فصل اول: نسبیت خاص

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیکِ دانشگاه صنعتی شریف

۳۰ شهریور ۱۳۸۵

چکیده: در این فصل نسبیت خاص معرفی می شود.

۱ مفاهیم اولیه

دستگاه مختصات: مهم ترین مفهوم در مکانیک دستگاه مختصات به عنوان وسیله‌ی اندازه گیری مختصه‌ی فضایی و زمانی رویداد ها است. در اینجا نقاط اطراف فضای مبدا مختصات اندیس گذاری شده و به ازای هر نقطه نیز ساعتی همزمان شده با ساعت های دیگر دستگاه وجود دارد. دستگاه مختصات یک چارجوب مادی نیست و می تواند نسبت به یک ناظر در حرکت باشد و در این صورت تمامی نقاط مربوط به این دستگاه نیز در حرکت خواهد کرد. حال می توان یک دسته دستگاه خاص که در آن قانون دوم نیوتن برقرار است را متمایز کرد بدین معنی که اگر در این دستگاه ذره‌ای آزاد ساکن باشد، ساکن بماند و اگر حرکت می کند به حرکت آزاد خود با سرعت ثابت ادامه دهد. به این نوع دستگاههای خاص دستگاه مختصات لخت گفته می شود و قانون دوم نیوتن در آن برقرار است. با مشخص کردن یک دستگاه لخت، می توان بی نهایت دستگاه با سرعت های نسبی ثابت نسبت به آن درست کرد و فضا و زمان رویدادها را برای هر دستگاه مختصات لخت به دست آورد. بین دستگاه های مختصات هیچ نوع تمایزی وجود ندارد و می توان همه‌ی آنها را هم ارز در نظر گرفت. تبدیل مربوط بین دستگاه ها را در مکانیک نیوتنی تبدیل گالیله نامیده شده و در آن زمان یک جریان مستقل از ناظر بوده، مطلق و المان آن در هر دستگاهی یکسان است $dt_۲ = dt_۱$ و المان طول نیز به صورت $dx_۲ = dx_۱ + vdt_۱$ می

باشد. به طوری که دیده می شود المان طول یک کمیت نسبی بوده در حالی که المان زمانی کمیتی مطلق در مکانیک می باشد.

سرعت انتشار کنش: آزمایش در الکترومغناتیس نشان می دهد که برای انتشار یک کنش نیاز به زمان است و سرعت انتشار کنش محدود و برابر با سرعت نور می باشد. سوالی که می توان مطرح کرد این است که آیا سرعتی بالاتر از سرعت کنش الکترومغناتیسی وجود دارد؟ با در نظر گرفتن بالاترین حد برای سرعت ذرات می‌توان این سوال را پرسید که آیا سرعت انتشار کنش وابسته به دستگاه است و یا کمیتی مطلق. با توجه به اصل هم ارزی دستگاه های لخت می توان تصور کرد که سرعت کنش کمیتی مستقل از دستگاه ها می باشد. آزمایش مایکلسون—مورلی نشان داد که سرعت نور تنها برای اتر تعریف نشده و در هر دستگاهی ثابت و برابر با $c = ۲.۹۹۸ \times ۱۰^۸ m/sec$ می باشد. در این آزمایش یک پرتو نوری همدوس توسط یک مجزا کننده به دو قسمت تقسیم می شود و در دو راستا منتشر می شود طول بازوها برابر است و برای زمین که در یک راستا با سرعت v نسبت به اتر و یا دستگاه مختصات مطلق حرکت می کند، سرعت نور در این راستا برای مسیر رفت $c+v$ و در راستای عکس $c-v$ می باشد. بنابراین زمان رفت و برگشت در راستای حرکت زمین برابر با عبارت زیر خواهد بود:

$$t_{par} = \frac{۲l/c}{۱ - v^۲/c^۲} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر برای مسیر عمود بر حرکت زمین زمان رفت و برگشت برابر با $t_{per} = ۲l/c$ خواهد بود. اختلاف این دو زمان برابر خواهد بود با $\delta t = ۲l/c\frac{v^۲/c^۲}{۱-v^۲/c^۲}$ و نتیجه تغییر فاز در اثر دوران بازوهای آزمایش خواهد بود. آزمایش نتیجه‌ی منفی به دست داده است و نشان می دهد که سرعت نور برای تمامی دستگاه های لخت یکسان می باشد. بنابراین در یک جمع بندی می توان دو اصل را به عنوان سنگ بنای کار در نظر گرفت که در آن (الف) قوانین فیزیک برای تمامی دستگاههای لخت یکسان است و (ب) سرعت نور در تمامی دستگاه های لخت یکسان است.

