بهگزینی دینامیکی – مقدمات تئوری بهگزینی[1]

۱- مقدمه و یادآوری

مسائل بهگزینی را به زعمی می‌توان از دو زاویه نگریست:

روش متدولوژیک: از این زاویه، فقط به تکنیک‌های حل مسائل بهگزینی پرداخته می‌شود.

روش تحلیلی یا تئوری بهگزینی: اگر از این زاویه وارد شویم، به طور اساسی و اصولی به مسائل بهگزینی خواهیم پرداخت، لذا می توان به راحتی چارچوب روش های حل را تدوین کرد و همچنین کاربرد آن را در سایر علوم مهندسی مثل کنترل بهینه به روشنی تبیین کرد.

شاید ساده‌ترین مساله بهگزینی همان مینیمم‌یابی یک تابع یک متغیره باشد که کافیست مشتق تابع را معادل صفر قرار داده و یک مسأله غالباً غیر خطی جبری را حل کنیم. پس از حل، مقدار محاسبه شده را در مشتق مرتبه دوم قرار می دهیم. در صورت مثبت بودن، نقطه اکسترمم، مینیمم است و در غیراینصورت، ماکزیمم است.

به طور کلی، مواد مطروحه در مسائل بهگزینی شامل:

(۱) شرایط لازم و کافی برای بهینه بودن (مینیمم یا ماگزیمم سازی)

(۲) قیود و انواع آن

(۳) و احتساب قیود به شکل جبری و شکل دیفرانسیلی می‌باشد. اگر قیود فقط به شکل جبری (چه تساوی یا نامساوی) ظاهر شوند، به اصطلاح مهندسی، با یک مسأله بهگزینی استاتیکی روبرو هستیم و اگر به زبان مهندسی کنترل صحبت کنیم، با یک مسأله کنترل سوپروایزری[2] روبرو هستیم (بهگزینی در شرایط پایا[3]). اگر قیود به شکل دینامیکی یا معادله دیفرنسیال ظاهر شوند، در آنصورت با یک مسأله بهگزینی دینامیکی، یا به زبان کنترل، با یک مسأله کنترل بهینه روبر هستیم.

از آنجاییکه با تابع تابع سروکار داریم (خود $\underline{x}$ متغیر تصمیم‌گیری یا بهینه است و از آنجاییکه خود $\underline{x}$ با t تابعیت دارد، لذا با تابعِ تابع سرو کار داریم)، بحث فانکشنال (یا همان تابعِ تابع) مطرح می شود یعنی اصلی‌ترین عنصر حساب جامع تغییرات[4].

در ادامه برای تقریب ذهنی، مأنوس‌شدن ذهن و تأمین انگیزه برای کنترل بهینه، به طور مختصر به مسائل بهگزینی استاتیکی می‌پردازیم.

---

[1]- Variational approach
[2]- Supervisory Computer Control
[3]- Steady-State Optimization
[4]- Variational Calculus

۲- چارچوب ریاضی (تحلیلی) برای بهگزینی توابع جبری- حالت بدون قید (شرایط لازم و کافی)

فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای برداری- که درآن نورم تعریف شده است- باشد (مثل فضای باناخ **Banach**). اگر A را برد تابع اسکالر f با مقادیرحقیقی فرض کنیم، آنگاه f یک نگاشت از فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ به فضای $\mathbb{R}^1$ خواهد بود؛ به زبان ساده f یک تابع یکنوای چند متغیره است.

فانکشن (تابع) f دارای یک ماگزیمم (مینیمم) نسبی در $\underline{\alpha}$ (یک عنصر خاص از دامنه بردار متغیر مستقل) است، اگر و تنهااگر وجود داشته باشد یک عدد حقیقی مثل δ بطوریکه برای $\underline{x}$ (یک عنصر نوعی ونمونه) در همسایگی $\underline{\alpha}$ (یعنی $\underline{x}$ فاصله تا $\underline{\alpha}$ به شعاع کمتر از δ باشد، یا به زبان هندسی: $\|\underline{x}-\underline{\alpha}\|<\delta$ **)** داشته باشیم:

(۱) برای ماگزیمم: $f(\underline{x})\le f(\underline{\alpha})$

(۲) برای مینیمم: $f(\underline{x})\ge f(\underline{\alpha})$

اگر این شرایط برای تمام مقادیر $\underline{x}$ درمجموعه خود باشد، آنگاه نقطه مزبور یک اکسترمم (مینیمم یا ماگزیمم) مطلق ، فراگیر یا جامع است.

