. قدم اول ایجاد نهادهای سیاسی بود. جامعه ذغال‌سنگ و فولاد اروپا در ۱۹۵۱ تشکیل شد که پایه‌ی جامعه اقتصادی اروپا را ریخت. در ۱۹۷۳ بریتانیا پس از تلاش فراوان به این جامعه پیوست و یونان در ۱۹۸۱، اسپانیا و پرتغال در ۱۹۸۶ که موجب فضای باز اقتصادی در اروپا گردید. ترس از اینکه اروپا به مستعمره اقتصادی و تکنولوژیک شرکت‌های آمریکایی و ژاپنی تبدیل شود، منجر شد که لایحه‌ی اروپای واحد را در ۱۹۸۷ به تصویب رسانند که تا ۱۹۹۲ عملی می‌شد. اقدامات اقتصادی با تأکید بر سیاست تکنولوژی توأم شد.

آلمان متحد به اتحاد اروپا کمک ویژه‌ای کرد. پس از چهار دهه، آلمان از قیومیت فاتحان جنگ جهانی آزاد شد. البته به قیمت فداکردن واحد پول ارزشمند خود مارک برای حمایت واحد پول مشترک جدید یعنی یورو. یکپارچگی اقتصادی و سیاسی اروپا فرآیندی برگشت ناپذیر بود که ثبات و رشد اروپا را به دنبال داشت. این یکپارچگی در واقع واکنشی در برابر جهانی شدن و در واقع پیشرفته‌ترین تجلی آن بود. یک بُعد اصلی جهانی شدن، تکنولوژی اطلاعات است که رکن اصلی اقتصاد و قدرت دولتی است.

هر چند اروپا در زمینه‌ی میکروالکترونیک و نرم افزار از آمریکا عقب ماند، ولی در تکنولوژی اطلاعات توانست به شبکه جهانی بپیوندد. این منجر به نجات اروپا شد. مثلاً در موج تکنولوژیک بعدی یعنی مهندسی ژنتیک ژاپن عقب ماند، اما آزمایشگاه‌های اروپا در این زمینه پیشتازند. در علوم‌پایه به خصوص ریاضیات و فیزیک اروپا توانست جایگاه محکم تاریخی خود را بازیابد. دانشگاه‌های سوئیس، آلمان، ایتالیا، اسپانیا به سرعت استاندارد علمی خود را به فرانسه و انگلستان رساندند که منجر به تشکیل گره‌های علمی بسیاری در اروپا گردید. سنت ریاضی اروپا با تکیه بر تاریخ غنی خود و سنت جدید فرانسوی و بریتانیایی دوباره روی پای خودایستاد و با ریاضیات ژاپنی و آمریکایی به رقابت پرداخت. بسیاری از ریاضی‌دانان روسی پس از فروپاشی، به شبکه‌ی ریاضیات اروپا به خصوص فرانسه و آلمان پیوستند. اتحاد اقتصادی اروپا در این تحول نقش عمده‌ای داشت.

از طرفی بازسازی دانشگاه‌ها و کتابخانه‌های اروپا پس از گشایش اقتصادی ناشی از اتحاد اروپا و از طرف دیگر شبکه‌ی بزرگ مراکز تحقیقاتی و کنفرانس‌های علمی در سراسر اروپا، نقش عمده‌ای در همگن‌سازی توانایی علمی اروپا را به عهده داشتند. در عین اینکه هویت علمی هر کشوری محفوظ ماند.

اتحادیه اروپا دارای ساختار دولت شبکه‌ای است. لذا احتمال وجود نابرابر بین اعضاء را منتفی نمی‌کند. لذا کشورهای اروپایی هنوز قادرند هویت خود را حفظ کنند. دلیل امکان اتحاد اروپا نیز همین حفظ هویت‌های ملیت‌های مختلف است.

تأثیرات اقتصاد بر پیشرفت ریاضیات

فرهنگ، نهادها و سازمان‌های اقتصاد اطلاعاتی بر تحولات ریاضیات در عصر ارتباطات تأثیر گذارند. روندهای سازمانی، در تجدید ساختار سرمایه‌داری و انتقال از صنعت‌گرایی به اطلاعات‌گرایی، بر تحول نظام‌های علمی نیز تجلی کرد. هدف این تحولات سازمانی، فائق آمدن به عدم قطعیتی بود که به واسطه‌ی آهنگ سریع دگرگونی در محیط اقتصادی به وجود آمده بود(با افزایش انعطاف پذیری در تولید، مدیریت و بازاریابی). شبکه‌سازی بین شرکت‌ها از جمله راه حل‌های نجات سرمایه‌داری بود. حتی بسیاری از شرکت‌های مهم در صحنه‌های استراتژیک متحد می‌شدند. مثلاً از آنجا که هزینه‌ی تحقیقات و توسعه رو به فزونی می‌گذاشت، شرکت‌های بزرگ مراکز تحقیقاتی مشترکی برای رفع نیازهای خود تشکیل دادند. خود شرکت‌ها نیز تغییر ساختار دادند تا با شرایط پیش‌بینی ناپذیر تحولات اقتصادی و تکنولوژیک سازگار شوند. این شرکت‌ها را شرکت‌های افقی می‌نامند که با ۷ گرایش عمده مشخص می‌شوند: سازماندهی حول محور فرآیند تولید، نه بر حسب و ظایف؛ سلسله مراتب ساده؛ مدیریت گروهی؛ سنجش عملکرد براساس رضایت مشتری؛ اعطای پاداش‌ها براساس عملکرد گروهی؛ به حداکثر رساندن تماس‌ها با فروشندگان و مشتریان؛ اطلاعات و در آخر آموزش و باز آموزی کارکنان در همه‌ی سطوح. نتایج این تغییرات سازمانی به خوبی در مدیریت نظام علمی قابل ترجمه است. مثلاً، مدیریت روند تحقیق ناچار است گروهی انجام شود و تحقیقات ناچارند بر طبق بازار آن و رضایت سفارش دهندگان آن ارزش یابی شوند.

علم در خدمت سرمایه‌داری اطلاعاتی، ساختار علم را متحول نمود و دستگاه‌های علمی و تحقیقی را بسیار شبیه بنگاه‌های اقتصادی شبکه‌ای نمود. بنگاه اقتصادی شبکه‌ای، شکل خاصی از بنگاه‌های اقتصادی است که سیستم ابزارهای آن با فصل مشترک بخش‌هایی با سیستم‌های مستقل اهداف ساخته می‌شود. بنابراین اجزای شبکه نسبت به شبکه هم مستقل هستند و هم وابسته. این یعنی توانایی ساختاری برای تسهیل ارتباط بی‌دردسر بین اجزاء، به طوری که بین اهداف شبکه و اهداف اجزاء اشتراک منافع وجود داشته باشد.

هدف چنین ساختاری، این است که سازمان‌های موفق بتوانند به طور کارآمد به تولید دانش و پردازش اطلاعات بپردازند و خود را با هندسه‌ی متغیر اقتصاد جهانی سازگار کنند. چنان انعطاف داشته باشند که ابزار خود را با همان سرعت تغییر هدف، تغییر دهند و نوآوری کنند. چرا که نوآوری در حال تبدیل شدن به سلاح کلیدی رقابت است.

ساختار مشابهی بر دستگاه‌های علمی و تحقیقی القا می‌شود که تحت تأثیر همین نظام اقتصادی است. مراکز تحقیقاتی باید بتوانند در تغییر اهداف تحقیقاتی خود انعطاف داشته باشند. لذا به دانشمندان نیاز دارند که بتوانند بر طبق سفارش مشتری که همان دولت یا صنعت باشد، محصولات دانشی متفاوتی تولید نمایند. این انعطاف، محور اصلی پیشرفت ریاضیات در عصر اطلاعات است.

تأثیرات جهانی شدن بر پیشرفت ریاضیات

توسعه اطلاعاتی و بحران ناشی از جهانی شدن در کشورهای آسیایی حوزه‌ی اقیانوس آرام سرنوشت علمی این جوامع را به شدت تحت تأثیر قرار داد. موفقیت اقتصادی این کشورها در موفقیت علمی ایشان نیز تجلی نمود. هر چند که رکود اقتصادی در اواخر دهه ی ۱۹۹۰ اقتصاد پیشرو این حوزه را با شکست مواجه کرد، ولی همین یک دهه جلب سرمایه به بازسازی کل ساختار علمی دانشگاه‌های این منطقه کمک کرد.

کشورهای این منطقه قوی‌ترین کشورها در آموزش ریاضی هستند که در پیشرفت‌های علمی و تکامل ساختار تحقیقی این کشورها نقش به سزایی داشته است. سبک آموزش این کشورها نیز با سبک غربی آموزش ریاضی تفاوت دارد. در کلاس‌های درس این منطقه از مثال‌های مهم و پراکنده شروع می‌کنند و در یک روند دانش آموز محور تئوری ریاضی پنهان در این مثال‌ها را بیرون می‌کشند. در صورتی که کلاس درس غربی معلم محور است و از تئوری ریاضی شروع می‌کند و به مثال‌هایی که حالت‌های خاصی بیش نیستند ختم می‌شوند.

پس از رکود اقتصادی، در عین اینکه ساختارهای علمی لازم در این کشورها شکل گرفته بود تولیدات علمی آنان رو به نزول گذاشت. این همان هندسه‌ی متغیر جامعه‌ی شبکه‌ای را نشان می‌دهد که در آن گره‌های مهم ممکن است تغییر پیدا کنند، اما کل شبکه به‌جا خواهد ماند. بسیاری از کشورها، همگام با توسعه اقتصادی، به ساختارهای علمی لازم مجهز شدند که قابلیت تبدیل این کشورها به قطب‌های علمی در موضوعاتی خاص را به طور بالقوه در این کشورها به وجود آوردند. مکزیک هشتمین کشور صنعتی جهان از جمله‌ی این مثال‌هاست.

تأثیرات کنفرانس‌های علمی بر پیشرفت ریاضیات

تشکیل گره‌های علمی در شبکه تحقیقاتی ریاضی، نیاز به پیشرفت مکملی هم دارد و آن تشکیل محورهای ارتباطی بین گره‌ی جدید و گره‌های پایدار و سابقه دار است. برگزاری کنفرانس‌های علمی، نقش به وجود آوردن این محورها را به عهده دارند. دعوت ریاضی‌دانان از گره‌های علمی دیگر به گره‌ی جدید منجر به شکل‌گیری خطوط ارتباطی علمی می‌شود که در پیوستن گره‌ی جدید به شبکه‌ی علمی اهمیت دارند. در اکثر کشورهای مطرح دنیا، به منظور ایجاد گره‌های بالقوه، مؤسسات تحقیقاتی ریاضی تأسیس شده است که به تحقیقات در ریاضی و فیزیک محض اشتغال دارند. برای ایجاد محورهای ریاضی این گره‌ها کنفرانس‌هایی برگزار می‌کنند تا متخصصانی از سایر گره‌ها دور هم در گره جدید جمع شوند و ساختار ارتباطی این گره جدید را شکل دهند.

در دو دهه اخیر، تعداد کنفرانس‌های علمی به طور جدی رشد داشته است که نشان دهنده‌ی تکاپوی کشورهای در حال توسعه و مؤسسات تحقیقاتی جدید التأسیس در پیوستن به شبکه‌ی جهانی علمی است. عبدالسلام فیزیکدان پاکستانی که جایزه نوبل نیز دریافت کرد، مؤسس مرکز ICTP است که به اتصال دانشمندان و مؤسسات جهان سوم به مؤسسات اروپایی و آمریکایی و ژاپنی مخصوص شده است. این تشکیلات، بسیاری از کشورهایی را که از حمایت مالی دولت در پژوهش به طور جدی برخوردار نیستند را با مرکزیت ICTP حمایت می‌نماید.

ساختارهای حامی ارتباطات علمی در مؤسسات تحقیقاتی

سیاست‌های اطلاعاتی، قدرت و تأثیر مؤسسات تحقیقاتی معروف و قدیمی را رفته رفته تحلیل می‌دهد و ساختارهای حامی این سیاست‌ها رفته‌رفته در تمامی مؤسسات تحقیقاتی گسترده می‌شود. ساختارهایی که تحمل اقتصادی حمایت گره‌های علمی را دارند، در صورتی که با پیشینه‌ی تاریخی و زمینه مناسب فرهنگی همراستا شوند، به مراکز فعال و تأثیرگذار در جامعه‌ی علمی جدید تبدیل خواهند شد. البته پیشینه‌ی تاریخی با بهره گرفتن از ریاضی‌دانانی که در سنت‌های جا افتاده تربیت شده‌اند قابل جبران است، اما توانایی اقتصادی حمایت علم و زمینه مناسب فرهنگی قابل جایگزین نیستند.

