Finite Element Methods – Galerkin

* ایده پایه این روش‌ها بر مبنای تقریب متغیر تابع یا متغیرهای تابع معادله یا معادلات دیفرانسیل اعم از معمولی و یا پاره‌ای می‌باشد. در مقام مقایسه با FDM، آنها مشتق را تقریب تفاضلی یا جبری می‌زنند و این روش‌ها خود تابع جواب را تقریب می‌زنند.

* مثال انگیزشی، حل معادله ODE :

مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر با روش گالرکین.

$$y''+y=3x^2 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y(2)=3.5$$

برای حل، تابع y را با یک چندجمله‌ای مثلاً درجه سوم در دامنه $[0,2]$ از متغیر مستقل تقریب می‌زنیم:

$$y(x)\simeq u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

بنابراین اگر چهار پارامتر a_0، a_1، a_2 و a_3 را بدست آوریم، آنگاه عملاً تقریبی از جواب را بدست آورده‌ایم. دقت شود چون جواب باید در شرایط مرزی صدق کند، لذا، دو معادله جبری داریم و باید دو معادله دیگر را تولید کنیم. قبل از بحث دو معادله دیگر، $u(x)$ را به شکل زیر و تنها به‌خاطر سهولت می‌نویسیم:

$$y(x)\simeq u(x)=a'_0+a'_1x+a'_2x(x-2)+a'_3x^2(x-2)$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم، عمداً فاکتورهای x و $x-2$ را گذاشته‌ایم تا هنگام ارضای شرایط مرزی، دو پارامتر a'_2 و a'_3 ضریب صفر بگیرند تا در همان ابتدا a'_0 و a'_1 بدست آیند:

$$\begin{cases} @\ x=0\ ,\ y=0 \rightarrow & 0=a'_0+a'_1\times 0+a'_2\times 0+a'_3\times 0 \\ @\ x=2\ ,\ y=3.5 \rightarrow & 3.5=a'_0+a'_1\times 2+a'_2\times 0+a'_3\times 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$a'_0=0\ ,\ a'_1=7/4$$

درنتیجه شکل تقریبی y (یعنی u) به شکل دو پارامتره زیر در می‌آید:

$$u = 7x/4 + a'_2\, x(x-2) + a'_3\, x^2(x-2)$$

حال تنها مشکل ما برای تعیین این دو ضریب مجهول، معادله دیفرانسیل مسأله می‌باشد. از طرفی معادله دیفرانسیل برای یک Δx یا x نمونه نوشته شده است ولی می‌توانیم گستره دامنه و تغییرات y را در همه x ببینیم، لذا معادله دیفرانسیل مسأله را به شکل اپراتور مشتق دیده و فرض می‌کنیم در تمامی دامنه x، برقرار است:

$$L\{x\}: \quad y'' + y - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; \int_{x=0}^{x=2} (y'' + y - 3x^2) = 0$$

و چون y را نداریم و فقط تقریبی از آن را داریم داریم:

$$u'' + u - 3x^2 = R(x) \neq 0$$

پس یک باقیمانده خطا داریم و اگر انتگرال بگیریم، این خطا انباشته خواهد شد (مگر اینکه کاملاً متساوی بوده و خطاها همدیگر را خنثی کنند!). بنابراین یک راه طبیعی این است که انتگرال باقیمانده یا خطا را صفر کنیم تا به شکل یک قید یا معادله برای تعیین پارامترهای مجهول بکار بریم:

$$\int_{x=0}^{x=2} R(x) = 0$$

حال اگر با توجه به تعریف u و R، انتگرال بالا را ساده کنیم برحسب a'_2 و a'_3 یک معادله خواهیم داشت و دو مجهول داریم. برای رفع این مشکل (کم آوردن معادله) دو راه حل متصور است:

1. به جای صفر کردن خطا، آن را مینیمم کنیم. البته امیدواریم مقدار مینیمم همان صفر باشد. این روش متعلق به حساب جامع است و محققین نظیر Rayleigh و Ritz از آن استفاده کرده‌اند.

2. از آنجایی که یک مجموع (Σ) یا به شکل پیوسته ($\int$) را می‌توان وزن‌دار نمود، تا طراح درجه آزادی بیشتری داشته باشد. آنگاه با انتخاب مناسب تعدادی از توابع وزن (تعداد برای این مسأله معادل 2 است تا دو معادله داشته باشیم) می‌توان تعداد معادلات را با تعداد مجهولات یکی کرد. به عبارتی با استفاده از مفهوم انتگرال وزن‌دار، عملاً یک توفیق اجباری است.

$$\begin{cases} \int_0^2 W_1 R(x) = 0 \\ \int_0^2 W_2 R(x) = 0 \end{cases}$$

نکته: تقریب تابع y به صورت بسط توابع آزمون در روش‌های غیر FDM است:

$$y(x) \cong u(x) = a_0 v_0(x) + a_1 v_1(x) + \dots a_N v_N(x)$$

$$= \sum a_i v_i(x) \qquad \text{(نمایش جبری)}$$

$$= \underline{a}^T \underline{v}(x) \qquad \text{(نمایش هندسی)}$$

یکی از شرط‌هایی که برای انتخاب v_i ها وجود دارد و آن اهمیت است که از هم استقلال خطی داشته باشند.

برای مثال که خودمان انتخاب کردیم (بسط توابع) همان چند جمله‌ای هاست:

$$v_0 = 1 \quad , v_1 = x \quad , v_2 = x(x-2) \quad , v_3 = x^2(x-2)$$

روش گالرکین: گالرکین می‌گوید توابع وزن (W_i) را همان توابع پایه یا بسط یا آزمون (v_i) بگیریم. در این مثال چون دو مجهول داریم، باید دو تا v انتخاب کنیم، پس دو معادله‌ای که بر مبنای آن‌ها می‌نویسیم به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \int_0^2 v_2(x) R(x)\, dx = 0 \\ \int_0^2 v_3(x) R(x)\, dx = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{گالرکین} \longrightarrow \dots \begin{cases} -\dfrac{24a_2' + 24a_3' - 37}{15} = 0 \\ -\dfrac{2(84a_2' + 160a_3' - 180)}{105} = 0 \end{cases}$$

حاصل دو معادله و دو مجهول بالا، مقادیر a_2' و a_3' به دست آمده و نهایتاً تابع جواب نیز بالتبع به شکل تقریبی به دست می‌آید:

$$\boxed{y(x) \simeq u(x) = \left(\frac{101}{152}\right)x^3 - \left(\frac{103}{228}\right)x^2 - \left(\frac{1}{128}\right)x}$$

— اصلاح روش گالرکین ، روش subdomain
(or finite elements)

یک عیب بزرگ روش پیش گفته (علاوه بر انتخاب سخت پایه ها)، دقت روش در یک گستره پایین می باشد. در روش subdomain ، درجه چندجمله ای را پایین در نظر گرفته و به جای بازه بین [a,b] را به چند بخش یا سگمنت ها به چند المان تقسیم می کنند. بدین ترتیب روش کلی FEM برای حالت یک متغیره به صورت زیر می باشد:

- تقسیم اینتروال [a,b] به n بخش، معروف به n المان.

$$x_0 (=a) \,,\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_{i-1} \,,\, x_i \,,\, \ldots \,,\, x_{n-1} \,,\, x_n (=b)$$

هر x_i معروف به گره (node) i ام می باشد و المان i ام فاصله ای از x است که بین گره های i-1 ام و i ام تعریف می شود.