نکته: همانطور که قبلاً هم گفتیم، تعریف اخیر فقط اصالت علمی و ریاضی دارد، لذا کاربردی نیست و نیاز به یک سری روابط یا شرایط داریم که به خصوصیات $f(\underline{x})$ ربط داشته باشد.

۲-۱ – شرط لازم

می‌توان اثبات کرد که شرط لازم برای اینکه $\underline{\alpha}$، اکسترمم تابع $f(\underline{x})$ بطور نسبی (یا داخلی) باشد، این است که دیفرنسیال کامل f صفر باشد ($df=0$) :

(۳)
$$\begin{cases} \partial f/\partial x_1\big|_{\underline{x}=\underline{\alpha}}=0 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n\big|_{\underline{x}=\underline{\alpha}}=0 \end{cases}$$

یا

(۴)
$$\left.\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\underline{\alpha}}=\underline{0}$$

دقت کنید این شرط تعمیم همان شرط لازم برای تابع یک متغیره می باشد:

(۵)
$$\frac{df}{dx}=0$$

۲-۲- شرط کافی

اگر تابع یکنوا [1] تا مرتبه دوم مشتق‌پذیر باشد، می توان اثبات کرد که شرط کافی برای مینیمم یا ماگزیمم بودن، علامت مشتق دوم است:

---
[1] - Smooth

$$\left[\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right)\right]_{\underline{x}=\underline{\alpha}} = Q \qquad (۶)$$

نکته ۱: اگر Q یک ماتریس معین منفی باشد، $\underline{\alpha}$ نقطه ماگزیمم لست و اگر معین مثبت باشد، مینمم است.

یادآوری: شرط مثبت معین بودن یک ماتریس این است که دترمینان ماینورهای اصلی مثبت باشد و شرط منفی معین بودن این است که دترمینان ماینورهای اصلی یک در میان مثبت و منفی باشد. مضافاً، همین خاصیت برای علامات مقادیر ویژه ماتریس ضرایب فرم مجذوری Q برقرار است.

نکته ۲: دقت کنید، این شرط تعمیم همان شرط کافی برای تابع یک متغیره می‌باشد:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \succ 0 \quad \text{: مینیمم است } \alpha \qquad (۷)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \prec 0 \quad \text{: ماکزیمم است } \alpha \qquad (۸)$$

۲-۳- نکته وجوهر اثبات شرایط لازم و کافی

شرط لازم را می توان از قرائت فانکشنال توابع (حساب جامع تغییرات) به دست آورد (گرچه روش‌های دیگری مثل آنالیز حدی، هندسه دیفرانسیلی و توپولوژی نیز وجود دارند). مقدار تغییر تابع[1] راکه با Δf نمایش می‌دهیم، به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\Delta f = f\left(\underline{x}+\delta\underline{x}\right) - f\left(\underline{x}\right) \qquad (۹)$$

به‌طوری که $\delta\underline{x}$ یک تغییر کوچک[2] در $\underline{x}$ می باشد. دقت شود که تغییر در متغییر تابع را با Δ و تغییر در متغییر مستقل را با δ نمایش می دهیم. علت این است که می خواهیم ملایم‌ترین شرایط را برای f در نظر بگیریم، مثلاً اصرار نداریم که مشتقات مراتب بالاتر f حتماً پیوسته باشد، فقط مشتق مرتبه اول وبرای شرط کافی، مشتق مرتبه دوم باید پیوسته باشد.

حال اگر $f\left(\underline{x}+\delta\underline{x}\right)$ را بسط تیلور دهیم:

$$f\left(\underline{x}+\delta\underline{x}\right) = f\left(\underline{x}\right) + \left(\partial f/\partial \underline{x}\right)^T \delta\underline{x} + \mathrm{O}\left(\delta\underline{x}^n\right) \;, \quad n \geq 2 \qquad (۱۰)$$

بطوریکه O، معرف جملات مراتب بالاتر می باشد. با استفاده از این بسط می توان تغییر در f را به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f = \left(\partial f/\partial \underline{x}\right)^T \delta\underline{x} + \mathrm{O}\left(\delta\underline{x}^n\right) \;, \quad n \geq 2 \qquad (۱۱)$$

قسمت خطی Δf موسوم به اولین واریاسیون f[3] است و به شکل زیر نمایش می دهیم:

$$\delta f = \left(\partial f/\partial \underline{X}\right)^T \delta\underline{X} \qquad (۱۲)$$

نکته: دقت کنید، با فرض یکنوا بودن مشتق مرتبه اول، می‌توان تغییر در f را مثل $\underline{x}$، با δ نمایش داد!