همزمانی در نسبیت: اصول موضوعه‌ی ذکر شده مفهوم فضا و زمان را می تواند عوض بکند. برای شروع همزمانی رویدادها را مثال می زنیم. در مکانیک نیوتنی زمان یک کمیت مطلق بوده و برای مثال رویدادهای همزمان برای تمامی ناظرها همزمان می باشد. در نسبیت به دلیل محدود بودن سرعت نور، زمان ثبت رویدادها آنی نبوده و مفهوم همزمانی می تواند نسبی باشد. دو رویداد به فاصله یکسان از ناظر طوری رخ می دهد که ناظر آنها را همزمان می بیند. حال ناظر دومی در نظر بگیریم که با سرعت v نسبت به ناظر اولی حرکت می کند. در این صورت ناظر یکی از رویدادها را نسبت به دیگری زودتر خواهد دید. این تغییر همزمانی نه به خاطر تغییر سرعت نور بلکه به دلیل تغییر مسافت پیموده شده در فواصل رخ می دهد. سوالی که می توان مطرح کرد این است که با توجه به اثبات محدود بودن سرعت نور بسیار پیش تر از ارائه‌ی تئوری الکترومغناتیس چرا در آن زمان

مفهوم مشاهده و اندازه گیری زمان وقوع رویداد ها مطرح نشده و نسبی بودن همزمانی بررسی نشده است.

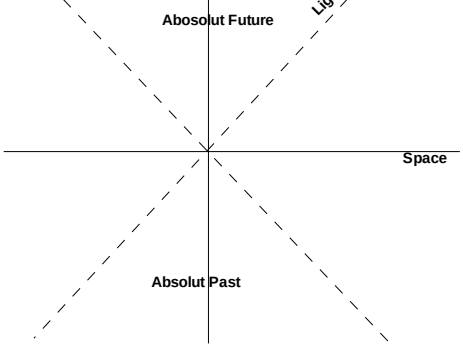
جهان خط: وقوع هر رویدادی را می توان با یک نقطه در فضا—زمان نشان داد. ذره ای که در حال حرکت و یا ساکن باشد می تواند مبین مجموعه ای از نقاط به عنوان رویداد باشد و این مجموعه جهان خط می سازد. المان فضا—زمانی را به صورت

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2)$$

تعریف می کنیم. می توان نشان داد که این کمیت برای تمامی دستگاه های لخت ناوردا می باشد. برای یک رویداد نور گونه در یک دستگاه مختصات طول فضا—زمانی به صورت $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$ برابر با صفر است. برای ناظر دیگری که با سرعت v نسبت به دستگاه اولی حرکت می کند المان فضا—زمانی به دلیل ثابت بودن سرعت نور برابر با صفر خواهد بود. ثابت بودن سرعت نور نشان می دهد که اگر برای یک دستگاه $ds = 0$ باشد در هر دستگاه دیگری نیز المان طول صفر خواهد بود. می توان فرض کرد که المان فضا—زمانی بین دو دستگاه در حالت کلی به صورت یک ضریب به هم مربوط است و در رویداد های نور—گونه این عبارت صفر است. این ضریب می تواند تنها تابع سرعت نسبی دستگاه ها به صورت $ds^2 = a(v_{12})ds'^2$ باشد. در اینجا a می بایست تنها تابع قدر مطلق سرعت باشد چرا که در غیر این صورت یک جهت ارجح مشخص می شود. با توجه به نسبی بودن دستگاه ها می توان دستگاه S' را ساکن گرفته و S را نسبت به آن با سرعت $-v$ حرکت داد که در این صورت $ds'^2 = a(v_{12})ds^2$ خواهد بود. با مقایسه حالت قبلی می توان گفت $a(v) = 1$ است.

مخروط نوری: نمودار فضا—زمان یک ناظر را می توان مطابق شکل (۲) به سه ناحیه‌ی زمان گونه، نور گونه و فضا—گونه تقسیم کرد. خطوط $x = \pm ct$ مجرا کننده ناحیه زمان گونه و فضا—گونه است و نقاط روی این خطوط نیز ناحیه زمان—گونه نامیده می شود. برای رویداد های داخل مخروط نوری $ds^2 < 0$ و خارج آن $ds^2 > 0$ است. رویدادهای داخل گذشته‌ی مطلق می توانند بر روی ناظر تاثیر بگذارند و ناظر می تواند بر روی مخروط آینده اثر گذار باشد. می توان این سوال را مطرح کرد که رویداد همزمان برای یک ناظر برای ناظر دیگر به چه صورتی خودنمایی می کند؟ با توجه به اینکه رویداد همزمان یک رویداد فضا گونه است، $ds^2 = dx^2$ در نتیجه برای ناظر دوم نیز رویدادی فضا گونه و در خارج مخروط نوری خواهد بود. آخرین نکته در مورد مخروط نوری که از نظر رصدی حائز اهمیت است، مشاهدات رصدی ما می باشد که از تقاطع مخروط نوری با جهان خطهای اجرام بوجود می آید.