- برای هر زیربخش یا المان، تابع تقریب u را با یک چندجمله ای درجه پایین تعریف کنید:

$$\boxed{u^{(i)} = \sum a_j^{(i)} x^j} \quad \text{یا} \quad \boxed{u^{(i)} = \sum u_i N_i(x)}$$

شکل سمت چپ عیناً همان شکلی است که در مثال گالرکین قبلی دیدیم، با این تفاوت که گستره مسأله محدود به دامنه همان المان (i) می باشد، به طور مثال اگر فرض کنیم المان (i) از دو گره تشکیل شده، لذا چندجمله ای ما باید درجه اول یا خطی باشد و اگر سه گره ای باشد باید درجه دوم در نظر بگیریم. فرم سمت راست، فرم رایج FEM است، چون مجهولات المان همان مقادیر تابع جواب در گره i می باشد (یعنی u_i ها) و درست مثل روش FDM ! به همین خاطر یکی از مزایای روش FEM به دست آوردن $N_i(x)$ ها معروف به توابع میانیابی یا توابع شکل (shape) می باشند.

- معادلات جبری برای محاسبه پارامترهای مجهول ($a_i^{(i)}$ یا u_i) را برای هر المان می نویسیم تا به دست آوریم. (برای هر مسأله ODE ، چون شکل خاص خود را دارد باید به طور خاص این کار را بکنیم).

- از آنجائی که گره ها در المان های مجاور مشترک هستند، لذا معادلات جبری حاصل از معادلات تک تک المانها، استقلال خطی نخواهند داشت و باید دستگاه نهائی را دوباره کامل کرد. به این کار گویند تجمیع معادلات المانها (Assembling).

- حل دستگاه نهائی به ما a_i ها یا u_i ها را می دهد.

در ادامه این روش FEM را برای معادلات BVP زیر به طور کلی تر می نویسیم.

مطلوبست فرمولاسیون FEM برای معادله BVP کلی زیر:

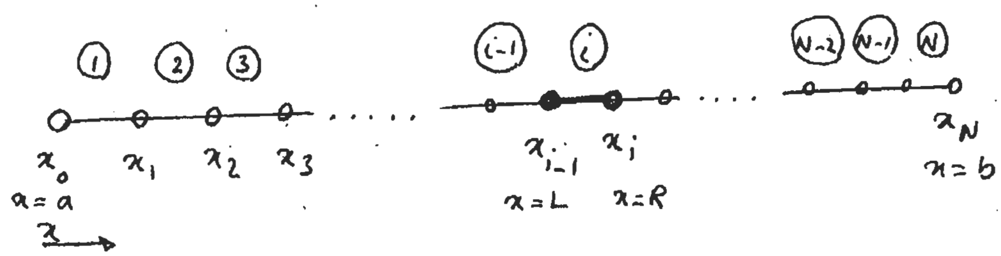
$$y'' + Q(x)\,y = P(x) \quad , \quad B.C. \quad \text{at } x=a \,,\ y=y_a$$

$$\text{at } x=b \,,\ y=y_b$$

فرض کنید به تعداد N تا المان تقسیم بندی کرده ایم.

حل:

گام اول: فاصله $[a,b]$ را به n بخش (المان) تقسیم کنید، پس $n+1$ تا گره داریم، جهت سهولت نگارش المان i ام گره x_{i-1} را گره سمت چپ (L) و x_i را گره راست (R) بنامید.



در ادامه فرمولاسیون را برای هر المان i ام بنویسیم، پس بطور کلی برای یک گره نمونه (i):

گام دوم : تقریب تابع را با فاصله گره $i-1$ تا i (با یک المان نشان) :

$$u(x) = \overset{(i)}{a_0} + \overset{(i)}{a_1}\, x \qquad \text{نمایش ریاضی (پارامتریک)}$$

(i)
$$u(x) = C_L \frac{x-R}{L-R} + C_R \frac{x-L}{R-L}$$

(i)
$$= C_{i-1} \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} + C_i \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

(i)
$$= C_L N_L(x) + C_R N_R$$

(i)
$$\boxed{u(x) = u_{i-1} N_{i-1}(x) + u_i N_i(x)}$$

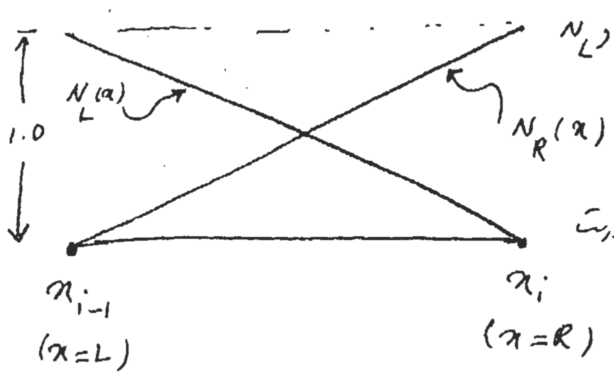
همانطور که قبلاً نیز ذکر شد، نمایش آخر رایج ترین نمایش FEM است چرا که مجهولات ما عبارتند از u_{i-1} و u_i که همان مقادیر تابع جواب در گره ها می باشد. برای اینکه بتوان فرم رسم باید بسته به شکل المان و تعداد گره های آن، توابع N_i را محاسبه کنیم. این توابع معروف به توابع شکل (shape) هستند و از نظر ریاضی (بسط u برحسب توابع پایه) معروف به توابع پایه (basis) یا کاندیدا (Trial) هستند. در این مثال چون المان ها یک شکل از دو گره (دو همسایه) تشکیل شده اند، توابع شکل ما خطی هستند.

توابع خطی پایه معروف به توابع کلاهی (hat یا chapeau) هستند و به راحتی محاسبه می شوند:

$$N_{i-1}\ (\text{یا } N_L) \triangleq \frac{x-R}{L-R} \quad , \quad N_i\ (\text{یا } N_R) \triangleq \frac{x-L}{R-L}$$

شکل آنها نیز در زیر آمده است (دقت کنید معلوم است که این دو خط یا تابع همدیگر را قطع کرده و موازی نیستند، یعنی استقلال خطی از همدیگر دارند)

* بدین ترتیب u در فاصله دو گره راست و چپ عملاً یک ترکیب خطی از دو تابع پایه N_L و N_R می باشد. در ترکیب خطی شامل ثوابت یا ازانها می باشد. در FEM، این ثوابت همان مقادیر تابع در گره ها درست شبیه FDM می باشند.