حال در حالت حدی، یعنی $\delta\underline{x} \to \underline{0}$، جملات مراتب بالاتراز نظر هم ارزی در برابر اولین واریاسیون صفر محسوب می گردند و چون $\delta\underline{x} \neq \underline{0}$ (بلکه به سمت صفر میل می کند)، لذا شرط اینکه Δf تغییری نکند (یعنی $\Delta f = 0$ باشد)، این است که عبارت $\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$ معادل صفر باشد، پس شرط لازم اثبات شد. اثبات شرط کافی در حوصله این بحث نیست.

---

[1] - Function Increment Value
[2] - Variation
[3] - First Variation

۳- محاسبه اکسترمم (شرط لازم) با قیود مساوی

فرض کنید تابع هدف اسکالر چند متغیره J را می‌خواهیم ماگزیمم یا مینیمم کنیم ولی متغیرها (یعنی $\underline{x}$) تحت قیود مساوی هستند، یعنی بهگزینی را روی یک مکان (یا مکان هایی) از $\underline{x}$ می خواهیم انجام دهیم. رابطه یا قید های مذکور را با یک تابع برداری مثل $\underline{f}(\underline{x})$ نمایش می دهیم. $\underline{f}(\underline{x})$ یک نگاشت از $\mathbb{R}^n$ (دامنه $\underline{x}$) به $\mathbb{R}^m$ (برد $\underline{f}(\underline{x})$) می‌باشد، یعنی انگار m تا تابع اسکالر از $\underline{x}$ داریم که به آنها می گوییم قیود مساوی (m تا $f_i(\underline{x})=0$).
اگر بخواهیم این مسأله (محاسبه شرط لازم) را با دانسته های الان (دانش فعلی) حل کنیم، باید به نحوی مسأله بهگزینی مقید (با قید تساوی) را به شکل مسأله بهگزینی غیر مقید تبدیل کنیم. خواهید دید به تکثیرکن های لاگرانژ می‌رسیم:
برای سهولت و نورانی‌تر کردن ایده (!!)، مسأله را برای فقط یک قید تساوی حل می‌کنیم، بدون اینکه به کلیت مسأله صدمه‌ای وارد شود. به همین دلیل بعد $\underline{x}$ را نیز ۲ در نظر می‌گیریم، یعنی $\underline{x}=[x_1\ x_2]^T$.
شروع اثبات: چون در حالت نامقید، مسأله مشتق‌گیری داشتیم، ما هم از J (تابع آبجکتیو) و $\underline{f}$ (قیود) مشتق می‌گیریم تا بعد چه شود.

(۱۳) دیفرنسیال کامل J:
$$dJ = \partial J/\partial x_1 . dx_1 + \partial J/\partial x_2 . dx_2$$

(۱۴) دیفرنسیال $\underline{f}$ (در حالت یک‌قیدی f):
$$df = \partial f/\partial x_1 . dx_1 + \partial f/\partial x_2 . dx_2$$

حال می گوییم جفت دیفرنسیال ها صفر هستند، چون dJ مساوی صفر است، به خاطر اینکه شرط لازم اکسترمم است و df صفر است چون f به شکل قید تساوی ظاهر شده است ($f(\underline{X})=0$).

(۱۵)
$$df=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}$$

(۱۶)
$$dJ=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\partial J/\partial x_1}{\partial J/\partial x_2}$$

دو چیز مساوی یک چیز، با هم برابرند!!! $\Rightarrow$

(۱۷)
$$\frac{\partial j/\partial x_1}{\partial j/\partial x_2}=\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}$$

یا

(۱۸)
$$\frac{\partial J/\partial x_1}{\partial f/\partial x_1}=\frac{\partial J/\partial x_2}{\partial f/\partial x_2}$$

عبارت سمت چپ حتماً تابعی از x_1 و x_2 است و همینطور عبارت سمت راست. ولی برای اینکه این دو تابعیت همیشه با هم مساوی باشند ممکن نیست مگر آنکه هردو طرف تابعی از x_1 و x_2 نباشند!!! بلکه یک مقدار ثابت باشند، به این مقدار می گوییم تکثیرکن لاگرانژ[1] ، و آنرا با $-\lambda$ نمایش می دهیم (علامت منفی به خاطر سهولت و نمایش جمع جبری است، خواهید دید.
پس تا اینجا رسیدیم:

$$\frac{\partial J/\partial x_2}{\partial J/\partial x_2}=\frac{\partial J/\partial x_1}{\partial f/\partial x_1}=-\lambda \rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 & (۱۹)\\[2ex] \dfrac{\partial J}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 & (۲۰)\end{cases}$$