زمان ویژه: رویداد مورد مطالعه می تواند مجموعه‌ی رویداد های تشکیل دهنده‌ی حرکت ذره در اثر حرکت باشد. در این حالت ناظری را بر روی متحرک قرار داده و طول فضا—زمان را اندازه گیری می کنیم در نتیجه مولفه‌ی فضایی عوض نشده و برای المان



شکل ۱: مخروط نوری فضا—زمان را به سه قسمت تقسیم می کند. تمامی مشاهدات ما بر روی مخروط نوری گذشته انجام می شود.

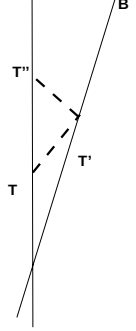
فضا—زمانی عبارت $ds^2 = -d\tau^2$. برای ناظر دومی که ذره با سرعت v نسبت به آن حرکت می کند طول فضا—زمانی برابر است با: $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. در نتیجه با قرار دادن دو عبارت خواهیم داشت $dt = d\tau/(1 - v^2)^{1/2}$.

تبدیلات لورنتس: به طوری که در بخش های قبل دیدیم در تبدیلات لورنتس طول فضا—زمانی ناوردا باقی می ماند. مشابه این ناوردایی را در هندسه داریم در اینجاتبدیلاتی که المان طول را ناوردا نگه می دارند انتقال دستگاه به معنی باز تعریف طول با جابجاکردن مبدا و یا دوران حول مبدا می باشد. بنابر این با ۶ پارامتر در فضای سه بعدی می توان حالت کلی تبدیلات را نوشت. در چهار بعد نیز ما ۴ انتقال و ۶ دوران در صفحه های xy، xz، yz، tx، ty و tz داریم. از بین ۶ دوران نیز ۳ دوران در فضای اقلیدسی و ۳ دوران با یک محور زمان داریم. با توجه به شباهت این فضا با فضای اقلیدسی به عوض دوران مثلثاتی در سه دوران زمانی با توابع هیپربولیک تبدیل را تعریف می کنیم. نکته‌ی قابل توجه این است که در این تبدیل المان فضا—زمان ناوردا می ماند. برای دوران حول صفحه‌ی xt داریم:

$$x' = x\cosh(\psi) + t\sinh(\psi) \qquad (۳)$$

$$t' = x\sinh(\psi) + t\cosh(\psi) \qquad (۴)$$

حال برای رویدادی در مبدا مختصات $x = 0$ است و $x'/t' = v = \tanh(\psi)$. بنابر این از روی این عبارت می توان نوشت $\cosh(\psi) = 1/\sqrt{1 - v^2}$ و $\sinh(\psi) = v/\sqrt{1 - v^2}$. نتیجه اینکه تبدیل لورنتس به صورت زیر به دست می آید:



شکل ۲: ارتباط بین زمان ارسالی و دریافتی توسط رادار.

$$x' = \frac{۱}{\sqrt{۱ - v^۲}}(x + vt) \tag{۵}$$

$$t' = \frac{۱}{\sqrt{۱ - v^۲}}(t + xv) \tag{٦}$$

انتقال به سرخ نسبیتی: یکی از پیامدهای تجربی نسبیت خاص مشاهده‌ی اثر دوپلر در نور می باشد. راه های مختلفی برای به دست آوردن رابطه‌ی اثر دوپلر وجود دارد. یکی از رهیافت های زیبا محاسبه‌ی انتقال به سرخ توسط تکنیک رادار می باشد. می توان محل هر ذره‌ای را در فضا با ارسال و دریافت فوتون به دست آورد. برای ثبت موقعیت ذره ای در زمان $t_۱$ پالسی را ارسال و در زمان $t_۲$ دریافت می کنیم. در این صورت موقعیت ذره در $x = (t_۲ - t_۱)/۲$ و زمان رصد در $t = (t_۲ + t_۱)/۲$ می باشد. فرض کنیم دو پالس به صورت پشت سر هم به فاصله‌ی $T_۰$ به سمت یک ذره ای ارسال می شود. با توجه به سرعت نسبی ذره نسبت به ناظر ساکن این دو پالس در همان بازه‌ی زمانی دریافت نشده بلکه در طول ارسال پالس ذره‌ی متحرک موقعیت خود را جابجا کرده و بازه‌ی زمانی متفاوتی ثبت می شود. فرض کنیم بین بازه‌ی ارسالی و دریافتی این دو زمان به صورت $T' = kT$ باشد. در اینجا k فاکتور انتقال به سرخ است. حال اگر به محض دریافت فوتون توسط ذره، بار دیگر به طرف منبع ارسال شود در این صورت به دلیل تقارن مسئله این بار منبع نسبت به ذره دارای سرعت نسبی v بوده و زمان دریافتی توسط ناظر به صورت $T'' = kT'$ با زمان ارسالی درارتباط است. بنابراین زمان دریافت با زمان ارسال به صورت $T'' = k^۲T$ در ارتباط است. حال می توان این زمان را بر حسب سرعت ذره بیان کرد. زمان رس‌ی‌دن فوتون ارسالی به ذره برابر است با $t = T(k^۲ + ۱)/۲$ و مکان این رویداد نیز در $x = T(k^۲ - ۱)/۲$ رخ می دهد. با توجه به تعریف سرعت ذره به صورت $v = x/t$ می