گام سوم: پیاده‌سازی گالرکین برای المان i-ام برای معادله ODE خاص زیر:

$$R(x) = y'' + Qy - P = u'' + Qu - P \rightarrow$$

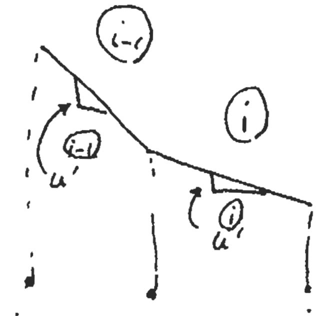
چون در روش گالرکین (C_L و C_R یا u_{i-1} و u_i) داریم پس دو تا معادله باید بنویسیم:

$$\begin{cases} \int_{x=L}^{x=R} N_L R(x)\, dx = 0 \\ \int_{x=L}^{x=R} N_R R(x)\, dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_L^R u'' N_L\, dx + \int_L^R Q u N_L\, dx - \int_L^R P N_L\, dx = 0 \\ \int_L^R u'' N_R\, dx + \int_L^R Q u N_R\, dx - \int_L^R P N_R\, dx = 0 \end{cases}$$

گام چهارم: ساده‌سازی انتگرال‌ها جهت حل تحلیلی و تشکیل دستگاه جبری (برای المان i-ام)

جمله $\int_L^R u'' N_L\, dx$ و $\int_L^R u'' N_R\, dx$

چون داخل انتگرال u'' داریم و از طرفی u به ترتیب خطی فرض شده است، پس مشتق دوم آن صفر است که این مخالف فیزیک مسأله است، چون اگر y'' همیشه صفر بود، چرا داخل معادله دیفرانسیل ظاهر شده است. یک راه برخورد با این مسأله فرمولاسیون ضعیف است، بدین معنی که سر گره‌ها، شیب عوض می‌شود، یعنی در فاصله L تا R، u'' صفر است ولی در R یا L، تابع مشتق‌پذیر نیست و گسسته است، یعنی مشتق راست با مشتق چپ تفاوت دارد (به شکل توجه کنید). پس اینجا که تغییر شیب (یا همان u'') واقعاً داریم، روی گره‌ها و باید به نوعی متوسط‌گیری کرده و مقدار u'' را از روی u' به دست آوریم. برای این کار از انتگرال جزء به جزء کمک می‌گیریم تا درجه مشتق را یکی پایین آورد.



با یادآوری انتگرال جزء به جزء :

$$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int V\,dU$$

در نتیجه برای ترم $\int u'' N_R\,dx$ کافیست U را N_R بگیریم و dV را $u''\,dx$ در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} U = N_R \rightarrow dU = dN_R \\ dV = u''\,dx \rightarrow u' = V \end{cases} \rightarrow \int u'' N_R\,dx = N_R\,u'\Big|_L^R - \int_{N_R @ L}^{N_R @ R} u'\,dN_R$$

پس برای دو جمله داریم:

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \int_L^R u'' N_R\,dx &= N_R\,u'\Big|_L^R - \int_L^R u'\left(\frac{dN_R}{dx}\right)dx \\ \int_L^R u'' N_L\,dx &= N_L\,u'\Big|_L^R - \int_L^R u'\left(\frac{dN_L}{dx}\right)dx \end{aligned}}$$

از جمله $\int Q u N_R\,dx$ و $\int Q u N_L\,dx$

چون Q کلی است و معلوم نیست بتوان انتگرال گرفت، فرض می‌کنیم می‌توان Q را ثابت فرض کرد و از انتگرال بیرون آورد :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_L^R Q u N_L\,dx &\simeq Q_{avg}\int_L^R u N_L\,dx \\ \int_L^R Q u N_R\,dx &\simeq Q_{avg}\int_L^R u N_R\,dx \end{aligned} \qquad \text{به طوری که : } Q_{avg} = \frac{\int_L^R Q\,dx}{\int_L^R dx}}$$

* جمله $\int \rho N_L dx$ و $\int \rho N_R dx$.

ش به تقریب عمل می‌کنیم

$$\int_L^R \rho N_L\, dx \simeq P_{avg.} \int_L^R N_L\, dx$$

$$\int_L^R \rho N_R\, dx \simeq P_{avg.} \int_L^R N_R\, dx$$

به طوری که $\quad P_{avg.} = \dfrac{\int_L^R \rho\, dx}{\int_L^R dx}$

حال باید محاسبات را انتگرال گرفت ، دقت شود به خاطر تعریف و ماهیت N_L و N_R ، سهولت و سادگی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} N_R(x=R) = 1 \\ N_R(x=L) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} N_L(x=L) = 1 \\ N_L(x=R) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[N_L u' \Big|_L^R - \int_L^R u' \left(\dfrac{dN_L}{dx}\right) dx \right] + \left[Q_{avg.} \int_L^R u N_L\, dx \right] - \left[P_{avg.} \int_L^R N_L\, dx \right] = 0 \\ \left[N_R u' \Big|_L^R - \int_L^R u' \left(\dfrac{dN_R}{dx}\right) dx \right] + \left[Q_{avg.} \int_L^R u N_R\, dx \right] - \left[P_{avg.} \int_L^R N_R\, dx \right] = 0 \end{cases}$$

← گام ششم : چون N_L و N_R برحسب x معلوم هستند ، لذا با شروع انتگرال‌ها بالا و مرتب کردن برحسب روی مجهول C_L و C_R (یا u_{i-1} و u_i) معادلات المان به شکل زیر بدست می‌آیند :

$$\boxed{\begin{cases} \left(\dfrac{1}{h_i} - \dfrac{Q_{avg.} h_i}{3}\right) C_L + \left(-\dfrac{1}{h_i} - \dfrac{Q_{avg.} h_i}{6}\right) C_R = -\dfrac{P_{avg.} h_i}{2} - u'\Big|_{x=L} \\ \left(-\dfrac{1}{h_i} - \dfrac{Q_{avg.} h_i}{6}\right) C_L + \left(\dfrac{1}{h_i} - \dfrac{Q_{avg.} h_i}{3}\right) C_R = -\dfrac{P_{avg.} h_i}{2} + u'\Big|_{x=R} \end{cases}}$$

به طوری که h_i طول المان می‌باشد ، $h_i \triangleq R-L$ یا $h_i \triangleq x_i - x_{i-1}$

* نکته : سمت راست معادلات را دقت کنید . از جنس شرایط مرزی هستند ! مهم .