[1] - Lagrange Multiplier

حال اگر لانگراژین را به صورت **Affine** (یعنی خطی) نسبت به λ تعریف کنیم:

$$L \triangleq J + \lambda f \tag{۲۱}$$

آنگاه شرایط لازم بالا را می‌توان به فرم بسته زیر نوشت:

$$\left. \partial L \middle/ \partial \underline{x} \right|_{\underline{x}=\alpha} = 0 \tag{۲۲}$$

پس به منظورمان رسیدیم، یعنی مسأله مقید را با استفاده از تعریف لاگرانژین (استفاده از تکثیرکن لاگرانـژ) تبـدیل کردیم به مسأله بهگزینی نامقید.

برای جمع بندی و کلی نویسی، شرط لازم برای محاسبه اکسترمم یک فانکشن آبجکتیو مثل $J(\underline{x})$ تحت قیـد $\underline{f}(\underline{x})$ به شکل زیر است:

(۲۳) $\mathrm{L}(\underline{\mathrm{x}},\underline{\lambda}) \triangleq \mathrm{J}(\underline{\mathrm{x}})+\underline{\lambda}^{\mathrm{T}}\underline{\mathrm{F}}(\underline{\mathrm{x}})$: (تعریف)

(۲۴) $\partial L / \partial \underline{x} = 0$: (n تا معادله جبری)

(۲۵) $\partial L / \partial \underline{\lambda} = 0$: (m تا معادله جبری)

دقت شود تعداد تکثیرکن ها برابر است با تعداد قیود مساوی.

۴- کاربرد بهگزینی توابع جبری برای مسأله کنترل سوپروایزوری (کنترل بهینه استاتیکی)

فضای حالت غیرخطی (مدل فرآیند) در حالت **Steady State** به شکل زیر است:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = \underline{0} \rightarrow \underline{f}(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) = \underline{0} \tag{۱۷-۲۶}$$

اگر دستگاه معادله بالا را (با بعد n) به صورت قیود مساوی در نظر بگیریم، آنگـاه بـا توصـیف یـک شـاخص عملکـرد[1]، توانستیم یک مسأله بهگزینی استاتیکی را فرموله کنیم:

$$Minimize \quad J(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) \quad Subject\ to \quad \underline{f}(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) = \underline{0} \tag{۱۷-۲۷}$$

بطوریکه $\underline{x}$ از بعد n، $\underline{u}$ از بعد m و $J(\underline{x})$ تابع اسکالر یا نگاشت $\mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{1}$ می‌باشد.

اگر لاگراژین زیر را به عنوان آبجکتیو بهگزینی انتخاب کنیم:

$$L(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss},\underline{\lambda}) = J(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) + \underline{\lambda}^{T}\underline{f}(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) \tag{۱۷-۲۸}$$

شرایط لازم برای محاسبه اکسترمم عبارتست از:

(۱۷-۲۹) $\dfrac{\partial L}{\partial \underline{x}_{ss}} = \underline{0} = \dfrac{\partial J}{\partial \underline{x}_{ss}} + \dfrac{\partial}{\partial \underline{x}_{ss}}\left(\underline{\lambda}^{T}\underline{f}\right)$ (n تا معادله)

(۱۷-۳۰) $\dfrac{\partial L}{\partial \underline{u}_{ss}} = \underline{0} = \dfrac{\partial J}{\partial \underline{u}_{ss}} + \dfrac{\partial}{\partial \underline{u}_{ss}}\left(\underline{\lambda}^{T}\underline{f}\right)$ (m تا معادله)

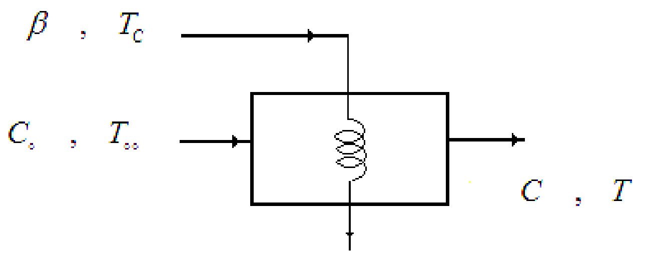
(۱۷-۳۱) $\dfrac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{0} \quad or \quad \underline{f}(\underline{x}_{ss},\underline{u}_{ss}) = \underline{0}$ (n تا معادله)

