



مسئله اول: نقاط اکسترمم توابع زیر را یافته و بررسی کنید که چه خصوصیتی دارند (مینیمم، ماگزیمم، نقطه عطف، و ...). در هر مورد نمودار تابع را نیز رسم کنید.

الف. $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

ب. $f(x) = x^3 - 5x + 3\sin(x^2); x \in [-2, 2.5]$

ج. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

د. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

ه. $f(x, y) = [1 + (x + y + 1)^2 (19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)]$
 $\times [30 + (2x - 3y)^2 (18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)]$

مسئله دوم: مطلوب است محاسبه مینیمم تابع هدف‌های زیر تحت شرایط و قیود داده‌شده:

Minimize $f(x) = 5 \sum_{i=1}^4 x_i - 5 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \sum_{i=5}^{13} x_i$

Subject to:
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0; & -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0; & -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0; & -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0 \\ -8x_1 + x_{10} \leq 0; & -x_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, 13) \\ -8x_2 + x_{11} \leq 0; & x_i - 1 \leq 0 \quad (i=1, \dots, 9, 13) \\ -8x_3 + x_{12} \leq 0; & x_i - 100 \leq 0 \quad (i=10, 11, 12) \end{cases}$$

الف.

Minimize $f(x) = x_1^{0.6} + 2x_2^{0.6} + 2x_3 - 2x_2 - x_4$

Subject to:
$$\begin{cases} x_2 - 3x_1 - 3 = 0; & x_1 \leq 3 \\ x_1 + 2x_3 \leq 4; & x_4 \leq 2 \\ x_2 + x_4 \leq 4; & x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 4) \end{cases}$$

ب.

Minimize $f(x) = 2 - \frac{1}{120} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

Subject to:
$$\begin{cases} -x_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, 5) \\ x_i - i \leq 0 \quad (i=1, \dots, 5) \end{cases}$$

ج.

$$\text{Minimize } f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$$

$$\text{Subject to: } \begin{cases} -127 + 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 \leq 0; \\ -282 + 7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 \leq 0; \\ -196 + 23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 \leq 0; & -10 - x_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, 7) \\ 4x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 \leq 0; & x_i - 10 \leq 0 \quad (i=1, \dots, 7) \end{cases} \quad .د$$

$$\text{Minimize } f(x) = -0.5(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 + x_5x_8 - x_6x_7)$$

$$\text{Subject to: } \begin{cases} x_3^2 + x_4^2 - 1 \leq 0; \\ x_9^2 - 1 \leq 0; & x_2x_3 - x_1x_4 \leq 0 \\ x_5^2 + x_6^2 - 1 \leq 0; & -x_3x_9 \leq 0 \\ (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 - 1 \leq 0; & x_5x_9 \leq 0 \\ (x_1 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 - 1 \leq 0; & x_6x_7 - x_5x_8 \leq 0 \\ (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 - 1 \leq 0; & -10 - x_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, 8) \\ (x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 - 1 \leq 0; & x_i - 10 \leq 0 \quad (i=1, \dots, 8) \\ x_7^2 + (x_8 - x_9)^2 - 1 \leq 0; & -x_9 \leq 0 \\ x_1^2 + (x_2 - x_9)^2 - 1 \leq 0; & x_9 - 20 \leq 0 \end{cases} \quad .ه$$

مسئله سوم: هزینه عملیات یک رآکتور CSTR به صورت زیر داده شده است:

$$C_T = C_f C_{A0} g + C_m V$$

هزینه اختلاط + هزینه خوراک = هزینه کلی

به طوری که، C_f هزینه تأمین خوراک (5 دلار بر مول)، C_{A0} غلظت خوراک (0.04 مول بر فوت مکعب)، g دبی خوراک (فوت مکعب بر ساعت)، C_m هزینه هم زدن (0.3 دلار بر ساعت فوت مکعب)، و V حجم رآکتور (فوت مکعب) می باشد.

واکنش درجه اول زیر در رآکتور انجام می شود:



$$r_B = kC_A, \quad k = 0.1 \text{ hr}^{-1}$$

الف. اگر 10 lbmol/hr از B محصول داشته باشیم، دو قید (بیان جرم) مسئله که متغیرهای مستقل را محدود می کنند بنویسید. فرض کنید غلظت B در خوراک صفر است.

ب. تابع لاگرانژین را تعریف کنید و مجموعه دستگاه جبری را برقرار کنید.

ج. دستگاه مزبور را حل کرده و مقادیر V ، g و C_{A0} که هزینه را حداقل می کنند به دست آورید.