۳- گام ششم: اسمبلی معادلات المان.

حال باید برای کل المان‌ها که دستگاه را می‌نویسیم (در این مثال تک‌بعدی بودن و خطی بودن توابع شکل، معادلات المان 2x2 می‌شود)، روی همدیگر تجمیع کنیم. با این تذکر که لازم است که نقطه راست در المان i ام، می‌شود نقطه چپ در المان i+1 ام. از طرفی مقادیر بردار b نیز باید در joint ها یکی باشد تا پیوسته باشد. اگر شرط پیوستگی مشتق اول را هم رعایت کنیم، آنگاه Strong Formulation داریم.

به عنوان مثال از دید تذکر لازم است که:

$$u'\Big|_{x=R} (@\ i) = u'\Big|_{x=L} (@\ i+1)$$

نهایتاً n+1 تا معادله برای n+1 مجهول خواهیم داشت و چون مسئله با فرض معلوم بودن مقدار تابع در دو سر مرزها می‌باشد (شرط مرزی دیریکله)، لذا دو مجهول و دو معادله حذف می‌شوند.

بالاخره بعد از تجمیع معادلات به یک دستگاه به شکل زیر می‌رسیم:

$$\boxed{[K]\ \underline{c} = \underline{b}}$$

به طوری که بردار مجهول $\underline{c}$ همان بردار مجهول مقادیر تابع در گره‌ها می‌باشد.

نکته فایده و اصطلاح: به ماتریس K می‌گویند (به طور کلی) ماتریس هدایت (Conductance Matrix) و به بردار $\underline{b}$ می‌گویند، بردار شرایط مرزی.

روش گالرکین (FEM) برای معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ ، فرمولاسیون استاندارد

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد فرمولاسیون FEM بستگی به معادله دیفرانسیل دارد. در اینجا نیز ایده کلی همان است یعنی تقریب کمیت مجهول h به صورت بسط توابع مستقل خطی. مسیر کار نیز همان است.

← تقریب تابع : برای یک ~~المان~~ المان

$$h(x,y) \simeq u(x,y) = \sum_{i=1}^{\text{تعداد گره‌ها}} u_i N_i(x,y)$$

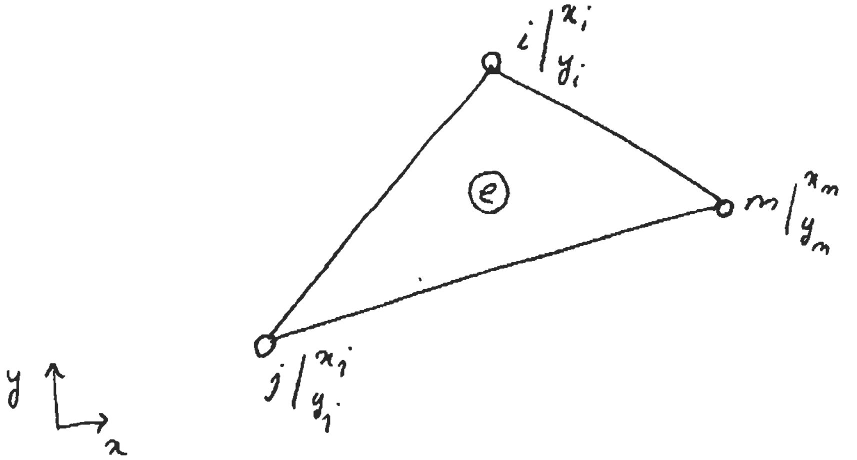
← تعریف باقیمانده :

$$R(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

← روش گالرکین :

$$\int_{\text{المان}} N_i \, R(x,y)\, dA = \iint_{\text{سطح المان}} N_i(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy$$

← مشخصات المان : برای شروع یک المان مثلثی در نظر می‌گیریم و آن را با اندیس e نمایش می‌دهیم، هدف محاسبه N_i است، (چون المان مثلثی را سه گره‌ای فرض کردیم) و یک دستگاه 3x3 برای المان می‌باشد.



از طرفی، باید $u^{(e)}$ را به صورت خطی دو متغیره نشان دهیم: (a_0، a_1 و a_2 مجهول هستند)

$$u^{(e)} = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

ولی می‌خواهیم با هماهنگی با FDM آن را به صورت زیر نشان دهیم: (مجهولات u_i، u_j و u_m هستند)

$$u^{(e)} = u_i N_i(x,y) + u_j N_j(x,y) + u_m N_m(x,y)$$

برای محاسبه N_i، N_j و N_m به شکل زیر عمل می‌کنیم:

مقادیر تابع جواب (u) باید در تمام گره‌ها صدق کند، پس:

$$\begin{cases} u_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \\ u_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ u_m = a_0 + a_1 x_m + a_2 y_m \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه بردار } \underline{a} \text{ مجهول}} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M\underline{a} = \underline{u} \rightarrow \underline{a} = M^{-1}\underline{u} \quad , \quad M \triangleq \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u^{(e)} = a_0 + a_1 x + a_2 y = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ u^{(e)} = u_i N_i + u_j N_j + u_m N_m = [u_i \quad u_j \quad u_m] \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow$$

$$[1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [u_i \quad u_j \quad u_m] \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[1 \quad x \quad y]\,\underline{a} = \underline{u}^T \underline{N} \Rightarrow \boxed{[1 \quad x \quad y] M^{-1} \underline{u} \equiv \underline{u}^T \underline{N}}$$

سمت راست را به جای $\underline{N}^T\underline{u}$ به شکل $\underline{u}^T\underline{N}$ می‌نویسیم، پس داریم:

$$[1 \quad x \quad y] M^{-1} \underline{u} \equiv \underline{N}^T \underline{u} \rightarrow \boxed{\underline{N}^T = [1 \quad x \quad y] M^{-1}}$$

حال اگر از M معکوس گرفته و در بردار سطری $[1 \quad x \quad y]$ ضرب کنیم، مجهول $\underline{N}$ به دست می‌آید:

$$N_i^{(e)}(x,y) = \frac{1}{2A^e}\left[(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y \right]$$

$$N_j^{(e)}(x,y) = \frac{1}{2A^e}\left[(x_m y_i - x_i y_m) + (y_m - y_i)x + (x_i - x_m)y \right]$$

$$N_m^{(e)}(x,y) = \frac{1}{2A^e}\left[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y \right]$$

به طوریکه

$$2A^e = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_m y_i - x_i y_m) + (x_j y_m - x_m y_j)$$