اولاً مؤسسه تحقیقاتی از آنجا که به شبکه علم متصل خواهد شد، باید از فرهنگ بومی و تأثیرات اجتماعی موضعی مستقل باشد تا بتواند به یک گره‌ی شبکه‌ی علمی تبدیل شود. به علاوه، جذب ریاضی‌دانان توانا و حمایت ارتباطات علمی ایشان که زمینه‌های تشکیل محورهای ارتباطی این گره با دیگر گره‌ها را تشکیل خواهد داد، نیاز به توانایی اقتصادی بالایی دارد که باید با استانداردهای جهانی منطبق باشد.

معمولاً ریاضی‌دانان جهان سوم در چنین مؤسساتی حمایت نمی‌شوند. هم از این لحاظ که استاندارد اقتصادی لازم معمولاً در کشورهای جهان سوم قابل دسترس نیست و هم از این لحاظ که سنّت در این کشورها چنان قوی است که مجال نفس کشیدن به مدرنیته نمی‌دهد. لذا مؤسسات تحقیقاتی ریاضی موفق درجهان سوم، تنها به طور مصنوعی و با حمایت مستقیم مالی و معنوی دولت قابل تشکیل هستند.

جنبش‌های مانع از ارتباطات علمی در جهان سوم

نهضت‌های اجتماعی علیه نظام نوین جهان، در نهادهای علمی جهان سوم تجلی پیدا کرده‌اند. نهادهای دولت و سازمان‌های جامعه‌ی مدنی بر پایه‌ی فرهنگ، تاریخ و جغرافیا استوارند. لذا شتاب گرفتن ناگهانی ضرباهنگ تاریخ، و انتزاعی شدن قدرت در شبکه‌ای از رایانه‌ها، مکانیسم‌های موجود کنترل اجتماعی و بازنمود سیاسی را نابود می‌سازد. مردم سراسر جهان از فقدان کنترل بر زندگیشان، محیطشان، شغلشان، اقتصادشان، دولتشان، کشورشان و نهایتاً بر سرنوشت کره‌ی خاکی در فشار هستند. لذا سعی می‌کنند به و اکنش در برابر بی‌قدرتی قدرت بخشند، و برنامه‌های جایگزین، منطقی را که در نظم جهانی نهفته است به چالش می‌طلبند. نظمی که سراسر جهان هر روز بیش از پیش آن را بی‌نظمی به شمار می‌آورند.

برای درک این جنبش‌ها باید به چند نکته توجه کرد: اول اینکه، نهضت‌های اجتماعی را باید از زبان خود آن‌ها شناخت. یعنی ماهیت نهضت‌ها همان است که خود می‌گویند. اعمال آن‌ها تعریفی است که از خود ارائه می‌دهند.

دوم اینکه، نهضت‌های اجتماعی ممکن است محافظه‌کار، انقلابی یا هر دو باشند. یعنی تحولات اجتماعی هیچ سمت و سوی از پیش تعیین شده‌ای ندارند. سوم اینکه نهضت‌های اجتماعی را با سه اصل مشخص می‌کنند: هویت نهضت، دشمن نهضت و مدل اجتماعی نهضت که به چشم انداز نهضت اشاره دارد که می‌خواهد در افق تاریخی بدان برسد.

مثلاً میهن پرستی یک نهضت اجتماعی است. اهداف، عقاید و دشمنان مشترک میهن پرستان مجموعه‌ی ارزش‌ها و اهدافی است که جهان بینی آنان را می‌سازد و نهایتاً خود جنبش را تعریف می‌کند. در این دیدگاه، جامعه به دو قشر تولید کنندگان و مقامات دولتی، بانکداران یا نخبه‌های ثروتمند تقسیم می‌شود که بیم آن می‌رود که جهانی شدن مردم را به برده‌های یک اقتصاد جهانی تبدیل کند.

ما در این جا با نهضت‌هایی سر و کار داریم که علیه نظم نوین جهانی قیام می‌کنند. هویت‌های ملی، نژادی، اعتقادی از جمله هویت‌هایی هستند که برای کنترل تقدیر خود، دست به ایجاد نهضت‌های اجتماعی می‌زنند. جالب این جاست که در همه‌ی این نهضت‌ها، تأثیر نیرومند آن‌ها ناشی از حضور رسانه‌ای و استفاده مؤثر از تکنولوژی اطلاعات است. زیربنای سازمانی این نهضت‌ها همین تکنولوژی است.

دشمن این نهضت‌ها، پیامدهای اجتماعی، اقتصادی، فرهنگی و محیط زیستی جهانی شدن است. سرانجام، گسترش این نهضت‌ها نقطه‌ی پایان ایجاد اقتصاد جهانی نوین را که با استفاده از طراحی کامپیوتری و مستقل از جوامع ساخته می‌شود رقم خواهد زد. متمرکز ساختن اطلاعات، تولید و بازار در بخشی از جمعیت و خلاصی جستن از دست بقیه‌ی جامعه به انحاء مختلف با خواسته‌ی توده‌ی مردم موافقت ندارد و لذا محکوم به نابودی است. نمودهای این جنبشها در مزاحمت‌های فراهم کردن برای ارتباطات علمی در چهارچوب شبکه‌ی جهانی در بسیاری از کشورها مانند جهان سوم، نمودهای دولتی است. اما در کشورهای پیشرفته معمولاً چنین نهضت‌هایی مردمی هستند.

جغرافیای ارتباطات علمی

پایان عصر مخاطبان گسترده و ظهور شبکه‌های تعاملی مفاهیم جدیدی در جغرافیای ارتباطات علمی را پیش می‌کشند. فضای جریان‌های اجتماعی شاخه‌های ریاضیات و شکستن مفهوم سنتی زمان از مشخصه‌های این تغییرات در جغرافیای ارتباطات علمی هستند. در این مدل به جای آن که دانشمند در یک ساختار اجتماعی از پیش تعیین شده که برای زندگی علمی او مناسب است بنشیند، باید همواره تلاش کند در ارتباطات علمی و تحقیقات خود موقعیت خود را در شبکه علمی را استوار نماید. او بیشتر وقت خود را به ارتباطات علمی می‌گذارد تا تحقیق در مورد مسائل خاص. چرا که به محض تمرکز روی مسئله و عدم توجه به ارتباطات خود موقعیت خود در شبکه‌ی علمی را از دست خواهد داد.

به علاوه، هندسه‌ی متغیر جغرافیای ارتباطات علمی ایجاب می‌کند که مدت حضور اکثر دانشمندان در کوران ارتباطات علمی بسیار کوتاه باشد و اکثرشان زود بازنشسته شوند. دانشمندان معدودی قادر خواهند بود در سراسر

زندگی علمی خود در کوران علمی قرار داشته باشند و این معمولاً در گره‌هایی است که پیشرفت علم به معنای مدرن آن را حمایت می‌کنند. لذا معمولاً دانشمندان جهان سومی قادر نخواهند بود که سال‌های طولانی در کوران علمی باقی بمانند.

همین موضوع موجب اختلاف طبقاتی در جامعه‌ی علمی اطلاعاتی خواهد شد. دانشمندان با توجه به میزان فعالیت‌ها و ارتباطات علمی خود طبقه بندی می‌شوند. این طبقات با هم ارتباط دارند، اما اکثر تعاملات هر طبقه، درونی و بین اعضای همان طبقه علمی است. این منجر خواهد شد به اینکه ریاضی‌دانان محقق در یک طبقه‌ی خاصی به سمت موضوعات تحقیقی خاصی که متناسب با تحمل ارتباطی آن طبقه است روی آورند و لذا اختلاف طبقاتی دانشمندان در اختلاف مسائلی که روی آن فکر می‌کنند تجلی خواهد کرد.

عملاً می‌بینیم که در جهان سوم در مؤسساتی که از لحاظ نرخ ارتباطات علمی قابل مقایسه هستند ریاضی‌دانان روی مسائل مشترکی فکر می‌کنند که با مسائل مهمی که در گره‌های مهم اطلاعاتی مورد توجه هستند، تفاوت دارد. چرا که کار کردن روی مسائل این گره‌ها نیاز به کوران ارتباطات علمی دارد.

در کشور ما و بسیاری از کشورهای جهان سوم چنین وضعی آشکار است. علاقه به تحقیقات در رشته‌های ترکیبات، جبر جابه جایی و منطق فازی به عنوان تنها شاخه‌هایی که نرخ ارتباطات علمی لازم برای تحقیق در آن با توانایی جامعه ما هماهنگی دارد، موجب شده است که شبکه‌های ارتباطی در این تحقیقات خاص شکل بگیرد. در رشته‌های دیگر، هر ریاضی‌دانی حداکثر وابسته به آن گره‌ای است که در آن تحصیلات خود را به پایان رسانده و موقعیت علمی او تابع اعتبار علمی آن گره است. این به شرط آن است که او بتواند ارتباط خود با گره‌ی مادر را حفظ کند. خیل عظیم ریاضی‌دانانی که قادر به وارد شدن به شبکه‌های علمی نیستند، ناچارند عمر خود را به تدریس و خدمت‌گذاری نظام‌های خُرد در چارچوب روابط اجتماعی بگذرانند.

فلسفه در عصر اطلاعات

هویت و معنا در جامعه‌ی شبکه‌ای، فلسفه را محصول تعاملات اجتماعی و حمایت کننده‌ی آن قرار می‌دهد، نه محصول کنکاش‌های ذهن یک فیلسوف که با دیدگاهی جدید به اطراف خود نظر می‌کند. البته این تعاملات اجتماعی در کنترل هیچ نهاد اجتماعی نیز نیستند. می‌توان گفت جامعه‌ی شبکه‌ای معنایی جدید را پیش پا می‌گذارد که نه تنها بر تفکر فلسفی پایه‌گذاری نشده، بلکه مفهومی اجتماعی به معنای غیر مجازی نیست. لذا همان طور که جامعه شناسی پس از جنگ جهانی بر علیه فلسفه قیام کرد و دست‌آویز جامعه شناسی، گرایش فلسفه به زبان شناسی بود، عصر اطلاعات بر علیه جامعه شناسی قیام کرد و دست‌آویز آن گرایش جامعه به استفاده از تکنولوژی ارتباطی بود. اگر فلسفه در جامعه‌ی شبکه‌ای جایگاهی داشته باشد، در رابطه با مفهوم هویت مجازی است که سرچشمه‌ی معنای مجازی است.

منظور از هویت عبارت است از فرآیند معناسازی براساس یک یا مجموعه‌ای به هم پیوسته از ویژگی‌های فرهنگی که بر منابع معنایی دیگر اولیت داده می‌شود. در شبکه مجازی برای هم فرد خاص و هم کنشگر اجتماعی، ممکن است چندین هویت وجود داشته باشد. چون فرد در چندین نظام ارتباطی شرکت می‌کند. هویت منبع معنا برای خود کنشگران است و به دست خود آن‌ها از رهگذر فرآیند فردیت بخشیدن ساخته می‌شود. توجه کنید که هویت سازمان دهنده‌ی معناست، اما «نقش» اجتماعی، سامان دهنده‌ی کارکردهاست. اکثر کُنش‌های اجتماعی بر مبنای تضاد بین جریان‌های ناشناخته و هویت‌های منزوی سامان می‌یابد.

مفهوم هویت مجازی، منجر به عکس‌العملی در جوامع بشری شد که همان بنیادگرایی است. اینکه در واقع هویت‌های اجتماعی هستند که در برابر هویت‌های مجازی برخواسته‌اند. بنیادگرایی دینی و علی‌الخصوص بنیادگرایی اسلامی از جمله این عکس‌العمل‌ها در برابر هویت مجازی است. این جاست که با تکیه بر مفهوم هویت، فلسفه‌ای خاص بر علیه شبکه اطلاعاتی یا نظم جهانی برمی‌خیزد. فلسفه‌ای که رقیب آن فلسفه‌ای نیست، بلکه حول هویت و در برابر هویت شکل می‌گیرد و این انقلابی در تاریخ فلسفه است.

خصوصیت مرکزی چنین فلسفه‌هایی یعنی فلسفه‌های هویتی، تمرکز آن‌ها بر انسان شناسی است که در برابر تمرکز فلسفه‌های سنتی بر جهان بینی است. چرا که فلسفه‌های هویتی، اولین هدف خود را آزادسازی انسان از زندان شبکه مجازی قرار داده است و تا انسان را از این دشمن که خود یک جهان بینی است آزاد نکند، بحث از جهان‌بینی انکار دشمن خواهد بود. به همین دلیل است که فلسفه‌های هویتی که از جنبش‌های بنیادگرا بر می‌خیزند، همه فلسفه‌های افراطی هستند. چون انسان شناسی خود را در یک جهان بینی نمی‌نشانند و به نظر می‌رسد که با عصر خود تطبیق ندارند و تأکیدات آن‌ها طبیعی نیست.