مثال ۱۷-۱ (فرآیندی): می خواهیم مقدار بهینه نرخ شدت جریان سیال مبرد را در راکتور **CSTR** زیـر (شـکل ۱۷-۱) بیابیم. به عبارت دیگر مقدار مقرر[2] شدت جریان مبرد یا مقدار **Steady-State** بهینه آنرا بیابیم. واکـنش بـه صـورت درجه اول و گرمازا می باشد. سرعت واکنش تابعیت آرنیوس با دما دارد:

[1] - Performance Index
[2] - Set Point

$$r = k_{\circ} C \exp\left(-E_a / \left(R(T+273)\right)\right) \quad (۱)$$

به طوریکه $k_{\circ}$ ثابت فرکانس، E_a انرژی اکتیواسیون و T دمای واکنش بر حسب سانتیگراد می باشد.



شکل ۱۷-۱

بیلان جرم:

$$V \, {dC}/{dt} = FC_{\circ} - FC - VCk_{\circ} e^{-E_a/R(T+273)} \quad (۲)$$

به طوریکه V حجم خیس راکتور و F دبی حجمی می باشد.

بیلان انرژی:

$$\rho V c_p \, {dT}/{dt} = \rho c_p F T_{\circ} - \rho c_p F T - \beta\left(T - T_c\right) + \Delta H C V k_{\circ} e^{-E_a\left(R(T+273)\right)} \quad (۳)$$

به طوریکه ρ دانسیته، c_p ظرفیت گرمایی ویژه، ΔH گرمای واکنش و β بار خنک کن است که با تغییر فلوی مبرد، مقدارش کم و زیاد می شود.

فرمولاسیون فضای حالت:

چون دو معادله دیفرنسیال داریم، پس بعد فضای حالت معادل ۲ است و حالت های فیزیکی سیستم را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} C \\ T \end{pmatrix} \quad (۴)$$

متغییر کنترل کننده (ورودی سیستم)، همان β است، پس

$$\underline{u} = u = \beta \ \frac{\text{cal}}{\min \Delta^{\circ} c} \quad (۵)$$

یک سری اعداد نمونه عبارتند از:

$$T = 30 \ {}^{\circ}\text{C} \, , C = 0.492 \ \frac{\text{gmole}}{\text{lit}} \ , \beta = 256 \ \frac{\text{cal}}{\text{min.}^{\circ}\Delta\text{C}}$$

برای راحتی حل معادلات بهگزینی (دستگاه معادله جبری برای شرایط لازم)، فضای حالت را خطی می کنیم و شرایط را **Steady- State** فرض می کنیم:

$$\begin{cases} -0.1048 \ C_{ss} - 0.002034 \ T_{ss} + 0.09884 = 0 & (۶) \\ 0.03055 \ C_{ss} - 0.0002037 \ T_{ss} - 0.0000346 \ \beta_{ss} + 0.0039409 = 0 & (۷) \end{cases}$$

که به فرم کلی زیر می توان نشان داد:

$$A\underline{x}_{ss} + B\underline{u}_{ss} + \underline{c} = \underline{0} \quad (۸)$$

نکته: دقت شود ظاهر شدن بردار $\underline{c}$، به خاطر اینست که از متغیرهای انحراف استفاده نمی‌کنیم.

تعریف شاخص عملکرد:

یک تعریف می تواند محاسبه شرایط بهینه به طوری که غلظت نهایی مینیمم شود (ماگزیمم تبدیل)، یا دمای واکنش مینیمم شود (مینیمم ریسک انفجار یا آتش سوزی)، یا صرفه اقتصادی به طوریکه مینیمم فلوی مبرد برای کاهش هزینه داشته باشیم، در بر بگیرد. با توجه به واقعیات بالا، تعریف آبجکتیو ترکیبی زیر، یک انتخاب معقول و طبیعی است:

$$J=\frac{1}{2}C_{ss}^2+\frac{1}{2}qT_{SS}^2+\frac{1}{2}r\beta_{ss}^2 \qquad (۹)$$

دقت شود اگر هدف، ماکزیمم تبدیل باشد، کافیست ضرایب q و r (اوزان مینیمم دما و مینیمم هزینه) را صفر قرار دهید و اگر هدف ماکزیمم تبدیل و صرفه اقتصادی باشد، ضریب q را صفر قرار دهید و هکذا...