مقدار A^e همان سطح المان مثلثی می‌باشد که برحسب مختصات سه رأس آن نوشته شده است.
می‌توان نشان داد که توابع N_i، N_j و N_m در گره‌های متناظر خودشان برابر 1 هستند و در سایر گره‌ها صفر هستند. همچنین در ضلع مقابل به هر گره مانند N ها مقدار صفر می‌باشد.
حال که توابع پایه المان معلوم شدند، باید برگردیم و برای المان معادله دیفرانسیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} \iint_{(e)} N_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = 0 \\ \iint_{(e)} N_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = 0 \\ \iint_{(e)} N_m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = 0 \end{cases}$$

حال با جایگذاری تعریف u و N_i، N_j و N_m به یک دستگاه 3×3 با مجهولات u_i، u_j و u_m می‌رسیم. ولی باز هم مشکل مشتق دوم داریم و باید از انتگرال جزء به جزء (برای حالت دوبعدی انتگرال) استفاده کنیم: می‌توان نشان داد که رابطه انتگرال دوبعدی جزء به جزء به صورت زیر می‌باشد: (برای نقطه i می‌نویسیم و برای گره j و m هم به طور مشابه می‌توان نوشت)

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) N_i\,dx\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y\right) N_i\,d\sigma$$

به طوری که منظور از D دامنه المان (دو بعدی) و Γ مرز آن می‌باشد. $d\Gamma$ نیز المان دیفرانسیلی طول مسیر مرز بوده و انتگرال مسیر نیز روی کانتور بسته به طور پادساعتگرد در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) می‌باشد. n_x و n_y مؤلفه‌های بردار واحد نرمال بر المان دیفرانسیلی $d\Gamma$ می‌باشند (جهت بردار به سمت بیرون مرز می‌باشد)

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
\iint_{D^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_i \, d\Gamma \\[2ex]
\iint_{D^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_j \, d\Gamma \\[2ex]
\iint_{D^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_m \, d\Gamma
\end{cases}
$$

ابتدا سمت چپ معادلات را مورد محاسبه قرار می‌دهیم،
به طور مثال چند نمونه را تعقیب می‌کنیم:

$$u = u_i N_i(x,y) + u_j N_j(x,y) + u_m N_m(x,y) \rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + u_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + u_m \frac{\partial N_m}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A^e} (y_j - y_m)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{2A^e} (y_m - y_i)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} = \frac{1}{2A^e} (y_i - y_j)$$

و همینطور برای $\partial u/\partial y$ و $\partial N_i/\partial y$، $\partial N_j/\partial y$ و $\partial N_m/\partial y$ نوشته و جایگذاری کرده و انتگرال می‌گیریم، نتیجه به شکل زیر می‌شود:

به طور مثال اولین عبارت معادله سمت راست را در نظر بگیرید:

$$\iint_{D_{e}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$\iint_{D_{e}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u_i N_i + u_j N_j + u_m N_m\right)\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u_i N_i + u_j N_j + u_m N_m\right)\frac{\partial N_i}{\partial y}\right] dx\,dy =$$

$$\iint_{D_{e}} \left[u_i \frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + u_j \frac{\partial N_j}{\partial x}\,\frac{\partial N_i}{\partial x} + u_m \frac{\partial N_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} \right] dx\,dy +$$

$$\iint_{D_{e}} \left[u_i \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y} + u_j \frac{\partial N_j}{\partial xy}\,\frac{\partial N_i}{\partial y} + u_m \frac{\partial N_m}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dx\,dy =$$

چون N_i، N_j و N_m خطی هستند، لذا مشتقات پاره‌ای آنها مقدار ثابت می‌شوند و از انتگرال بیرون می‌آیند:

$$\iint_{D_{e}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$\left(\iint_{D_{e}} dx\,dy \right)\left(\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^2 \right) u_i +$$

$$\left(\iint_{D_{e}} dx\,dy \right)\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\,\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) u_j +$$

$$\left(\iint_{D_{e}} dx\,dy \right)\left(\frac{\partial N_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) u_m =$$

$$\boxed{A^e\left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^2\right]u_i + A^e\left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y}\right]u_j + A^e\left[\frac{\partial N_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y}\,\frac{\partial N_i}{\partial y}\right]u_m}$$

شبیه همین را برای معادلات دوم و سوم (البته سمت چپ فقط) را می‌توان نوشت.

⟸ **اسمبلی المان‌ها** : همانطور که در حالت یک بعدی نیز گفته شد، هدف نهایی رسیدن به یک دستگاه معادلات جبری به شکل زیر است :

$$[G]\,\underline{u} = \underline{f}$$

به طوریکه $\underline{u}$ بردار مجهولات (مقادیر تابع در گره‌ها) و $[G]$ ماتریس هدایت کلی و $\underline{f}$ بردار ثوابت مربوط به شرایط مرزی می‌باشد. از قبل ماتریس هدایت المان یا $[G^e]$ را بدست آوردیم :

$$[G^e] = \begin{pmatrix} G^e_{ii} & G^e_{ij} & G^e_{im} \\ G^e_{ji} & G^e_{jj} & G^e_{jm} \\ G^e_{mi} & G^e_{mj} & G^e_{mm} \end{pmatrix}$$

به طوریکه :

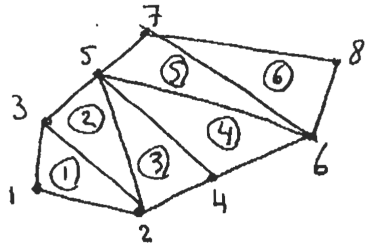
$$G^e_{ii} = A^e\left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^2\right] \qquad G^e_{ij} = A^e\left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y}\right] \qquad G^e_{im} = A^e\left[\frac{\partial N_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial y}\right]$$

$$G_{ji} = A^e\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial y}\right] \qquad G^e_{jj} = A^e\left[\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)^2\right] \qquad G^e_{jm} = A^e\left[\frac{\partial N_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial y}\right]$$