البته فلسفه در جامعه‌ی عصر اطلاعات، به فلسفه‌های مبارز محدود نمی‌شود. فلسفه‌ای نیز هست که محصول تعاملات اجتماعی مجازی است و در واقع عصاره و شیره جهت گیری‌های شبکه‌ی اطلاعاتی است. فلسفه‌های بنیادگرا و فلسفه‌های مجازی هر دو در فلسفه‌ی علم جدید حضور دارند.

فلسفه علم در عصر اطلاعات

در عصر اطلاعات، علم تحت تأثیر تعاملات شبکه‌ای هدایت می‌شود، نه تحت هدایت افرادی تأثیرگذار. این منجر به تغییرات در روند انقلاب‌های علمی و طبیعت چنین انقلاب‌هایی خواهد شد. هر چند نهضت‌های بنیادگرای علمی نیز امکان ظهور دارند که سازمان آن‌ها بر مفاهیم اجتماعی تکیه دارد. اینکه فلسفه علم، به عنوان یک نظام فلسفی، هدایت‌گر جهت گیری‌های علمی باشد، نه در علم شبکه‌ای و نه در نهضت‌های بنیادگرای علمی دیده نخواهد شد. حتی نهضت‌های بنیادگرای علمی هنوز ظهور جدی نداشته‌اند و ساختارهای اجتماعی ناب مقاومت در برابر علم شبکه‌ای را ندارند.

این نشان دهنده قدرت شبکه مجازی در حمایت پیشرفت علم است. این قدرت چنان زیاد است که از کنترل دانشمندان و نظام‌های اجتماعی علم خارج می‌شود. البته همان طور که روند جهانی شدن در برابر نهضت‌های اجتماعی که بر علیه آن شکل گرفته‌اند محکوم به عدم موفقیت است، نهضت‌های بنیادگرای علمی نیز سرانجام به اندازه‌ی کافی قوی خواهند شد که در برابر نظام جهانی علم مقاومت نمایند و حقوق فردی دانشمندان را احقاق نمایند. این منجر خواهد شد که سرانجام محیط‌های اجتماعی مناسب برای علم سنتی فراهم گردد. سرنوشت فلسفه علم در این بین دوگانه است. از یک سو، فلسفه علم به معنای سنتی آن زنده خواهد ماند تا بنیادگرایی علمی را حمایت نماید. از طرف دیگر فلسفه‌ی علم مجازی به عنوان شاخه‌ای جدید ظهور خواهد کرد که عصاره و شیره‌ی تعاملات اجتماعی مجازی در شبکه‌ی علمی است. از علامت‌های ظهور این گرایش جدید، ظهور فلسفه‌ی اطلاعات است.

فلسفه‌ی ریاضی در عصر اطلاعات

بنیادگرایی ریاضی، هنوز به عنوان نهضتی در برابر جهانی شدن پا نگرفته است. بعلاوه، نهضت جهانی شدن در ابعاد خاص با هویت ریاضیات به عنوان زبانی جهانی برای سخن گفتن از مجردات هماهنگی دارد. لذا فلسفه ریاضی در عصر اطلاعات محدود به فلسفه‌های مجازی است. آنچه در این فلسفه‌ها مشهود است، یکی نظام فلسفی مستقلی است که در تک‌تک شاخه‌های ریاضی شکل گرفته است که منجر به استانداردهای بخصوصی در باب انتخاب مسائل و روش‌های حل‌مسئله و تئوری‌سازی در هر یک از این شاخه‌ها شده است. به علاوه، شبکه‌ی مجازی منجر به شبکه‌ای ارتباطی بین شاخه‌های علمی شده است که خود دارای گره‌ها و محورهایی است که هندسه‌ی متغیر اما فزاینده‌ای را شکل می‌دهند. شبکه‌ی ایجاد شده بین شاخه‌های مختلف ریاضیات، مانند شبکه ارتباطات علمی ریاضی‌دانان، مؤلفه‌های تصادفی ندارد و لذا اکیداً به پیشرفت ریاضیات کمک می‌کند. در صورتی که چنین نظامی در شاخه‌های دیگر علم دیده نمی‌شود. شبکه‌ی شاخه‌های ریاضیات و توسعه‌ی آن(هم در جهت ایجاد گره و هم در جهت ایجاد محورهای ارتباطی) مفاهیم مکان و زمان شبکه‌ای جدیدی برای پیشرفت‌های ریاضی القا می‌کند که با مکان مجازی و زمان مجازی تفاوت دارد و به مفاهیم مطلق مکان و زمان شبیه‌تر و نزدیک‌تر است. در بعضی مناطق شبکه‌ی شاخه‌های ریاضیات، مکان و زمان فشردگی بیشتری دارد و این دقیقاً مربوط می‌شود به ریاضیاتی که توسط گره‌هایی تولید می‌شود که در کوران ارتباطات علمی قرار دارند.

مفهوم شبکه‌ای ریاضیات و شبکه‌ی مجازی علم و مفاهیم و مسائل مربوط به تکنولوژی اطلاعات منجر به انقلابی در ریاضیات نیز گردیده است و آن ظهور ریاضیات پیچیدگی محاسبه است. در واقع، این مفهوم زمان است که در تئوری‌های ریاضی در حال تجرید پیدا کردن است. در نظریه‌ی پیچیدگی محاسبه یک function داریم که نقش همان زمان را ایفا می‌کند. چنین نگاهی به زمان، تحت تأثیر عصر تکنولوژی اطلاعات شکل گرفته است. مرحله بعدی اینکه این مفهوم جدید زمان که از پیچیدگی محاسبه می‌آید، با مفهوم متناظر مکان که از شبکه‌ی شاخه‌های

ریاضیات و تئوری‌های ریاضی می‌آید ادغام شود و آن عصر ظهور ریاضیاتی است که ساختارهای ریاضی در بستر زمان یا همراه با پیچیدگی محاسبه مورد بررسی و شناخت قرار می‌گیرند و این ریاضیاتی است که در هزاره‌ی سوم میلادی به آن پرداخته خواهد شد.

بررسی فلسفه ریاضی در تک‌تک شاخه‌های ریاضیات که امروز مورد توجه ریاضی‌دانان قرار دارند و پیش‌بینی جهت گیری‌های فلسفی و تئوریک و مهارتی آینده‌ی ریاضیات، موضوع بررسی‌های فصول آینده خواهد بود. اینکه در سراسر قرن بیستم، تحولات فلسفی یا مستقیماً تحت تأثیر ریاضیات بوده است و یا به طور جدی و تمام عیار بر سنت ریاضی تأثیر گذاشته است، نشانه ریشه دار بودن سنت ریاضی در تمام شئونات تمدن بشری است.

فصل ۱۴

گرایش‌های فلسفی رایج در ریاضیات آستانه قرن ۲۱

در قرن نوزدهم، هندسه، جبر و آنالیز سه شاخه‌ی اصلی ریاضیات بودند و ریاضی‌دانان محقق در هر یک از این سه رشته، نگاه و اهداف فلسفی مخصوص به خود را داشتند. در طی قرن بیستم، این شاخه‌ها به شاخه‌های باریک‌تری تقسیم شدند. بعلاوه، بسیاری از شاخه‌های بین رشته‌ای نیز تشکیل گردیدند. هر یک از این شاخه‌ها به حدی از رشد رسیده بودند که مسائل و دیدگاه‌های فلسفی درون آن‌ها برای جهت دهی به آینده‌ی این رشته‌ها کفایت می‌کرد. لذا هر یک از این شاخه‌ها در سراسر قرن بیستم بر پای خود ایستادند و به حیات خود ادامه دادند.

در عصر اطلاعات بر ارتباطات بین رشته‌ای در این شاخه‌های مختلف تأکید شد و محورهای ارتباطی بسیاری بین این شاخه‌ها به وجود آمدند که موجب شد بعضی از شاخه‌ها نسبت به دیگران مرکزیت بیشتری پیدا کنند. این مرکزیت بیشتر از آن که ذاتی باشد، نتیجه‌ی تأکیدات محققان و ذوق و سلیقه‌ی ایشان است. به عبارت دیگر، این محورهای ارتباطی می‌توانستند طور دیگری نیز شکل بگیرند. هر شاخه‌ی ریاضی به عنوان یک گره، هم تحت تأثیر پیشینه‌ی خود و هم تحت تأثیر محورهای ارتباطی آن با دیگر شاخه‌ها فلسفه‌ای مخصوص به خود را شکل داد که خلاصه شده‌ی سلایق و تأکیدات و قراردادهای نوشته نشده‌ی محققان آن گره است.

هر چند این فلسفه‌ها تحت تأثیر محورهای ارتباطی بر یکدیگر تأثیر گذارند، اما هر یک هویت مستقلی دارند. در این جا گره‌هایی را که هویت مشابهی دارند در یک دسته قرار داده‌ایم و گرایشات فلسفی عمده در هر یک از این دسته‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به طور خلاصه، گرایش‌های فلسفی رایج در قرن ۲۱ را اجتماع گرایش‌های فلسفی این گره‌ها می‌دانیم.

منطق و مبانی ریاضی

عده‌ای از منطق‌دانان به جنبه‌های فلسفی منطق و عده‌ای به جنبه‌های ریاضی محض آن و عده‌ای به جنبه‌های کاربردی آن اشتغال دارند. گروه اول به فیلسوفان ریاضی شبیه ترند تا ریاضی‌دانان و شخصیت علمی آنان شخصیت فیلسوفانی است که ریاضیات را به عنوان آزمایشگاه به کار می‌برند تا فلسفه‌های خود را به آزمایش بگذارند. منطق‌دانان محض؛ سعی در ترجمه‌ی مسائل ریاضی به زبان منطق دارند و سپس برای حل این مسائل چون صورتگرایان عمل می‌کنند. با وجود این بسیاری از این مسائل که به کمک منطق حل می‌شوند، تا کنون به روش دیگری حل نشده‌اند. منطق‌دانان کاربردی به منطق محاسباتی اشتغال دارند که مسائل آن عمدتاً با علوم کامپیوتری مشترکند. بسیاری از انقلاب‌های عصر تکنولوژی اطلاعات مدیون خدمات این دانشمندان است. انقلاب‌هایی از این دست نتیجه‌ی خلق زبان، بلکه خلق فرمالیسم، بلکه خلق یک منطق عملی است که سعی می‌کند ابعادی از

توانایی‌های تفکر انسانی را برای کامپیوترها امکان پذیر سازد. تعیین محدوده‌ی توانایی‌های یک چنین فرمالیسمی نیز به عهده‌ی منطق‌دانان محاسباتی است.

روی هم رفته در شاخه‌ی منطق ریاضی، سه گرایش فلسفی مبانی، محض و کاربردی وجود دارد که با یکدیگر رابطه‌ی علّی دارند. چنین ساختار لایه لایه‌ی رسمی در هیچ شاخه‌ی دیگری از ریاضیات وجود ندارد. حداکثر دو وجه محض و کاربردی را بتوان برای بعضی شاخه‌های ریاضیات تصور نمود. منطق دانانی که به هر سه جنبه‌ی منطق علاقمندند و در آن فعالیت دارند، در بین ریاضی‌دانان از لحاظ ساختاری کاملترین شخصیت را دارند.

ترکیبات/ علوم کامپیوتر

ترکیبات می‌توانست نیمی از ریاضیات باشد که به تفکر گسسته در برابر تفکر پیوسته می‌پردازد. چرا که تمام مسائلی را که می‌توان با تفکر پیوسته مدل‌سازی کرد، قابل مدل‌سازی با تفکر گسسته نیز هستند و معمولاً این مدل‌های پیوسته و گسسته یگانه و خداداد نیستند. با این و جود، ترکیبیات کارها چنین بلندنظر نیستند و معمولاً ریاضی-فیزیکدانان هستند که چنین دید بلندی به ترکیبات دارند.

ترکیبات کارها علاقه خود را به مسائل کاربردی تنزل داده‌اند. به خصوص مسائلی که از علوم کامپیوتر ریشه می‌گیرند. هستند ترکیبیات دانانی که از جبر، هندسه یا آنالیز پیشرفته برای حل مسائل خود استفاده می‌کنند، اما عموماً مسئله‌ای که مورد هدف قرار می‌دهند چندان ساختار مند نیست. لذا عقل سلیم و هوش و ابتکار در تحقیقات ایشان بسیار مرکزیت دارد. بیشتر ترکیبات‌دانان کسانی هستند که علاقه دارند مسائل بدون ساختار را ساختارمند نمایند، اما به ساختارهایی که می‌سازند وقتی نمی‌گذارند و به دنبال مسائل بدون ساختار دیگر می‌روند. ریاضیات ترکیباتی از این رو خدمت‌گزار بی‌دریغ عصر تکنولوژی اطلاعات است که با ساختار شبکه‌ای به مطالعه داده‌های بدون ساختار علاقه دارد. بهینه‌سازی گسسته از عمده مهارت‌های ترکیبات‌دانان است که با علوم کامپیوتر اشتراک بسیار دارد. علوم کامپیوتر به خاطر همسایگی با منطق، با طیفی از مسائل فلسفی و محض نیز همسایگی دارند که در عمل طیف مسائل آنان را گسترده‌تر از طیف مسائلی که به ترکیبیات عرضه می‌کنند می‌سازد. جزئی از مسائل علوم کامپیوتر مشابه منطق محاسباتی هستند.