محاسبه لاگرانژین:

چون دوقید مساوی داریم، پس دو تا λ داریم:

$$L=J+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2 \qquad (۱۰)$$

به طوریکه:

$$f_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+c_1 \qquad (۱۱)$$

$$f_2=a_{21}+a_{22}x_2+b_2u+c_2 \qquad (۱۲)$$

شرایط لازم:

$$\partial L/\partial x_1=0=x_1+\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21} \qquad (۱۳)$$

$$\partial L/\partial x_2=0=qx_2+\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22} \qquad (۱۴)$$

$$\partial L/\partial u=0=ru+b_2\lambda_2 \qquad (۱۵)$$

$$\partial L/\partial \lambda_1=0=a_{11}x_1+a_{12}x_2+c_1 \qquad (۱۶)$$

$$\partial L/\partial \lambda_2=0=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u+c_2 \qquad (۱۷)$$

با جایگذاری مقادیر و انتخاب اوزان $q=5\times10^{-4}$ و $r=5\times10^{-6}$ و استفاده از **MATLAB** برای حل دستگاه خطی فوق، به جواب بهینه زیر می رسیم:

$$x_{1,ss}=0.263\ \frac{\text{gmole}}{\text{lit}}$$

$$x_{2,ss}=35.1^{\circ}\text{C}$$

$$\lambda_1=8.29$$

$$\lambda_2=19.91$$

$$\beta=137.8\ \frac{\text{cal}}{\text{min.}^{\circ}\Delta\text{C}}$$

۱۷-۵- فرم بسته کنترل استاتیکی برای سیستم های خطی

اگر قیود مسئله را به فرم خطی زیر نمایش دهیم:

$$A\underline{x}_{ss}+B\underline{u}_{ss}+\underline{c}=0 \qquad (۱۷-۳۲)$$

و شاخص عملکرد (تابع هدف) تربیعی یا مجذوری[1] را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$J=\frac{1}{2}\underline{u}_{ss}^T R\underline{u}_{ss}+\frac{1}{2}\underline{x}_{ss}^T Q\underline{x}_{ss} \qquad (۱۷-۳۳)$$

[1]- Quadratic

نکته: در برخی کتب یا مقالات فرم تربیعی را به شکل هندسی یعنی با استفاده از تعریف نورم وزن دار نمایش می‌دهند:

$$J = \frac{1}{2}\left\|\underline{u}_{ss}\right\|_R^2 + \frac{1}{2}\left\|\underline{x}_{ss}\right\|_Q^2 \tag{۳۳-۱۷}$$

لاگرانژین سیستم فوق به صورت زیر در می آید:

$$L = \frac{1}{2}\underline{u}_{ss}^T R \underline{u}_{ss} + \frac{1}{2}\underline{x}_{ss}^T Q \underline{x}_{ss} + \underline{\lambda}^T\left[A\underline{x}_{ss} + B\underline{u}_{ss} + \underline{c}\right] \tag{۳۴-۱۷}$$

شرایط لازم اکسترمم :

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}_{ss}} = 0 = Q\underline{x}_{ss} + A^T\underline{\lambda} \tag{۳۵-۱۷}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{u}_{ss}} = 0 = R\underline{u}_{ss} + B^T\underline{\lambda} \tag{۳۶-۱۷}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}_{ss}} = 0 = A\underline{x}_{ss} + B\underline{u}_{ss} + \underline{c} \tag{۳۷-۱۷}$$

دستگاه بالا را می توان به فرم بسته حل کرد و مقدار بهینه کنترل استاتیکی را بدست آورد:

$$\underline{u}_{ss}^{opt.} = -\left[R + B^T A^{-T} Q A^{-1} B\right]^{-1} B^T A^{-T} Q A^{-1}\underline{c} \tag{۳۸-۱۷}$$

۱۷-۶- شرایط لازم برای اکسترمم مقید حالت کلی

درست شبیه اکسترمم نامقید می‌توان با استفاده از تعریف لاگرانژین و واریاسیون اول شرایط لازم گفته‌شده را اثبات کرد که در این مختصر نمی‌گنجد و لذا شرایط لازم مذکور را اثبات شده فرض می‌کنیم . شرط کافی برای بهگزینی مقید شبیه همان بهگزینی نامقید است یعنی علامت ماتریس هسیان[1] تعیین‌کننده ماکزیمم یا مینیمم بودن نقطه (یا بردار) اکسترمم می‌باشد. این مورد را هم اثبات شده فرض می‌کنیم.

[1] - Hessian Matrix