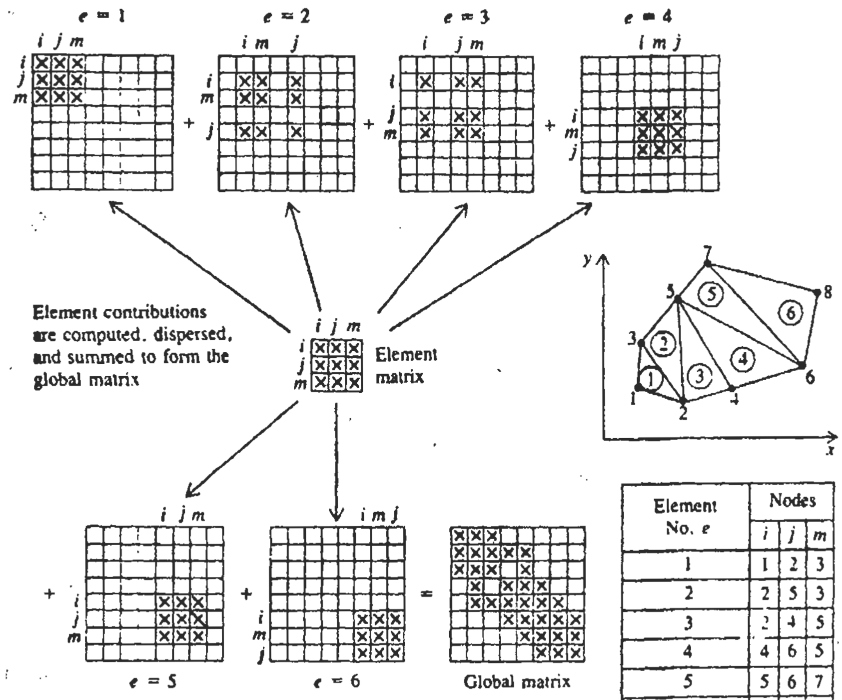
$$G_{mi} = A^e\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_m}{\partial y}\right] \qquad G_{mj} = A^e\left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_m}{\partial y}\right] \qquad G_{mm} = A^e\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial y}\right)^2\right]$$

حال برای کامل کردن این سه معادله، سه مجهول روی هم دیگر باید دید که گره در کدام المان‌ها شرکت می‌کند چون $[G^e]$ فقط روی سه المان اثر گذارد و برای تجمیع کافیست این المان‌ها به طور مناسب با هم جمع شوند. برای روشن شدن مطلب به مثال ساده زیر توجه کنید :

یک دامنه 6 المانی با 8 گره (مثلث‌بندی به شکل زیر). برای محاسبه $[G]$ باید مشخصات گره‌ها را از روی هم را پیدا کرده و در ماتریس $[G]$ کلی قرار داده و سپس همه ماتریس‌ها را با هم جمع بزنیم .



در شکل صفحه بعد، نحوه محاسبه $[G]$ از روی $[G^e]$ ها آمده است .



Element No. e	Nodes i	j	m
1	1	2	3
2	2	5	3
3	2	4	5
4	4	6	5
5	5	6	7
6	6	8	7

← شرایط مرزی: نکته‌ای که باقی مانده بردار b می‌باشد که مربوط به نوع شرایط مرزی می‌باشد.

که شرط مرزی عبارت زیر است: (سمت راست معادلات المان)

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) N_i \, d\Gamma$$

نکته: اگر گره i در المان باشد که یک یا دو ضلع آن در مرزها شرکت دارد و یا خود i روی مرز نباشد، آنگاه شرط مرزی هرچه می‌خواهد باشد، به هر حال N_i معادل صفر است ولی اگر گره مربوط روی مرز باشد، آنگاه انتگرال فوق به راحتی قابل محاسبه است.

شرط مرزی مشتق معلوم (نیومن): باید مقادیر معلوم $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ را در انتگرال مسیر بالا جایگذاری کرد.

شرط مرزی با مقدار تابع معلوم: در این صورت نیز اصلاً مقدار گره معلوم است و باید معادلات المان مربوطه را باید حذف کرد.

با مثال روشن می‌شود.

ـــ شرط مرزی مشتق معلوم (نیومن) : فرض کنید گره L روی مرزی باشد که در دو یال (ضلع) مرزی شرکت داشته باشد (به شکل مراجعه کنید)، آنگاه سمت راست معادله المان، با استفاده از قانون دارسی به دست می‌آید. بعضی سهولت فرض کنید سیستم هموژن و ایزوتروپیک بوده و بردار نرمال واحد شده است:

$$\text{مجموع}\left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y\right) N_L \, d\Gamma\right) = \int_i^L \frac{q_1}{K} N_L(\Gamma)\, d\Gamma + \int_L^M \frac{q_2}{k} N_L(\Gamma)\, d\Gamma$$

منظور از (مجموع $\int_\Gamma$) مسیری است که المان‌های L در آن شرکت دارند، می‌باشد.

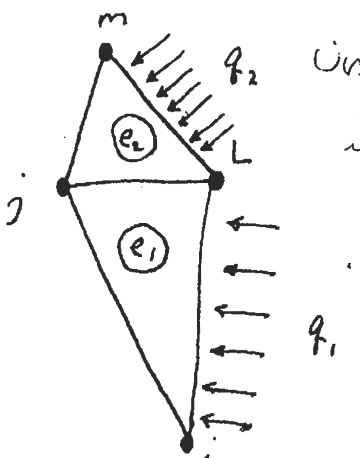
به طوری که

$$\begin{cases} q_x = -\dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = -k\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \\ q_y = -\dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = -k\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) \end{cases} , \quad k \triangleq \frac{k}{\mu}$$

حال اگر q_1 و q_2 را در راستای بردارهای یال‌های Li و mL در نظر بگیریم، آنگاه به فرمول بالا می‌رسیم. به عنوان مثال باید دو جمله سمت راست را با جایگذاری به دست آوریم. ادامه کار را به صورت جبری انجام می‌دهیم تا بتوان به راحتی و سهولت برای انواع المان‌ها آن را تکرار یا تعمیم دهیم:

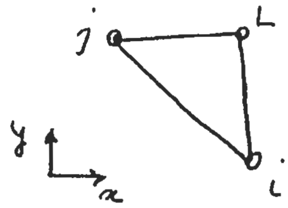
$$\int_i^L \frac{q_1}{k} N_L(\Gamma)\, d\Gamma = ?$$

* توضیح: علت اینکه $\int_{\Gamma_e}$ را به صورت دو جمله نوشتیم، به این خاطر است که ماتریس کلی از جمع ماتریس‌های المان به دست آمده است و f ها هم همه جمع $\int_{\Gamma_e}$ هستند، پس باید این انتگرال مسیر را در دو المان در نظر گرفت.