ساختارهای جبری / نظریه‌ی میدان و چند جمله ای‌ها / حلقه‌ها و جبرهای جابجایی حلقه‌ها و جبرهای شرکت‌پذیر / جبر خطی و چند خطی / حلقه‌ها و جبرهای غیر شرکت‌پذیر

جبر می‌توانست شاخه‌ای از ریاضیات به وسعت همه‌ی ریاضیات باشد، اما بیشتر ریاضی‌دانانی که جبردان نیستند این طور فکر می‌کنند تا جبردانان. همه‌ی ریاضی‌دانان گرایش به جبرسازی مسائل خود دارند تا بتوانند به این مسائل با فرمالیسم جبری حمله کنند. جبردانان معمولاً به جای علاقه به روند جبرسازی مسائل، بیشتر علاقه دارند ساختارهای جبری از پیش ساخته شده را مورد مطالعه قرار دهند. هستند جبردانانی که از منطق، نظریه‌ی اعداد، هندسه، حتی آنالیز و توپولوژی برای حل مسائل خود کمک می‌گیرند. در عالم محاسبه و استدلال چون صورتگرایان رفتار کنند و در عالم حدس و جهت‌گیری نسبت به مسائل چون شهودگرایان. این محدود کردن تکنیک‌های تفکر یک بیماری مسری در بین جبردانان است. چرا که حتی زیر شاخه‌های جبر، گرایش به محدود کردن تکنیک‌های حل‌مسئله به زیر شاخه‌ی خود را دارند.

نباید انکارکرد که جبردانان خادمان لایقی برای ریاضیات بوده‌اند. چرا که هر ریاضی‌دانی که مسئله‌ی خود را به زبان جبر ترجمه نماید، می‌تواند از راهنمایی و حمایت جبردانان برای حل آن مسئله‌ی جبری برخوردار شود. معمولاً هم چنین حمایتی به حل‌مسئله می‌انجامد. نگاهی به سرفصل‌های شاخه‌ی جبر روشن می‌کند که طیف مهمی از مسائل جبردانان مطالعه‌ی ساختارهای عددی است. اما ایشان هرگز چنین فیلسوفانه به حرفه‌ی خود نگاه نمی‌کنند. چرا که فیلسوفان ایشان جذب شاخه‌ی دیگری می‌شوند به نام نظریه‌ی اعداد که دیدگاه‌های محدود کننده‌ی جبردانان را ندارند.

نظریه‌ی اعداد

نظریه‌ی اعداددانان به دو طیف فلسفه و ریاضی محض گرایش دارند و معمولاً از مسائل منجر کاربردی بسیار دورند. گرایش فلسفی نظریه اعداددانان که از گرایش آنان به شناخت عدد آغاز می‌شود، منجر به مهارت ایشان در ساختارشناسی می‌شود. منجر به اینکه تقریباً تمام شاخه‌های ریاضی از لحاظ ساختاری مورد بررسی قرار گیرند و در نهایت به درک عدد کمک کنند. در عمل چنین گرایش‌های فلسفی منجر شده که نظریه‌ی اعداد در همسایگی همه‌ی شاخه‌های مهم ریاضی قرار گیرد. این همسایگی معمولاً منجر به خلق مسائل مجرد بین رشته‌ای و توسعه نظریه‌ی اعداد می‌شوند و به ندرت مسائل شاخه‌های همسایه توسط تکنیک‌های نظریه اعداد حل می‌شوند. به همین دلیل نظریه‌ی اعداد را ملکه‌ی ریاضیات می‌دانند.

نظریه‌ی اعداددانان با ساختارشناسی خود مهارت‌های محاسباتی را که از جبردانان به ارث برده‌اند، کامل می‌کنند. مشخصه تحقیقات چنین شخصیت‌هایی مطرح نمودن حدس‌ها و پروژه‌های تحقیقاتی است که تصویر بسیار دقیقی از ریاضیات دوردست ارائه می‌دهند که معمولاً حل کامل مسائل این پروژه‌ها چند نسل از نظریه اعداددانان را درگیر می‌نماید. نتیجه آنکه، نظریه‌ی اعداددانان حتی بیش از منطق‌دانان و البته بهتر از سایر ریاضی‌دانان توانایی مشاهده‌ی دوردست را دارند. ایشان پس از ریاضی– فیزیکدانان بهترین و خلاق‌ترین ساختارسازها هستند، اما این

ساختارها را فقط درون رشته‌ی خود و برای توسعه‌ی آن می سازند. گاهی این ساختارها توسط ریاضی‌دانان دیگر کپی می‌شوند اما به ندرت کارآمدند.

نظریه‌ی گروه‌ها / گروه‌های توپولوژیک و گروه‌های لی

متخصصان نظریه‌ی گروه‌ها را باید از جبردانان متمایز دانست. چرا که گروه یک ساختار تقارنی است و یا ساختارهای عددی تمایز دارد. هر چند که این متخصصان تمامی تکنیک‌های جبری را برای مطالعه ساختارهای تقارنی یا همان گروه‌ها به عاریت می‌گیرند، اما شخصیت عملی ایشان بسیار متفاوت با جبردانان است. عمده‌ی شباهت آنان با جبردانان تفکر اصلی موضوعه‌ای به سبک کتاب اصول اقلیدس است. از این لحاظ، هر دو دسته از اصول‌گرایان محسوب می‌شوند. شباهت دیگر ایشان با جبردانان خدمتگزاری به سایر شاخه‌های ریاضیات است. ریاضی‌دانان همه‌ی شاخه‌های ریاضی برای درک مسائل خود تقارن‌های آن را بررسی می‌کنند و سپس از متخصصان نظریه گروه‌ها کمک می‌گیرند تا با کمک رده بندی‌های خود گروه تقارن مورد نظر را مشخص کنند و درباره‌ی آن اطلاعاتی بدهند.

عمده‌ی نتایج نظریه‌ی گروه‌ها از نوع رده‌بندی همه‌ی مثال‌هایی است که در یکسری اصول موضوعه صدق می‌کنند و برخلاف انتظار چندان با مفهوم تقارن درگیر نیستند. در مسائل رده‌بندی در ریاضیات، معمولاً باید از متخصصان نظریه گروه‌ها یا لااقل از خود نظریه‌ی گروه‌ها استفاده کرد. درک ریاضی–فیزیک‌دانان از تقارن عمیق‌تر از درک متخصصان نظریه‌ی گروه‌ها و سایر ریاضی‌دانان است، با این حال این درک از چارچوب اصول‌گرایی فراتر نمی‌رود. نظریه‌ی گروه‌های متناهی پیچیده‌ترین قسمت این شاخه است که در خدمت ترکیبیات و نظریه‌ی اعداد قرار دارد.

نظریه‌ی رسته‌ها / نظریه‌ی K

ساختارشناس‌تر از نظریه اعداددانان، متخصصان نظریه‌ی رسته‌ها هستند. ایشان سعی می‌کنند ساختارها را از طریق نگاشت‌های حافظ ساختار شناسایی کنند. این برنامه مطالعاتی در شاخه‌ی جبر و بازسازی مفهوم فضا در هندسه ناجابجایی به اجرا گذاشته شده، اما پرکاربردترین صحنه برای این برنامه مطالعاتی همواره هندسه‌ی جبری بوده است. از لحاظ تجرید فرمالیسم، نظریه‌ی رسته‌ها به منطق شباهت‌هایی دارد. ساختارسازی در این شاخه پرشورتر از همه‌ی شاخه‌های دیگر بوده است، چرا که متخصصان نظریه‌ی رسته‌ها سعی دارند تمام خصوصیات درونی ساختارها را به زبان نگاشت‌های حافظ ساختار ترجمه کنند.

چنین برنامه‌ای می‌تواند تمام ریاضیات را دربگیرد. گویی در نظریه‌ی رسته‌ها به جامعه شناسی ساختارها توجه داریم و در نظریه‌های دیگر به روانشناسی ساختارها. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم در نظریه رسته‌ها برون شناسی می‌کنیم و در شاخه‌های دیگر درون شناسی مورد تأکید است. شباهت‌های فرمالیسم نظریه رسته‌ها و منطق زمینه‌ی کاربرد نظریه‌ی رسته‌ها در منطق را نیز فراهم کرده است. اما این شاخه نه ابعاد فلسفی متخصصانش را به کار می‌گیرد و نه به ابعاد کاربردی توجه دارد. متخصصان نظریه‌ی رسته سعی می‌کنند هر حکمی را در کلی‌ترین حالت ممکن در نظر بگیرند. تعمیم در این شاخه معنایی فراتر از دیگر شاخه‌ها دارد که در آن‌ها به دنبال حکمی می‌گردند که حکم اولیه حالت خاص آن باشد. در نظریه‌ی رسته‌ها سعی می‌کنند کُنه یک گزاره را با پیدا کردن کلی‌ترین صورت آن درک کنند، نه با مثال‌های مهم.

هندسه‌ی جبری / هندسه حسابی

تفکر جبری، هندسی و آنالیزی هر سه در هندسه جبری جایگاهی رفیع دارند، لذا این رشته مانند نظریه اعداد تقریباً تمام شاخه‌های ریاضی را در همسایگی خود دارد. برای ریاضی‌دانی که مهارت‌های هر شاخه‌ای از ریاضیات را کسب کرده باشد، جایی در هندسه جبری پیدا می‌شود. لذا می‌توان گفت هندسه‌ی جبری شاخه‌ی عظیمی است که محصول مشترک همکاری انواع مختلفی از دیدگاه‌های ریاضی است. پس هندسه‌ی جبری از لحاظ ساختار مهارتی لازم برای تحقیق در آن، همه‌ی ریاضیات را شامل می‌شود. هرزچندگاه، انقلابی زبانی در فرمول‌بندی هندسه‌ی جبری رخ می‌دهد تا این شاخه بتواند انعطاف بیشتری در جذب شاخه‌های دیگر نشان بدهد. برخلاف نظریه‌ی اعداد، تقریباً همیشه همسایگی هندسه جبری با دیگر شاخه‌های ریاضی موجب حل مسائل آن شاخه‌ها می‌شود و این دلیل روی آوردن ریاضی‌دانان به هندسه‌ی جبری است.

علت موفقیت این شاخه در حل مسائل ریاضی در کنار هم آوردن شهود هندسی در کنار ساختارشناسی جبری است. حتی بسیاری از مسائل کاربردی به مسائلی محض در هندسه جبری قابل تحویلند. تفکر فلسفی جز در ارائه استراتژی‌های حل‌مسئله در این شاخه بسیار کمرنگ است. ترکیب هندسه جبری و نظریه اعداد منجر به شاخه‌ی هندسه حسابی می‌شود که برنامه‌ی حسابی‌سازی ریاضیات را به اوج خود می‌رساند. در این شاخه، توانمندی هندسه جبری و منفعت طلبی نظریه‌ی اعداد در یک قالب ریخته می‌شود. فلسفه‌ی کلی در هندسه‌ی حسابی این است که هر حقیقت هندسی صورتی حسابی دارد. شاید بتوان گفت که این بزرگترین پروژه‌ی تحقیقی ریاضی است.

هندسه / هندسه محدب و گسسته / هندسه دیفرانسیل / خمینه‌ها / آنالیز روی خمینه‌ها

هندسه بر شهود تکیه می‌زند و هندسه‌دانان هر چند که از محاسبات استفاده می‌کنند بیشتر سعی دارند که مسئله را چنان ببینند و چنان بازسازی کنند که شهود ایشان بتواند درگیر شود. مهم‌ترین مهارت هندسه دانان، کشف هندسه‌ی طبیعی یک مسئله است. این همان کاری است که جبردانان در رشته‌ی خود به آن علاقه ندارند، یعنی به جبری‌سازی پدیده‌های ریاضی نمی‌پردازند. علاقه‌ی هندسه‌دانان به فرآیند هندسی‌سازی منجر به همسایگی هندسه با تقریباً همه‌ی ریاضیات شده است. حتی در حل مسائل هندسه توسط تکنیک‌های هندسی همین هندسی‌سازی از مهم‌ترین تکنیک‌هاست.