توان k را به صورت زیر بر حسب سرعت به دست آورد:

$$k = \sqrt{\frac{۱ + v}{۱ - v}} \qquad (۷)$$

در این صورت ارتباط زمان دریافتی و زمان به صورت $T_{obs} = kT_{em}$ به دست می آید. در حالتی که جهت سرعت را عوض بکنیم در این صورت به عوض k، $k^{-۱}$ خواهیم داشت. این اثر همان اثر دوپلر نسبیتی است که باعث تغییر دوره‌ی تناوب و یا طول موج فوتون دریافتی خواهد شد. اثر دوپلر را از تبدیلات لورنتس در فضای تکانه—انرژی نیز به دست آورد.

یکی دیگر از استفاده های محاسبه‌ی K قانون جمع سرعت ها در نسبیت خاص می باشد. فرض کنیم دو پالس نوری به صورت پشت سر هم توسط ناظر A به سمت دو ناظر B و C با سرعت نسبی v_{BA} و V_{AC} نسبت به ناظر A ارسال شود. اگر بازه‌ی زمانی این پالس برای ناظر A T_A باشد، در این صورت برای دو ناظر B C برابر با $T_B = K_{BC}T$ و $T_C = K_{CA}T$ خواهد بود. از طرف دیگر اگر سرعت نسبی بین B و C را v_{BC} در نظر بگیریم در این صورت بین ضرایب K رابطه‌ی $T_C = K_{CB}T_B$ را داریم. با حذف زمان ها ارتباط بین k ها را به صورت $k_{AC} = k_{AB}k_{BC}$ داریم. با جاگذاری سرعت در تعریف k ارتباط بین سرعت ها را به صورت زیر داریم:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{۱ + v_{AB}v_{BC}} \qquad (۸)$$

در اینجا مشاهده می شود که برای مثال اگر $v_{BC} = ۱$ در نظر بگیریم، در این صورت برای v_{AC} نیز سرعت نور را به دست می آوریم که در توافق با اصل نسبیت خاص است.

مکانیک نسبیتی: برای به دست آوردن معادلات حرکت بار دیگر می توان از اصل کمترین کنش استفاده کرد. کنشی را انتخاب کنیم که تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باشد. ساده ترین کمیت طول فضا—زمانی به صورت $S \propto \int ds$ باشد. می خواهیم برای ذره‌ی آزاد ضریب تناسب را طوری انتخاب کنیم تا به کنش متعارف خود در مکانیک نیوتنی برسیم. بنابر این ضریب را با α نشان می دهیم. در این صورت کنش را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S = -\alpha \int \sqrt{۱ - v^۲}dt \qquad (۹)$$

حد نیوتنی این کنش برای $v << ۱$ داریم $\sqrt{۱ - v^۲} = ۱ - ۱/۲v^۲$. با توجه به اینکه جمله‌ی ثابت معادله حرکت را عوض نمی کند، می توان از آن صرف نظر

کرد. در این صورت $\alpha = -m$ به دست می آید. بنابراین کنش می تواند به صورت $S = -m \int \sqrt{1 - v^2} dt$ خواهد بود. از این کنش می توان اندازه‌ی حرکت را به صورت $p = \partial L / \partial v$ تعریف کرد. در این صورت اندازه‌ی حرکت به صورت زیر به دست می آید:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad (10)$$

نیرو را در این مکانیک می توان به صورت $F = dp/dt$ تعریف کرد. با انتگرال گیری از نیرو با استفاده از قضیه‌ی کار و انرژی داریم $E = m_0 / \sqrt{1 - v^2}$. با توان دوم رساندن طرفین عبارت ناوردا در مکانیک نسبیتی را به دست می آوریم: $m_0^2 = E^2 - p^2$. با توجه به ناوردا بودن عبارت تحت تبدیلات لورنتس، باز می توان رابطه‌ی تبدیل بین انرژی و تکانه را برای دستگاه های لخت به دست آورد.

۲ مرجع‌ها