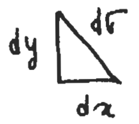


المان e_1 را در نظر گرفته و $N_L^{e_1}(x,y)$ را می‌نویسیم :

$$N_L^{e_1}(x,y) = \frac{1}{2A^{e_1}} \{ (x_j y_i - x_i y_j) + (y_j - y_i)x + (x_i - x_j)y]$$



رابطه المان سطح دیفرانسیل با المان‌های دیفرانسیلی مرزها :



$$(d\Gamma)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow d\Gamma = \sqrt{1+(dy/dx)^2} \cdot dx$$

معادله خط گذرنده از دو گره L و i (اساس ضلع iL) :

$$\frac{y-y_i}{y_L-y_i} = \frac{x-x_i}{x_L-x_i} \rightarrow \cdots \rightarrow y = \frac{y_L-y_i}{x_L-x_i}x + \frac{y_i x_L - x_i y_L}{x_L - x_i}$$

$$= S_{Li}\, x + N_{Li}$$

به طوریکه S_{Li} شیب و N_{Li} عرض از مبدأ امتداد گذرا می‌باشد :

$$S_{Li} \triangleq \frac{y_L-y_i}{x_L-x_i} \quad , \quad N_{Li} = \frac{y_i x_L - x_i y_L}{x_L - x_i}$$

حال که شیب جایگذاری کنیم :

$$\int_i^L \frac{q_1}{k} N_L \, d\Gamma = \frac{q_1}{k} \int_{x_i}^{x_L} N_L(x) \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx$$

$$= \frac{q_1}{k} \int_{x_i}^{x_L} N_L \sqrt{1+S_{Li}^2}\, dx$$

$$\int_i^L \frac{q_1}{k} N_L \, d\Gamma = \frac{q_1}{k}\cdot\frac{1}{2A^{e_1}}\Big\{ (x_j y_i - x_i y_j)(x_L - x_i) + \frac{1}{2}(y_j - y_i)(x_L^2 - x_i^2) + \frac{1}{2}(x_i - x_j)\, S_{Li}\,(x_L^2 - x_i^2) + (x_i - x_j)\, N_{Li}\,(x_L - x_i) \Big\}\sqrt{1+S_{Li}^2}$$

عبارت رادیکال را به صورت زیر ساده می کنیم :

$$\sqrt{1+S_{Li}^2} = \frac{\sqrt{(x_L - x_i)^2 + (y_L - y_i)^2}}{x_L - x_i} = \frac{\overline{iL}}{x_L - x_i}$$

به طوریکه $\overline{iL}$ طول ضلع یا یال متصل کننده گره های i و L می باشد .

با جایگذاری و ساده سازی :

$$\int_i^L \frac{q_1}{k} N_L \, d\Gamma = \frac{q_1}{k}\,\frac{1}{2A^{e_1}}\Big\{ (x_j y_i - x_i y_j) + \frac{1}{2}(y_j - y_i)(x_L + x_i) + \frac{1}{2}(x_i - x_j)\big[S_{Li}(x_L + x_i) + 2N_{Li} \big] \Big\}$$

عبارت داخل کروشه را به صورت زیر می نویسیم :

$$S_{Li}(x_L + x_i) + 2N_{Li} = S_{Li}x_L + S_{Li}x_i + N_{Li} + N_{Li} = y_L + y_i$$

با جایگذاری :

$$\int_i^L \frac{q_1}{k} N_L \, d\Gamma = \frac{\overline{iL}}{2A^{e_1}}\cdot\frac{q_1}{k}\Big\{ (x_j y_i - x_i y_j) + \frac{1}{2}(y_j x_L + \cancel{y_j x_i} - y_i x_L - \cancel{y_i x_i}) + \frac{1}{2}(x_i y_L + \cancel{x_i y_i} - x_j y_L - \cancel{x_j y_i}) \Big\}$$

حال چنانچه همین عملیات را برای انتگرال گیری انجام دهیم نتیجه به رابطه زیر می رسیم :

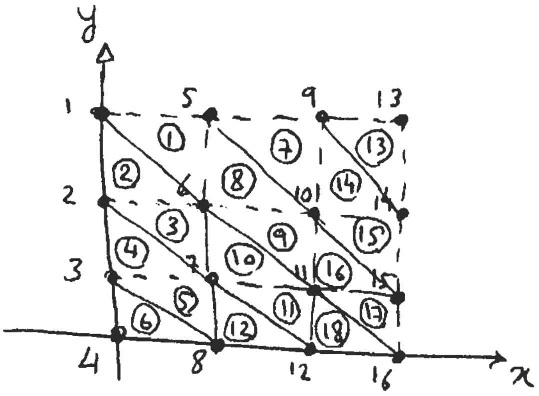
$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y\right) N_L \, d\Gamma = f_L = \frac{q_1}{k}\,\frac{\overline{iL}}{2} + \frac{q_2}{k}\,\frac{\overline{Lm}}{2}$$

← شرط مرزی دیریکله (مقدار تابع معلوم) : در این حالت چون مقدار تابع گره مربوطه معلوم می‌باشد، لذا معادله‌ای از المان که مقدار گره در آن معلوم است اضافی می‌باشد. لذا، اگر بخواهیم از حل مستقیم ماتریس استفاده کنیم، عملاً سایز دستگاه کاهش پیدا می‌کند.

برای حل سیستماتیک و الگوریتمیک (قابل پیاده‌سازی روی کامپیوتر) دو شیوه موجود است. اگر حل مستقیم ماتریس نخواهیم بکنیم، باید روی قطر ماتریس، المان متناظر روی مرز را یک ضریب بسیار بزرگ (مثلاً 10^{16}) داده و عیناً همین کار را برای f متناظر انجام دهیم. راه دیگر این است که دستگاه را به صورت تکراری حل کنیم و این معادله مازاد را هم دخیل ندانیم، چراکه تأثیری در جواب ندارد. نمونه‌ای از این روش را در مثال ملاحظه خواهید کرد.

مثال :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$



المان‌ها	Nodes i	j	m
1	1	6	5
2	1	2	6
3	2	7	6
4	2	3	7
5	3	8	7
6	3	4	8
7	5	10	9
8	5	6	10
9	6	11	10
10	6	7	11
11	7	12	11
12	7	8	12
13	9	14	13
14	9	10	14
15	10	15	14
16	10	11	15
17	11	16	15
18	11	12	16

Nodes	x	y
1	0	1
2	0	2/3
3	0	1/3
4	0	0
5	1/3	1
6	1/3	2/3
7	1/3	1/3
8	1/3	0
9	2/3	1
10	2/3	2/3
11	2/3	1/3
12	2/3	0
13	1	1
14	1	2/3
15	1	1/3
16	1	0

$$\begin{cases} N_i^{(e)} = \frac{1}{2A^e}\left[(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y\right] \\ N_j^{(e)} = \frac{1}{2A^e}\left[(x_m y_i - x_i y_m) + (y_m - y_i)x + (x_i - x_m)y\right] \\ N_m^{(e)} = \frac{1}{2A^e}\left[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y\right] \end{cases}$$

$$2A^e = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_m y_i - x_i y_m) + (x_j y_m - x_m y_j)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{1}{2A^e}(y_j - y_m) \quad , \quad \dfrac{\partial N_i}{\partial y} = \dfrac{1}{2A^e}(x_m - x_j) \\[2ex] \dfrac{\partial N_j}{\partial x} = \dfrac{1}{2A^e}(y_m - y_i) \quad , \quad \dfrac{\partial N_j}{\partial y} = \dfrac{1}{2A^e}(x_i - x_m) \\[2ex] \dfrac{\partial N_m}{\partial x} = \dfrac{1}{2A^e}(y_i - y_j) \quad , \quad \dfrac{\partial N_m}{\partial y} = \dfrac{1}{2A^e}(x_j - x_i) \end{cases}$$

$$G_{ii}^e = A^e\left[\frac{1}{4A^e A^e}(y_j - y_m)^2 + \frac{1}{4A^e A^e}(x_m - x_j)^2\right] = \frac{1}{4A^e}\left[(y_j - y_m)^2 + (x_m - x_j)^2\right]$$

$$G_{ij}^e = \frac{1}{4A^e}\left[(y_m - y_i)(y_j - y_m) + (x_i - x_m)(x_m - x_j)\right]$$

$$G_{im}^e = \frac{1}{4A^e}\left[(y_i - y_j)(y_j - y_m) + (x_j - x_i)(x_m - x_j)\right]$$

$$\vdots$$

به طور مثال، برای المان ① عبارت بالا را محاسبه می‌کنیم.