هندسه بیش از هر شاخه دیگری با فلسفه‌ی شهودگرایی مرتبط است. مفهوم فضا مرکزی‌ترین مفهوم در هندسه است که اهمیت آن از ارتباط هندسه با ریاضی– فیزیک سرچشمه گرفته است. از این لحاظ هندسه با فلسفه‌ی فیزیک نزدیکی دارد. مسائل کاربردی معمولاً پیچیده نیستند که شهود هندسی در حل آن‌ها کارآمد باشد. لذا هندسه نیز مانند هندسه جبری شاخه‌ای است محض که نه به فلسفه و نه به کاربرد گرایش دارد. جریان مفاهیم هندسی در کنار جریان مفاهیم عددی دو جریان اصلی تاریخ ریاضیات هستند. هندسی‌سازی و عددمند کردن که همان جبری‌سازی است دو تکنیک متمم برای حل‌مسئله هستند. اینکه هندسه و فلسفه با هم متولد شده‌اند و فلسفه‌ی اعداد مستقلاً از دین بیرون کشیده شده تأثیری بر فلسفی شدن هندسه و یا دینی شدن نظریه اعداد نداشته است. همسایگی هندسه با دیگر شاخه‌ها معمولاً منجر به حل مسائل آن شاخه‌ها می‌شود؛ درست مثل هندسه‌ی جبری.

سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های دینامیکی هندسه را با زمان ترکیب می‌کند. لذا درست در همسایگی طبیعت قرار دارد. برای مثال علم مکانیک سماوی از این دست است. معادلات دیفرانسیل و ریاضیات آنالیزی همسایگی آن، همواره در خدمت سیستم‌های دینامیکی قرار دارند. شاید بتوان گفت سیستم‌های دینامیکی، همان نظریه‌ی کیفی یا بررسی هندسی معادلات دیفرانسیل است. متخصصان سیستم‌ها پدیده‌ی تحول را مورد مطالعه قرار می‌دهند و هندسه‌ی سرنوشت نقاط برایشان اهمیت دارد. تفکر پیوسته و گسسته هم زمان مورد تأکید است و از این لحاظ در کنار هندسه جبری و نظریه اعداد و ریاضی– فیزیک قرار دارد. تحولات مورد بررسی سیستم‌های دینامیکی، هندسی هستند نه ساختاری. لذا مشابه نظریه‌ی اعداد این عمل نیز می‌توانست وجود داشته باشد.

متخصصان سیستم‌های دینامیکی مانند جبردانان به هندسی‌سازی علاقمند نیستند و خود را محدود به تکنیک‌های آنالیزی و هندسی درون رشته‌ای می‌کنند. به همین دلیل، مکان در کنار زمان فقط در سیستم‌های دینامیکی و ریاضی– فیزیک که سرچشمه‌ی آن است مطرح می‌شود و به تمامی ریاضیات توسعه داده نشده است. هر چند عصر اطلاعات و نظریه‌ی پیچیدگی محاسبه سرانجام ساختارهای ریاضی را در برابر مفاهیم زمان مجازی قرار خواهند داد. کامپیوتر به رشد این شاخه کمک شایانی نموده است.

متخصصان سیستم‌های دینامیکی باید هم‌زمان هندسه‌دان و آنالیزدان باشند تا بتوانند تکنیک‌های این دو را برای حل مسائل سیستم‌های دینامیکی ترکیب نمایند. به خاطر نزدیکی با طبیعت، سیستم‌های دینامیکی هم به عنوان یک شاخه‌ی محض و هم به عنوان یک شاخه‌ی کاربردی مطرح می‌شود.

ریاضی– فیزیک

ریاضی– فیزیک سرچشمه‌ی بسیاری از ایده‌های نو در ریاضیات بوده است. از آنجا که ریاضی– فیزیکدانان ریاضیات را برای پیش‌بینی پدیده‌های طبیعی به کار می‌بردند و به ساختارهای پشت‌صحنه اصالت نمی‌دادند، در خلق ساختارهای ریاضی جدید که خواص از پیش تعیین شده داشته باشند، ماهرترین ریاضی‌دانان هستند. تمام مسائلی که در همسایگی طبیعت قرار می‌گیرد، مورد توجه ریاضی– فیزیکدانان هستند و از تمام ریاضیات برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی استفاده می‌کنند.

پس ایده‌های تمام رشته‌های ریاضی منجر به خلق ساختارهای ریاضی جدیدی به وسیله‌ی ریاضی– فیزیک می‌شوند که می‌توانند در همان شاخه‌ها مطالعه شوند. لذا ریاضی– فیزیک بدون آن که همسایه‌ی همه‌ی شاخه‌ها باشد، برای همه‌ی آن‌ها سرچشمه‌ی زاینده‌ای از مسئله و ساختار است و این ساختارهای جدید و مطالعه آن‌ها پیوسته منجر به انقلاب‌های درونی در این شاخه‌ها می‌گردد.

ریاضی– فیزیکدانان نیاز دارند که از همه‌ی ریاضیات سر در بیاورند تا بتوانند خلاقیت بیشتری از خود نشان دهند. شاخه‌هایی که در حل مسائل ریاضی– فیزیک بسیار کارآمدند هندسه جبری، سیستم‌های دینامیکی، هندسه و نظریه‌ی گروه‌های لی هستند. تفکر گسسته موازی تفکر پیوسته در ریاضی– فیزیک مورد تأکید است و این ریاضی– فیزیکدانان را به اشخاصی چندین بعدی تبدیل می‌کند. به علت همسایگی با فیزیک، ریاضی– فیزیکدانان به شدت فلسفی هستند و به علت کار با مسائل طبیعی، ریاضی– فیزیک به کاربرد بسیار نزدیک است. لذا پس از منطق دانان، ریاضی– فیزیکدانان از لحاظ ساختاری کاملترین شخصیت را دارند.

توابع حقیقی و نظریه‌ی اندازه/ نظریه احتمال

در آنالیز حقیقی که عمده مسائل آن از حسابان برانگیخته شده‌اند، دست و پنجه نرم کردن با همگرایی و واگرایی مانند همه‌ی دیگر شاخه‌های آنالیز مرکزیت پیدا کرده است. یک آنالیزدان مانند جبردان به تکنیک‌های محاسباتی رشته‌ی آنالیز خود را محدود می‌نماید تا مسائلی را که به این زبان ترجمه شده‌اند حل نماید. در واقع، آنالیز از دیدگاه محاسباتی همان جبر است که به جای مجموع‌های متناهی با سری‌ها سرو کار دارد. مفاهیم توپولوژی برای رفع مشکلات همگرایی معمولاً بسیار کارآمدند. برخلاف جبردانان، آنالیزدانان به ساختارشناسی چنان

توجهی ندارند و خلق ساختارها به ندرت در این رشته مورد توجه قرار می‌گیرد. آنالیزدانان مانند جبردانان به تفکر اصل موضوعه‌ای علاقه دارند و فلسفه‌ی این رشته بیش از همه به اصول‌گرایی نزدیک است.

در آنالیز حقیقی، سال‌های بحران دقت ریاضی، ریاضی‌دانان این شاخه را تحت تأثیر قرار داده بود. آثار بحران هنوز در وسواس‌های محاسباتی این ریاضی‌دانان آشکار است. آنالیز حقیقی از طریق نظریه‌ی توابع با تقریباً همه‌ی شاخه‌های ریاضیات مرتبط است و آن شبیه ارتباط جبر با شاخه‌های ریاضی توسط جبری‌سازی مسائل آن‌هاست. دقت در محاسبات، تعبیرات مختلف عبارت‌های جبری، شهود محاسباتی از مهارت‌های عمده‌ی آنالیزدانان است. آنالیز حقیقی که بر اثر کشتی‌گیری با مفهوم بی‌نهایت به وجود آمده است همواره سعی دارد خود را در همسایگی این مفهوم نگه دارد. لذا آنالیزدانان را می‌توان ریاضی‌دانانی دانست که در مرزهای بی‌نهایت بندبازی می‌کنند.

توابع مختلط و فضاهای مختلط

آنالیز مختلط چیزی بین آنالیز حقیقی و شاخه‌ی PDE است. چرا که توابع تحلیلی در یک PDE صدق می‌کنند. از این لحاظ حوزه آنالیز مختلط محدودتر از آنالیز حقیقی است، ولی از لحاظ ساختاری ساختارمندتر است. چون اشیاء محدودتری را مورد بررسی قرار می‌دهد. شخصیت آنالیز مختلط‌دانان چیزی بین آنالیز حقیقی‌دانان و معادلات دیفرانسیل‌کاران است. معمولاً اگر آنالیز مختلط با شاخه‌ای ارتباط پیدا کند، ارتباط آن عمیق‌تر از آنالیز حقیقی است. چون ساختار مندتر است. به دلیل همسایگی با PDE ایده‌های بیشتری را نسبت به آنالیز حقیقی وارد ریاضیات کرده است.

نزدیک‌ترین شاخه به آنالیز مختلط هندسه مختلط است که مفهوم فضا را از خمینه‌ی حقیقی به خمینه‌ی مختلط تعمیم داده است و سعی می‌کند تکنیک‌های آنالیزی را با حقایق هندسی پیوند دهد. آنالیزدانان مختلط به آنالیز مربطو به حل PDE بیشتر توجه دارند؛ هر چند چنین دیدگاهی به آنالیز مختلط آن را به زیرشاخه‌ای از PDE قرار می‌دهد؛ هم چنان که دیدگاه پیشین آن را زیر شاخه‌ای از هندسه می‌ساخت. آنالیزدانان به حقایق جبری بیشتری تأکید دارند تا شهود هندسی، هر چند چنین شهودی بعضاً در اختیارشان قرار دارد. بحران‌های دقت ریاضی در این شاخه تأکید آنالیزدانان را به روش‌های جبری استدلال جلب می‌نماید. اعداد مختلط به چهارگان‌ها نیز تعمیم داده شده‌اند که منجر به آنالیز مشابهی شده است که در هندسه هم وارد شده است. لذا می‌توان گفت این شاخه از هدایای مطالعه‌ی ساختارهای عددی به آنالیز حقیقی است.

ODE/ PDE/ آنالیز تابعی

معادلات دیفرانسیل به طور سنتی نزدیک‌ترین شاخه به فیزیک– ریاضی و لذا از سرچشمه‌های اصلی ایده‌های جدید در ریاضیات به خصوص هندسه است. متخصصان آنالیز ریاضی، علاقه‌ای به ترجمه‌ی مسائل شاخه‌های دیگر به زبان آنالیز ندارند، در صورتی که متخصصان معادلات دیفرانسیل بر این مهارت تأکید دارند. همانند ریاضی– فیزیک، معادلات دیفرانسیل در همسایگی کاربرد قرار دارد و لذا از رشته‌هایی است که دو وجه محض و کاربردی دارند. آنالیز عددی از شاخه‌هایی است که در همسایگی کاربردی معادلات دیفرانسیل قرار دارند. معادلات دیفرانسیل مهم‌ترین و موفق‌ترین حربه‌ی ریاضی‌دانان در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی است.

تلاش برای حل معادلات دیفرانسیل منجر به خلق چندین رشته در آنالیز از جمله آنالیز تابعی گردیده است. معادلات دیفرانسیل تصادفی در اشتراک معادلات و آنالیز حقیقی قرار دارد که موفقیت مدل‌سازی این رشته را دو چندان نموده است. حل معادلات دیفرانسیل خاص که در طبیعت ظاهر می‌شوند مورد توجه متخصصان این رشته است. صورت گسسته معادلات دیفرانسیل که معادلات تفاضلی نام دارد، در حل عددی تقریبی این معادلات کارآمد است. لذا در کنار ریاضی– فیزیک و هندسه جبری، نظریه اعداد و سیستم‌های دینامیکی که خود بسیار به معادلات دیفرانسیل نزدیک است، از جمله رشته‌هایی است که به تفکر پیوسته و گسسته هر دو توجه دارد.

نظریه‌ی کنترل و بهینه‌سازی / آنالیز عددی / تحقیق در عملیات

آنالیز عددی جزو شاخه‌های ریاضیات کاربردی محسوب می‌شود. متخصصان آنالیز عددی مهارت‌های آنالیز حقیقی‌دانان را در مسائلی عددی کاربردی مورد استفاده قرار می‌دهند. حل عددی معادلات دیفرانسیل، این شاخه را به معادلات دیفرانسیل نزدیک می‌کند. محاسبات خطا و انتشار آن، شهود عددی این متخصصان را قویتر از دیگر ریاضی‌دانان نموده است. ایشان در ارائه یک مدل گسسته از یک مسئله‌ی پیوسته مهارت دارند و می‌توانند برای یک مسئله پیوسته چندین مدل گسسته ارائه دهند. این شاخه بیش از دیگر شاخه‌های ریاضیات در رشته‌های مهندسی کاربرد دارد. تفکر الگوریتمی برای پیدا کردن ساده‌ترین راه برای بهترین تخمین عددی این شاخه را به علوم کامپیوتر نزدیک کرده است. اما تفکر الگوریتمی به تنهایی و نه در کنار ساختارشناسی مورد توجه متخصصان آنالیز عددی است.

عصر کامپیوتر این شاخه‌ی ریاضیات را به کلی دگرگون کرده است. چرا که محاسبات الگوریتمی توسط کامپیوتر انجام می‌شوند و سرعت کامپیوتر استفاده از بسیاری از الگوریتم‌ها را ممکن می‌سازد که در محاسبات دستی قابل قبول نیستند. مسائل بهینه‌سازی و آنالیز عددی بعضی از مسائل محض را نیز مطرح می‌کنند که آنالیز حقیقی‌دانان را به خود مشغول می‌کنند. لذا می‌توان گفت که آنالیز عددی و شاخه‌های مجاور آن همانند معادلات دیفرانسیل سرچشمه‌ای از ایده‌های ناب در ریاضیات هستند. شاید بتوان فلسفه‌ای نیز در این رابطه ارائه کرد. اینکه ایده‌های عمیق آن‌هایی هستند که محاسبات را به طور نابدیهی کم می‌کنند. فلسفه‌ای که بسیار تحت تأثیر عصر اطلاعات است.

فصل ۱۵

نگاهی به آینده‌ی ریاضیات

هر چند تحولات آینده‌ی ریاضیات غیر قابل پیش‌بینی است، می‌توان ساختارهای اجتماعی موجود را مانند یک سیستم دینامیکی تصور نمود که تأثیرات خود را توسعه خواهند داد و تا قبل از ظهور انقلاب‌هایی که هنوز طبیعت آن‌ها را نمی‌دانیم، تاریخ نیامده‌ی ریاضیات را تا حدودی تقریب زد. هر چند نمی‌توانیم بدانیم این تقریب‌ها با چه خطایی صحیح هستند و تا چه حوزه‌ی زمانی اعتبار خواهند داشت، اما منجر به مفهوم‌سازی‌هایی خواهند شد که تصویری از آینده را در ذهن ما به وجود خواهند آورد. در هر حال هیچ کس هرگز آینده را ندیده است و مفهوم آینده خود از مجردسازی حال-گذشته، حال– اکنون و حال– آینده به دست آمده است. در واقع، مفهوم آینده خود مفهومی است که مانند ریاضیات از ایده‌آل‌سازی به وجود آمده است، پس چگونه می‌توان تصوری از آینده ساخت که محتوای آن جز ایده‌آل‌سازی باشد. لذا تصوری که از آینده‌ی ریاضیات در این نوشته مطرح خواهد شد، حداکثر یک ایده‌آل‌سازی آینده‌ی حقیقی خواهد بود، به طوری که چنین مفهوم‌سازی‌هایی قابل تجرید از آینده باشند، اما نه اینکه آینده را به طور یکتا مشخص کنند.

طبعاً تحلیل ما از آینده که چیزی شبیه تقریب خطی حال است، با تقریب خطی عصر اطلاعات به دست خواهد آمد. لذا مفهوم تحقیق گروهی و شبکه مجازی و ابعاد اجتماعی امّا مجازی علم هم نقش عمده‌ای در شکل دادن به آینده ایفا خواهند کرد. پس از پیش‌بینی آینده، به نقد این پیش‌بینی خواهیم پرداخت. اینکه چه عواملی ممکن است مانع حرکت به این آینده‌ی فرضی شود و یا حرکت به آن سمت و سو را از جایی به بعد محدود کنند.

رده بندی شخصیت‌های درگیر در تحقیق گروهی

توسعه‌ی گرایش به تحقیق در جامعه‌ی مجازی، منجر به این خواهد شد که هویت‌های درگیر در یک تحقیق دسته جمعی بیش‌تر و بیش‌تر شکل بگیرند و صلب و از پیش تعیین شده گردند. لذا شخصیت‌های درگیر در یک تحقیق دسته جمعی باید رده‌بندی شوند تا بلکه این هویت‌های مجازی را پیش‌بینی کنند. این شخصیت‌های دگیر، در تحقیق فردی نیز خود را نشان می‌دهند، اما همه در درون فرد محقق تعامل می‌کنند. لذا با بررسی چندین شخصیت محقق می‌توان این هویت‌ها را رده‌بندی کرد.

با یک نگاه می‌توان دید که تأکیدات محققین بر ابعاد مختلف تحقیق یکسان نیست. مثلاً عده‌ای به محاسبات تأکید دارند و عده‌ای به استدلال‌های زیبا و عده‌ای به استدلال‌هایی که ذات مسئله را آشکار کنند و در مورد ابعاد پنهان آن اطلاعات بدهند. عده‌ای به ساختار مفهومی و تئوریک حاکم بر موضوع مورد مطالعه تأکید دارند و عده‌ای از یک مدل مشابه استفاده می‌کنند و عده‌ای با تفکرات فلسفی پیشرفت تحقیق را مورد پیش‌بینی قرار می‌دهند. همه‌ی این استراتژی‌های تحقیقی در یک تحقیق گروهی قابلیت ظهور دارند.

ممکن است کسی بگوید که همه‌ی این موارد لزوماً در یک تحقیق ظاهر نمی‌شوند، اما می‌توان شخصیت‌های درگیر در تحقیق را چنان رده‌بندی کرد و دسته‌ای از این استراتژی‌ها را به هر شخصیت چنان نسبت داد که این شخصیت‌ها تصویر خوبی از آنچه در ذهن فرد محقق می‌گذرد یا تصویر خوبی از ناخودآگاه جمعی یک گروه از محققین ارائه دهند. چنین تجریدی از شخصیت‌های درگیر حاصل زحمت یک ذهن فیلسوف نخواهد بود، بلکه حاصل تعاملات شبکه‌ای جوامع مجازی است.

رده بندی شخصیت‌های تئوری ساز و شخصیت‌های مسئله حل کن

حال سعی می‌کنیم این رده‌بندی طبیعی را از پیش حدس بزنیم. دو گروه عمده یا دو فلسفه‌ی عمده در رابطه با تحقیق که توسط محققین احراز می‌شود، تأکید به تئوری‌سازی و تأکید به حل مسئله است. عده‌ای موتور محرک تحقیق را حل مسائل کلیدی می‌دانند و ارزشیابی آن‌ها از محتوای یک مقاله، بر درجه‌ی سختی و مرکزیت مسائل مورد بررسی در آن مقاله استوار است. در برابر گروهی دیگر به ساختارهای تئوریک غنی در ارزشیابی تحقیقات تأکید دارند و موتور حرکت تحقیق را تئوری پردازی می‌دانند. شناخت شخصیت‌های درگیر در تئوری پردازی و حل مسئله، کلید رده‌بندی شخصیت‌های درگیر در تحقیق گروهی خواهد بود. شاید بتوان شخصیت‌های تئوری پرداز را در مدیریت تحقیق و شخصیت‌های مسئله حل کن را در اجرای طرح تحقیقاتی دخیل دانست.

با این دیدگاه، تولید ریاضیات مشابه روند تولید یک حقیقت مجازی مانند فیلم سینمایی قابل تصور خواهد شد که ابعاد هنری، فرهنگی، اجتماعی خاصی در آن دخیل می‌شوند. مدیر تولید، کارگران، طراح پروژه از شخصیت‌هایی هستند که می‌توانند در رده‌بندی شخصیت‌های مدیریت کننده تحقیق ریاضی نام برده شوند. مسئله حل کن‌ها که شامل همه‌ی شخصیت‌های مربوط به استراتژی‌های حل مسئله می‌شوند، در رده‌بندی شخصیت‌های اجرایی یک تحقیق ریاضی به کار می‌آیند. در آموزش ریاضی سعی شده است این شخصیت‌ها بازشناسی و متمایز شوند. در شناخت شخصیت‌های مسئله حل کن پیشرفت‌های زیادی حاصل شده است، اما شخصیت‌هایی که فکر را مدیریت می‌کنند هنوز چندان شناخته شده نیست.

مدیریت تحقیق / کارگران

مدیر تحقیق مهم‌ترین مسئولیت مدیریتی یک تحقیق گروهی را بر عهده خواهد داشت. انتخاب طرح تحقیق و عوامل دیگر مدیریتی و اجرائی و مدیریت اجرا با همکاری گروه مدیریت وظایف مدیر تحقیق را تشکیل می‌دهند. مدیر تحقیق باید در تمام قسمت‌های مدیریتی زیر دست خود و سیستم‌های اجرائی مهم سابقه‌ی تحقیق داشته باشد تا بتواند وظایف خود را به خوبی به انجام رساند. تسلط به مباحث ریاضی مربوط به موضوع تحقیق و تسلط به فلسفه‌های ریاضی حمایت کننده‌ی تحقیق، دو مهارت غیر قابل جایگزین مدیر تحقیق محسوب می‌شوند. وظایف

مدیر تحقیق بسیار شبیه وظایف یک کارگردان سینمایی است که سعی می‌کند داستانی مجازی را به تصویر بکشد که همه‌ی ابعاد حقیقت در آن رعایت شده باشند.

مدیر تحقیق، مدیریت خلق ریاضیات را به عهده دارد و باید مطمئن شود که استانداردهای تولیدات گروه او با استانداردهایی که در طی تاریخ ریاضیات به طور تدریجی شکل گرفته‌اند تطابق دارد. پس از پایان تحقیق مدیریت نوشته شدن تحقیق، به طور که همگن و هماهنگ باشد، چیزی شبیه مرحله‌ی مونتاژ فیلم است که پس از فیلمبرداری صورت می‌گیرد. ارتباط علمی محققان با متخصصانی که جزو گروه نیستند ولی تجربه‌ی تحقیق در این زمینه را دارند و هم چنین ارتباط با جوامع مختلفی که چنین تجربه‌ای دارند باید زیر نظر مدیر تحقیق صورت بگیرد. ممکن است مدیر تحقیق تیم تحقیق خود را به چند گروه تقسیم کند و ارتباط علمی بین این گروه‌ها را خود هدایت کند و کار این زیرگروه‌ها را به مدیران آن‌ها بسپارد.

منشی‌گری تحقیق / مدیر تولید

منشی تحقیق دستیار مدیر تحقیق است و روی کاغذ آوردن و به اجرا گذاشتن دستورات مدیر تحقیق و جمع آوری اطلاعات مورد نیاز او به عهده منشی تحقیق می‌باشد. سیستم اقتصادی تحقیق نیز بر دوش منشی تحقیق است. او باید مطمئن شود دستمزد عوامل مختلف تحقیق به موقع پرداخت می‌شود و اینکه همگی به وظایف محوله توسط مدیر تحقیق اشتغال دارند. منشیگری تحقیق بالاترین مسئولیت مدیریتی پس از مدیر تحقیق است و لذا تمام مهارت‌های مدیر تحقیق را منشی او باید تا حد خوبی دارا باشد. منشی تحقیق پس از کسب تجربه و تأیید مدیرانی که زیر نظر آنان کار کرده است به مقام مدیر تحقیق ارتقاء پیدا خواهد کرد.

از مهم‌ترین و سخت‌ترین وظایف منشی تحقیق کنترل زمانی روند تحقیق است. چرا که نظام اقتصادی شرایطی زمانی را نیز به گروه مدیریت تحقیق تحمیل خواهد نمود. منشی موظف است در صورت ناکارآمدی عوامل تحقیق، مراتب را به مدیر تحقیق گزارش دهد تا او در مورد جایگزینی این عوامل تصمیمی اتخاذ نماید. تبدیل طرح پروژه به یک سیستم اجرائی همراه با یک برنامه‌ی اجرایی نیز به عهده‌ی منشی است. چرا که طراح پروژه قبل از انتخاب عوامل، روند تحقیق را طراحی می‌کند و نمی‌تواند شرایط اجرائی را که منشی از آن‌ها مطلع است از پیش حدس بزند و در طراحی خود مدنظر قرار دهد. لذا منشی باید از طراح در طرح پروژه ماهرتر باشد. پس قبل از احراز سمت منشی، احراز سمت طراح پروژه باید در سابقه کار او قرار بگیرد.

طراح پروژه‌ی تحقیقی

طراح یک پروژه تحقیقی، یک فیلسوف تمام عیار، یک محقق با تجربه، و یک استراتژیست علمی است. طراحی پروژه‌ای که در یک گروه قابل اجرا باشد و با ایفای نقش هویت‌های فردی، اهداف طرح تحقق پیدا کند، نه تنها به طرح پروژه‌ای با سابقه‌ی تحقیقی طولانی احتیاج دارد، بلکه سابقه‌ی کار گروهی روی مسائل در بسترهای متنوعی لازمه چنین طرحی است.