المان ① : $i=1 \; , \; j=6 \; , \; m=5$

$$G_{11}^{①} = \frac{1}{4A^e}\left[(y_6 - y_5)^2 + (x_5 - x_6)^2\right]$$

$$2A^e = (x_1 y_6 - x_6 y_1) + (x_5 y_1 - x_1 y_5) + (x_6 y_5 - x_5 y_6)$$
$$= (0 - 1/3 \times 1) + (1/3 \times 1 - 0) + (1/3 \times 1 - 1/3 \times 2/3) = -1/3 + 1/3 + 1/3 - 2/9 = 1/9$$

$$\rightarrow G_{11}^{①} = \frac{1}{2 \times 1/9}\left[(2/3 - 1)^2 + (1/3 - 1/3)^2\right] = \frac{9}{2} \times \left[\frac{1}{9} + 0\right] = \frac{1}{2}$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

به طور مثال، ماتریس المان اول به شکل زیر محاسبه شده است:

وقتی شماره المان ① شامل گره‌های i=1، j=6 و m=5 می‌باشد و ماتریس 3x3 المان

مربوطه تماماً صفر هستند جز المان‌های $G^{(1)}_{11}$ ، $G^{(1)}_{15}$ ، $G^{(1)}_{16}$ و

$G^{(1)}_{51}$ ، $G^{(1)}_{55}$ ، $G^{(1)}_{56}$

$G^{(1)}_{61}$ ، $G^{(1)}_{65}$ ، $G^{(1)}_{66}$:

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix}
0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

ماتریس کلی G از جمع ماتریس‌های المان بدست می‌آید:

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} + \cdots + G^{(16)} + G^{(17)} + G^{(18)}$$

در صفحه بعد، ماتریس G آمده است.

$$
G=\begin{bmatrix}
1 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1
\end{bmatrix}
$$

برای برقراری المان‌ها (درایه‌های) بردار ثوابت ($\underline{f}$)، باید به شرایط مرزی توجه کنیم:

و فرض می‌کنیم برای مرزهای دور، یعنی مکان $x=1$ و $y=1$، شرط دیریکله برقرار است و برای مرزهای نزدیک، یعنی مکان $x=0$ و $y=0$، شرط نیومن برقرار است.

$@\ x=1,\ \forall y \ :\ h=100$ (K را واحد فرض کنید)

$@\ y=1,\ \forall x \ :\ h=100$

$@\ x=0,\ \forall y \ :\ q_x=10 \ ,\ \partial h/\partial y=0$

$@\ y=0,\ \forall x \ :\ q_y=10 \ ,\ \partial h/\partial x=0$

با توجه به شرط دیریکله، گره‌های 13، 14، 15 و 16 (برای $x=1$) و گره‌های 1، 5، 9 و 13 (برای $y=1$) از کل مجموعه $\underbrace{\text{مجهولات حذف}}_{\text{(۷ مجهول)}}$ می‌شوند و دستگاه 16×16، باید به یک دستگاه 9×9 تقلیل پیدا کند.

(ستون‌ها و سطور 1، 5، 9، 13، 14، 15 و 16 را حذف می‌کنیم و دستگاه به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$
\begin{bmatrix}
2 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5 & 2 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -0.5 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix}
$$

برای محاسبه f_i ها، گره‌هایی که تحت فلاکس هستند عبارتند از:

1, 2, 3, 4, 8, 12, 16

که گره‌های 1 و 16 با شرط مرزی حذف شده‌اند، پس فقط f_2 ، f_3 ، f_4 ، f_8 و f_{12} دارای مقدار هستند و بقیه f ها صفر می‌باشند.

$$f_2 = \frac{q_x}{K}\,\frac{\overline{21}}{2} + \frac{q_x}{K}\,\frac{\overline{22}}{2} + \frac{q_x}{K}\,\frac{\overline{23}}{2} = \frac{10}{1}\times\frac{1/3}{2} + \frac{10}{1}\times\frac{0}{2} + \frac{10}{1}\times\frac{1/3}{2} = \frac{10}{3}$$

$$f_3 = \frac{q_x}{K}\cdot\frac{\overline{32}}{2} + \frac{q_x}{K}\,\frac{\overline{33}}{2} + \frac{q_x}{K}\,\frac{\overline{34}}{2} = \frac{10}{3}$$

$$f_4 = \frac{q_x}{K}\cdot\frac{\overline{43}}{2} + \frac{q_y}{K}\,\frac{\overline{48}}{2} = \frac{10}{1}\times\frac{1/3}{2} + \frac{10}{1}\times\frac{1/3}{2} = \frac{10}{3}$$

$$f_8 = \frac{q_y}{K}\cdot\frac{\overline{84}}{2} + \frac{q_y}{K}\cdot\frac{\overline{88}}{2} + \frac{q_y}{K}\cdot\frac{\overline{812}}{2} = \frac{10}{3}$$

$$f_{12} = \frac{10}{3}$$

بدین ترتیب بردار $\underline{f}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 10/3 \\ 0 \\ 0 \\ 10/3 \\ 0 \\ 0 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

پس از حل دستگاه، مقادیر هد (فشار) در حالت تکنیوافت به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = G^{-1} \times \underline{f} \rightarrow \quad = \begin{matrix} 5.8974 \\ 9.7436 \\ 13.0769 \\ 3.5897 \\ 6.6667 \\ 9.7436 \\ 1.7949 \\ 3.5897 \\ 5.8974 \end{matrix}$$

بنابراین مقادیر h ها در گره‌های مختلف به دست آمدند. در شکل زیر مقادیر هد در گره‌ها نشان داده شده است، مقادیری که داخل دایره قرار دارند از قبل معلوم و مشخص شده می‌باشند (از روی شرطهای مرزی در ابتدا).

100	100	100	100
5.8974	3.5897	1.7946	100
9.7436	6.6667	3.5897	100
13.0769	9.7436	5.8974	100