بدون دیدگاه تئوریک نسبت به مسئله تحقیق طراحی کار گروهی ممکن نیست. مگر اینکه طراح پروژه، راه حل مسئله مورد نظر را کم و بیش بداند و این چیزی نیست که مورد نظر ماست. چرا که در این فرمول‌بندی از کار گروهی، قرار است خلاقیت جمعی جای خلاقیت فردی را بگیرد و اگر همه چیز از پیش تعیین شده باشد، دیگر جایی برای خلاقیت نمی‌ماند. هنر طرح پروژه‌ی تحقیقی نیز همین است که تسلط او به مبانی فلسفی مسئله چنان قوی است که می‌توان بدون اینکه راه حل را بداند یا حدس بزند، با کمک استدلال‌های فلسفی بفهمد که برقراری چه ارتباطات مفهومی منجر به حل مسئله خواهد بود و یا به عبارت دیگر کلید درک روابط مفهومی مطرح در مسئله پاسخ به چه سؤالی است.

باید تذکر داد که هر طرح تحقیقی قابل اجرا توسط هر مدیر تحقیقی نیست. نه تنها تجربه تحقیق در موضوع طرح لازم است، بلکه دسترسی به عوامل اجرایی توانا و منشی تحقیقی که بتواند از عهده‌ی کنترل‌های لازم برآید یک شرط اولیه است. به علاوه، همان طور که یک کارگردان فیلم‌نامه‌ی فیلم خود را انتخاب می‌کند، یک طرح تحقیقی نیز توسط طراح به یک مدیر تحقیق پیشنهاد می‌شود.

خلاقیت مدرن

خلاقیت در عصر اطلاعات را پیش از این مورد بررسی قرار دادیم. طبیعت این خلاقیت این است که نوآوری با معرفی به شبکه و به اجرا گذاشته شدن مورد امتحان قرار می‌گیرد. با این حال خلاقیتی که در عصر اطلاعات مورد بررسی قرار گرفت، خلاقیت فردی است. در صورتی که خلاقیت مدرن که در جوامع علمی آینده و به خصوص در جوامع ریاضی پیش‌بینی می‌کنیم، یک خلاقیت اجتماعی است. خلاقیت مدرن دارای موضوع از پیش تعیین شده‌ای توسط طراح پروژه است و سپس مدیر تحقیق افراد مناسبی را با توجه به هویت‌هایی که در طرح پیش‌بینی شده، چنان انتخاب می‌نماید که هم‌فکری آنان در آن موضوع خاص را در زمینه‌ی مناسبی برای خلق جمعی در جهت اهداف طرح بداند. اگر افرادی که مدیر تحقیق انتخاب کرد موفق به خلاقیت جمعی نشدند، بر عهده‌ی اوست که بعضی نقش‌ها را با افراد مناسب‌تر جایگزین نماید تا پدیده‌ی خلق جمعی روی دهد. این همان پدیده‌ای است که در تفکر گروهی هنگام حل مسئله اتفاق می‌افتد و در واقع پدیده‌ای است که نتیجه‌ی همکاری گروهی دانشمندان در عصر اطلاعات می‌باشد.

سؤال اینکه، آیا فرم مدرن تحقیق و طبیعت خلاقیت مدرن جهت‌گیری علم و علی‌الخصوص جهت‌گیری ریاضیات را عوض خواهد کرد؟ دلایلی خواهیم آورد که نشان دهیم چنین نیست و ریاضیات به مفهوم سنتی آن همواره زنده خواهد ماند. نکته کلیدی اینکه بازگشت به سنت چرا و در چه شرایطی صورت خواهد گرفت.

فلسفه مدرن در خدمت حرفه‌ها و هویت

فلسفه در عصر اطلاعات تخصصی‌تر شده است. به این معنی که هر یک از شاخه‌های ریاضی دیدگاه‌های فلسفی خاص خود را شکل دادند و با کمک همان دیدگاه‌های فلسفی به پیشرفت خود ادامه دادند. این اتفاق در شاخه‌های مختلف علوم نیز به همین شکل صورت پذیرفت. در عصر اطلاعات جوامع مجازی با توجه به اهداف خود که همان شاخه‌های مختلف علمی باشد، فلسفه‌ای برای خود تعبیه می‌کنند که روند کار گروهی را روان‌تر سازد. اما در عصر خلاقیت جمعی، حتی مسئولیت‌های تحقیقی مربوط به یک شاخه بین افراد مختلف تقسیم می‌شود و کم‌کم افرادی در این نقش‌های اجتماعی متخصص و متبحر می‌شوند. این تبحر ایجاب می‌کند که هر یک از این هویت‌های مجازی فلسفه‌ای تعبیه کنند که ایفای نقش آنان را آسان سازد.

همچنان که در عصر پدیده‌های اجتماعی، هر شغلی فلسفه خاص خود را تدوین می‌نماید، در جامعه مجازی هر هویت مجازی فلسفه خاص خود را به دست می‌دهد. مدیریت تحقیق باید یک طور فکر کند تا موفق شود و طراح پروژه طور دیگری و عوامل اجرائی نیز به نوبه‌ی خود باید فلسفه‌های متفاوتی داشته باشند. انسان چند هویتی عصر اطلاعات که با هر هویتی مجازی در جامعه‌ای مجازی درگیر خواهد شد، به واسطه‌ی هر کدام از این هویت‌ها به فلسفه‌ای تعلق پیدا خواهد کرد که لزوماً این فلسفه‌ها با هم هماهنگ نیستند و با حقیقت این انسان هماهنگی ندارند. جا دارد چنین فلسفه‌هایی را فلسفه‌های مجازی بنامیم که فرد چندی به بهانه‌ی هویتی درگیرشان خواهد بود.

تحقیقات گروهی به روش سنتی

سؤال اینکه، پس از تشکیل ساختارهای مجازی تحقیق در علوم ریاضی، روش سنتی تحقیقات گروهی دو یا سه نفره به فراموشی سپرده خواهد شد؟ می‌توان این سؤال را به یک سؤال کلی در عصر اطلاعات تعمیم داد. آیا شبکه‌ی اطلاعاتی به خارج مرزهای دقیقی که دور خود کشیده است نیاز خواهد داشت؟ روشن است که پاسخ مثبت است. خارج مرزهای جامعه شبکه‌ای همان قسمتی از جامعه است که برای بهره‌کشی در نظر گرفته شده است. در مورد ریاضیات هم همین طور است. خارج ساختارهای مجازی همان جایی است که باید افرادی تربیت شوند که بتوانند به ساختارهای مجازی علم خدمت کنند. اگر تجربه‌ی تحقیق گروهی کاملاً ناپدید شود، هیچ مخزن نیروی انسانی که

بتواند افرادی را تربیت کند که به عنوان مجری یا طراح پروژه وارد ساختار مجازی شود وجود نخواهد داشت. لذا ساختارهای مجازی برای حفظ حیات خود به ادامه‌ی حیات علم سنتی نیازمندند.

تحقیقات گروهی به روش سنتی برای امکان ظهور یافتن، نیازمند احیای تحقیقات فردی به روش سنتی هستند. چرا که شکل‌گیری جمعی که تحقیق سنتی می‌کند، از یک مخزن نیروی انسانی که توانایی‌های فردی تحقیقی خود را نشان داده‌اند شروع می‌شود. می‌بینیم که ساختارهای عصر اطلاعات برساختارهای سنتی بنا می‌شوند و آنان را تقویت می‌کنند و ساختارهای جدید به وجود می‌آورند. این طور نیست که ساختارهای قدیمی تحت تأثیر ساختارهای جدید نابود شوند و روند تاریخی شکل‌گیری این ساختارها دیگر غیر قابل دسترس بماند.

تحقیقات فردی به روش سنّتی

به جز نیاز تحقیقات گروهی به روش سنّتی، به تحقیقات فردی نیز که همان روش اصیل دو هزار ساله است، نیاز هست. پیشینه‌ی تاریخی ریاضیات نیز به احیاء این سنت کمک فراوان می‌کند. برای مثال، هرگز سنت یادگیری فردی و کتابخوانی که چند هزار سال قدمت دارد با مشابه جمعی خود جایگزین نخواهد شد. صحنه‌ی آموزش حتماً باید ابعاد فردی را در نظر بگیرد. همچنین برای احراز درجه‌ی دکتری که چون مجوزی برای ورود به جمع ریاضی‌دانان است، نمی‌توان ابعاد فردی را به‌تنهایی محک قرار داد. استانداردهای بالایی که به طور سنتی حفظ شده است، ریاضی‌دانان را وادار می‌کند که در تمام ابعاد کار ریاضی به کمینه پیشرفتی رسیده باشند. به علاوه، الگوبرداری از شخصیت ریاضی‌دانان فرهیخته همیشه به طور فردی صورت می‌گیرد.

همچنین درگیر شدن با یک مسئله و دست و پنجه نرم کردن با آن گویی یک علاقه ذاتی ریاضی‌دانان است. گویی به خاطر همین خصلت به سوی ریاضی کشیده شده‌اند که خود یک فرایند فردی است. حتی تحت تأثیر این خصلت ریاضی‌دانان تا حدی هم تکرو و خودبین هستند که به نوعی با کار گروهی تناقض دارد. اما ریاضی‌دانان در عین این خصلت که باید همه چیز را به زبان ذهن خود بفهمند، در برقراری ارتباط با دیگران و کارگروهی نیز بسیار ماهر هستند. می‌بینیم که در بطن کار گروهی، تکامل شخصیت فردی ریاضی‌دان قرار دارد. لذا هرگز متصور نیست که ریاضی‌دانان تمام عیار و کامل، نسلشان نابود گردد.

رهبری کشتی علم ریاضیات

حفظ سنّت تحقیقات فردی منجر به ظهور دوباره‌ی نوابغی در ریاضیات خواهد شد و در بین آنان کسانی پیدا خواهند شد که رهبری کاریزماتیک کشتی ریاضیات را به عهده خواهند گرفت. ریاضیات هرگز به علمی بدون رهبران هدایتگر تبدیل نخواهد شد. جهت‌گیری ریاضیات هرگز به یک پدیده‌ی اجتماعی خود هدایت کننده سپرده نخواهد

شد و این مایه بقای ریاضیات خواهد بود، چرا که گسترش علم ریاضی پدیده‌ای کنترل پذیر خواهد ماند. شاید مسائل بسیار مشکل که مِعماران ریاضیات مدرن قادر به حل آن نبوده‌اند، در سایه‌ی خلاقیت مدرن به مسائل در دسترسی تبدیل شوند. ولی آیا ممکن است مفهوم‌سازی‌هایی که منجر به ساده‌سازی ریاضیات مدرن خواهد شد، تحت روند خلاقیت جمعی پدیدار شوند؟

چنین پدیده‌ای تاکنون اتفاق نیافتاده و شاید هرگز اتفاق نیافتد. شهود یک پدیده‌ی فردی است. همان طور که الهام پدیده‌ای فردی است. ممکن نیست شهود جمعی و قوع پیدا کند. لذا الهامات و مشهودات ریاضی که منجر به مفهوم‌سازی می‌شوند، مختص به محققین تک کار خواهد بود. این یک اهرم دیگر در دست رهبران ریاضی برای هدایت روند شکل‌گیری آینده‌ی ریاضیات خواهد بود. آنچه نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم این است که این رهبران ترجیح می‌دهند خارج شبکه اطلاعاتی بمانند، با اینکه برای استفاده از امکانات شبکه‌ی علمی به آن می‌پیوندند و یا دو گروه در دو طرف این مرز تشکیل خواهند شد.

تأثیرات علم جدید بر آموزش ریاضی

سؤال مهم اینکه، آیا این تحولات در زمینه‌ی ساختار اجتماعی تحقیقات ریاضی که پیش رو داریم بر نظام آموزشی ریاضی و یا بر مبنای آموزش ریاضی و یا مهارت‌های معلمین و یا روند آموزش ریاضی تأثیر خواهند گذاشت؟ کلاس ریاضی شکل دیگری خواهد داشت؟ معنای ریاضیات و در نتیجه معنای آموزش آن تغییر خواهد کرد؟ نظام آموزش ریاضی تحت تأثیر جامعه‌ی شبکه‌ای علم تغییر ماهیت خواهد داد؟ آیا معلمان به مهارت‌های جدیدی نیاز خواهند داشت تا در نظام جدید قادر به تدریس باشند؟

آموزش ریاضی همیشه سرچشمه‌ی فرار از دیدگاه‌های فلسفی و پناه بردن به دیدگاه‌های انسان‌شناسانه و فرار از ریاضیات اساس‌گرا و پناه بردن به ریاضیات انسان‌گراست. انسان‌گرایی همان و بازگشت به سنت همان. ذات انسان که در سراسر پهنه‌ی تاریخ یک دست و بدون تغییر نزد ما به و دیعه گذاشته شده، همیشه ریاضیات را به همان جایی بر می‌گرداند که از آن شروع شده است. لذا بازگشت به سنت‌های عمیق ریاضی که در ذات انسان ریشه دارد اجتناب ناپذیر است. عصر اطلاعات منجر به انقلابی بنیادین در ریاضیات نخواهد شد، همان طور که دیدگاه‌های اجتماعی پیش از آن و یا گرایش‌های زبان شناسانه نیمه‌ی قرن ۲۰ و یا دیدگاه‌های فلسفی اوایل قرن ۲۰ و یا شاخه شاخه شدن ریاضیات در اوایل قرن ۱۹ هیچ کدام طبیعت کار ریاضی‌دان را متحول نکردند. مفهوم ریاضیات و تفکر ریاضی در تمدّن بشری جاودان است و ریاضی‌دانان به عصر خاصی متعلق نیستند.

فصل۱۶

فهرست مفصل عناوین

ریشه‌های پیدایش تفکر ریاضی در تمدن بشری

خلاقیت در تمدن بین‌النهرین

تفکر فلسفی در تمدن بین‌النهرین به شکل افسانه‌های دینی

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات تمدن بین النهرین

خلاقیت در مصر باستان

تفکر فلسفی در مصر باستان

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات مصر باستان

خلاقیت در هند باستان

تفکر فلسفی در هند باستان

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات هند باستان

خلاقیت در چین باستان

تفکر فلسفی در چین باستان

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات چین باستان

خلاقیت در تمدن ایران باستان

تفکر فلسفی در ایران باستان

مبانی فلسفی ریاضیات یونانی

سرگذشت تالس

سرگذشت فیثاغورس

ریشه‌های تفکر فلسفی فیثاغورس

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات فیثاغورسی

سرگذشت سقراط

سرگذشت افلاطون

تفکر فلسفی افلاطون و سرچشمه‌های اساس‌گرایی

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات افلاطونی

سرگذشت ارسطو

تفکر فلسفی ارسطو و سرچشمه‌های انسان‌گرایی

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات ارسطویی

کتاب «اصول» اقلیدس و گرایش‌های فلسفی مستتر در آن

ریاضی‌دانان متأخر در دوران شکوفایی تمدن یونان

علوم ریاضی در یونان باستان

انسان‌شناسی اسلامی و ریاضیات اسلامی

حرکت تفکر ریاضی از یونان به ایران

حرکت تفکر ریاضی از هند به ایران

سنت حل معادله در ریاضیات اسلامی

سنت جغرافیا در ریاضیات انسانی

سنت نجوم در ریاضیات اسلامی

گرایش‌های فلسفی در ریاضیلت اسلامی متأثر از یونان

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از هند

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از ایران باستان

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات اسلامی متاثر از اسلام

انسان‌شناسی اسلامی و علم‌شناسی اسلامی

جهان‌بینی اسلامی و علم‌شناسی اسلامی

تأثیرات انسان‌شناسی و جهان بینی اسلامی در ریاضیات اسلامی

مشخصه‌های اصلی ریاضیات اسلامی

شکل‌گیری مبانی ریاضیات مدرن در عصر دکارت(قرن هفدهم)

کپرنیک/قرن۱۶

کپلر/قرن ۱۶

گالیله /قرن۱۶

جبر ایتالیایی تا قرن ۱۶

جبر فرانسوی(قرن ۱۶و۱۷)

سرگذشت دکارت و روش علمی او

فلسفه دکارت

ریاضیات دکارت

فلسفه‌ی فرانسه‌ی قرن هفدهم

گرایش‌های فلسفی در ریاضیات فرانسوی متاثر از فلسفه

لایبنیتز عصاره‌ی ریاضیات فرانسه

فلسفه انگلیس در قرن هفدهم

دیدگاه‌های فلسفی مستتر در ریاضیات عصر نیوتن

فلسفه‌ی انگلیس در قرن هجدهم

متافیزیک در فلسفه قرن هفدهم بریتانیا

ایزاک بارو

گیلبرت و بویل

نیوتن و متافیزیک

فضا-زمان از نظر نیوتن

مبانی حساب‌دیفرانسیل و انتگرال

کتاب اصول ریا ضی فلسفه طبیعی

کتا ب نور شناخت

اوضاع علمی– فرهنگی انگلستان در عصر نیوتن

جدال نیوتن و لایبنیتز بر سر تقدم کشف حسابان

منتقدان فلسفه‌ی نیوتنی

منتقدان فیزیک نیوتنی

میراث نیوتن

دیدگاه‌های فلسفی مستتر در ریاضیات عصر لایبنیتز

فلسفه‌ی اروپا در قرن هجدهم

سرگذشت لایبنیتز

فلسفه لایبنیتز

ریاضیات لایبنیتز

اوضاع سیاسی اروپا در عصر لایبنیتز

اوضاع علمی فرهنگی اروپا در عصر لایبنیتز

سرگذشت کانت

فلسفه کانت

کتاب نقد خرد محض

میراث ریاضی کانت

اویلر و تفکر الگوریتمی

لاگرانژ

ریاضیات در اواخر قرن هجدهم

ریاضیات در آستانه قرن نوزدهم

شکل‌گیری مبانی آنالیز در ریاضیات قرن نوزدهم

ریاضیات پیشینی

ساختارگرایی ریاضی، واقع‌گرایی ریاضی و مفهوم‌گرایی ریاضی

ریاضیات تجربی

واقعیت ریاضی و سیر تحولی آن

الگوهای تحول ریاضیات

پذیرش حسابان

جریان حسابان نیوتنی در برابر جریان حسابان لایبنیتزی

دالامبر و اویلر در برابر دو جریان حسابان

سهم کوشی

سهم آبل

دیدگاه ددکیند

دقت وایراشتراوسی

تحلیل سیر تحول آنالیز در قرن نوزدهم

تأثیرات تحولات مبانی آنالیز در سایر شاخه‌های ریاضیات

شکل‌گیری مبانی هندسه در ریاضیات قرن نوزدهم

پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی

نگاهی فلسفی به بنیان گذاران هندسه اقلیدسی

خم و رویه و مفهوم خمیدگی

خمینه، فضای مماس و مفهوم متریک ریمانی

هندسه تصویری و متریک تصویری

برنامه‌ی ارلانگن

هلمهولتز و ریمان و مفهوم فضا

گروه‌های لی و تأثیر آن بر مبانی هندسه

تفکر اصل موضوعه‌سازی مدرن

گرایشات به فلسفه تجربه‌گرا در هندسه

سردرگمی فلسفی در مبانی هندسه

پیشینی‌گرایی راسل

فلسفه پوانکاره Conventionalism قرار دادگرایی

انقلاب انشتین در مفهوم فضا

شکل‌گیری مبانی جبر و نظریه‌ی اعداد در ریاضیات قرن نوزدهم

حل معادلات چند جمله‌ای توسط آبل و گالوا

از حل معادلات تا گروه و میدان

پدران و فرزندان نظریه‌ی گروها و میدان‌ها

گروه و هندسه

گروه و آنالیز

گروه و ترکیبات

گروه و جبر

هندسه‌ی جبری

نظریه جبری اعداد

میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع

ساختار عددی و مفهوم جبر

تحول ریاضیات به کمک ازدواج زیر شاخه‌ها و تولد شاخه‌های جدید

تحول ریاضیات به کمک مسائلی که با کمک زیر شاخه‌های دیگر حل می‌شوند

ریاضی‌دانان مسئله حل کن و ریاضی‌دانان تئوری‌ساز

شکوفایی ریاضیات در قرن بیستم

ریاضیات به عنوان منطق

نقد ریاضیات به عنوان منطق

ریاضیات به عنوان علم سیستم‌های صوری

نقد ریاضیات به عنوان علم سیستم‌های صوری

ریاضیات به عنوان ساختارهای شهودی

نقد ریاضیات به عنوان ساختارهای شهودی

ریاضیات به عنوان علم جریان‌های مفهومی

ریشه‌های شکوفایی ریاضیات در قرن بیستم

ریاضی‌دانان محض

ریاضی‌دان کاربردی

ریاضی– فیزیکدانان

منطق‌دانان

شاخه‌های ریاضیات در اوایل قرن بیستم

ریاضیات در خدمت چه کسی است؟

ریاضیات سال‌های جنگ جهانی

اتحاد علمی اروپا

جریان تعمیم و مجردسازی

مؤسسات آموزشی و پژوهشی تأثیرگذار در اروپا

ریاضیات در روسیه‌ی کمونیست

ریاضیات در آلمان نازی

ریاضیات در آمریکای پیش از جنگ جهانی دوم

ریاضیات در خدمت جنگ جهانی دوم

مهاجرت دانشمندان اروپایی به آمریکا

بمب اتم و تأثیرات آن بر ساختار اجتماعی علم

ریاضیات در خدمت قدرت

شکوفایی ریاضیات در روسیه

سال‌های جنگ سرد

شکوفایی ریاضیات در آمریکا

ریاضیات بحران‌های شناختی پس از جنگ جهانی

علم و فرهنگ در اروپا بین دو جنگ جهانی

تأثیرات فلسفی جنگ جهانی

فلسفه درجهان دو قطبی جنگ سرد

به مبارزه طلبیدن مبانی ریاضی

ریاضیات در بستر زبان

جنبش ساخت‌گرایی

ساختار اجتماعی انقلاب‌های علمی

حمله نهایی به عقل

تحولات ریاضیات محض

تحولات ریاضی فیزیک

فروپاشی کمونیسم و مهاجرت ریاضی‌دانان روسی به آمریکا

تحولات ریاضیات کاربردی

تحولات منطق ریاضی

ریاضیات عصر سرمایه‌داری اطلاعاتی

ریاضیات عصر اطلاعات

تحقیقات دسته جمعی در علوم پایه

ساختار ارتباطی دانشمندان و ساختار دانش

تأثیرات عصر اطلاعات بر شخصیت ریاضی‌دانان

تأثیرات عصر اطلاعات بر تحقیقات ریاضی

تشکیل اتحادیه‌ی اروپا

تأثیرات اقتصاد بر پیشرفت ریاضیات

تأثیرات جهانی شدن بر پیشرفت ریاضیات

تأثیرات کنفرانس‌های علمی بر پیشرفت ریاضیات

ساختارهای حامی ارتباطات علمی در مؤسسات تحقیقاتی

جنبش‌های مانع از ارتباطات علمی در جهان سوم

جغرافیای ارتباطات علمی

فلسفه در عصر اطلاعات

فلسفه علم در عصر اطلاعات

فلسفه‌ی ریاضی در عصر اطلاعات

گرایش‌های فلسفی رایج در ریاضیات آستانه قرن ۲۱

ترکیبات/ علوم کامپیوتر

منطق و مبانی ریاضی

ساختارهای جبری / نظریه‌ی میدان و چند جمله ای‌ها / حلقه‌ها و جبرهای جابجایی /حلقه‌ها و جبرهای شرکت‌پذیر / جبر خطی و چند خطی / حلقه‌ها و جبرهای غیر

شرکت‌پذیر

نظریه‌ی اعداد

نظریه‌ی گروه‌ها / گروه‌های توپولوژیک و گروه‌های لی / نظریه‌ی رسته‌ها / نظریه‌ی K

هندسه‌ی جبری / هندسه حسابی هندسه / هندسه محدب و گسسته / هندسه دیفرانسیل / خمینه‌ها / آنالیز روی خمینه‌ها

سیستم‌های دینامیکی

ریاضی– فیزیک

توابع حقیقی و نظریه‌ی اندازه/ نظریه احتمال

توابع مختلط و فضاهای مختلط

PDE /ODE/ آنالیز تابعی

نظریه‌ی کنترل و بهینه‌سازی / آنالیز عددی / تحقیق در عملیات

نگاهی به آینده‌ی ریاضیات

رده بندی شخصیت‌های درگیر در تحقیق گروهی

منشی‌گری تحقیق / مدیر تولید

مدیریت تحقیق / کارگران

طراح پروژه‌ی تحقیقی

خلاقیت مدرن

رده بندی شخصیت‌های تئوری ساز و شخصیت‌های مسئله حل کن

فلسفه مدرن در خدمت حرفه‌ها و هویت

تحقیقات گروهی به روش سنتی

تحقیقات فردی به روش سنّتی

رهبری کشتی علم ریاضیات

تأثیرات علم جدید بر آموزش ریاضی