فصل ١٤- بهینه‌سازی غیر خطی آمیخته

(با سپاس فراوان از محمد اسلامی)

این بخش مفاهیم و الگوریتم های مسائل بهینه یابی غیر خطی آمیخته را معرفی می کند. بخش های ۱ و ۲، شکل اجمالی از انگیزش مسئله، فرمولاسیون و رویکردهای الگوریتمی‌را طرح ریزی می کند. بخش ۳، GBD و گونه های مختلف آن را معرفی می کند. بخش ۴، ۵ و ۶، OA و گونه های مختلف آن با ساده سازی تساوی و جریمه اضافه شده را نمایش می‌دهد. بخش ۷، GOA را بررسی می کند در حالیکه بخش ۸ به مقایسه GBD با OA می‌پردازد. در انتها بخش ۹ به بررسی GCD می‌پردازد.

۱- انگیزش مسئله

بسیاری از مسایل بهینه یابی شامل متغیرهای عدد صحیح یا گسسته به علاوه متغیرهای پیوسته هستند. این دسته از مسائل بهینه یابی ناشی از جنبه های گوناگون کابرد آنها هستند و با عنوان مسائل برنامه ریزی غیر خطی آمیخته یا به اختصار MINLP نامیده می‌شوند.

متغیرهای عدد صحیح می‌توانند در مدل به طور مثال بصورت توالی حوادث، کاندیدهای جایگزین، وجو یا عدم وجود واحدها(با نمایش بشکل صفر و یک) استفاده شوند. در حالیکه متغیرهای گسسته می‌توانند برای اندازه های مختلف دستگاه بکار روند. متغیرهای پیوسته در مدل برای ورودی- خروجی و روابط برهم کنشی میان واحدها/حالت های کارکردی منحصربفرد و سیستم های بهم پیوسته مختلف بکار روند.

خصلت غیر خطی این مسائل ممکن است ناشی از (۱) روابط غیر خطی در دامنه صحیح انحصاری (بطور مثال تولید متغیرهای دوتایی در مدل تخصیص کوادراتیک(درجه دوم))، (۲) روابط غیر خطی در دامنه پیوسته (بطور مثال مدل ورودی-خروجی غیر خطی پیچیده در یک برج تقطیر یا واحد راکتور)، (۳) روابط غیر خطی در دامنه بهم پیوسته عدد صحیح – پیوسته (بطور مثال تولید متغیرهای پیوسته و دوتایی در زمان بندی/ طرح ریزی فرآیندهای بَچ و بهبود در سیستم های بازیافت حرارت). در این فصل بر غیر خطی های ناشی از موارد (۲) و (۳) متمرکز خواهیم شد. یک کتاب عالی که به مطالعه بهینه یابی خطی آمیخته و روابط عدد صحیح غیر خطی در بهینه یابی آمیخته می‌پردازد، کتابی از Nemhauser and Wolsey(1988) می‌باشد.

اتصال دامنه عدد صحیح با دامنه پیوسته، همراه با غیر خطی هایشان دسته مسائل MINLP را می‌سازد که مجادلات زیادی از نقطه نظر تئوریکی، الگوریت می‌و محاسباتی دارند. صرفنظر از این مجادله، طیف وسیعی از کابردها وجود دارد که می‌توانند بصورت مسائل برنامه ریزی غیر خطی آمیخته مدل شوند. این کاربردها دارای نقش برجسته ای در بخش طراحی فرآیند در مهندسی شی می‌هستند و شامل :

الف) طراحی شبکه های بازیافت حرارت از ابتدا

ب)بهبود سیستم های تبادل حرارت

ج)طراحی سیستم های جداسازی بر پایه تقطیر

د) طراحی شبکه های راکتور پیچیده

ه) طراحی سیستم های راکتور- جداساز- بازخورد

و) طراحی سیستم های تأسیساتی

ی) طراحی سیستم های کل فرآیندی

یک بررسی کلی عالی از چارچوب های کاری بهینه یابی غیر خطی آمیخته و کاربردهای آن در تلفیق فرآیند در کتاب --- ایجاد شده است. مزیت های الگوریت می‌برای بهینه یابی منطقی و جهانی در تلفیق فرآیند در کتاب --- بررسی شده است.

کابردهای اساسی رویکردهای MINLP در بخش های طراحی، زمان بندی و برنامه ریزی فرآیندهای دسته ای در مهندسی شی می‌پدیدار شده است و شامل :

(۱) طراحی کارخانه های چند محصوله

(۲) طراحی و زمان بندی کارخانه های چند منظوره

بررسی های کلی از این مزیت ها در طراحی، زمان بندی و برنامه ریزی کارخانه های دسته ای را می‌توان در Reklaitis(1991) and Grossmann et al.(1992) پیدا نمود.

دیگر کابردهای مهم مدل های MINLP که اخیراً گزارش شده است برای

(۱) the facility loation in a multiattribute space(Ganish et a.1983)

(۲) the optimal unit allocation in an electric power system(Bertsekas et al. 1983)

(۳) ...

۲- فرمولاسیون

هدف اولیه در این بخش نشان دادن فرمولاسیون کلی مسائل MINLP، بحث در مورد مشکلات و نشان دادن یک دیدکلی از رویکردهای الگوریت می‌توسعه داده شده برای حل این مدل ها است.

۲-۱- توصیف ریاضی

فرمولاسیون کلی MINLP می‌تواند بصورت زیر نشان داده شود:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & f(x,y) \qquad (6.1) \\
S.t. \quad & h(x,y)=0 \\
& g(x,y)\le 0 \\
& x\in X\subseteq \Re^n \\
& y\in Y \text{ integer}
\end{aligned}
$$

در این جا x یک بردار از n متغیر پیوسته (بطور مثال جریان ها، فشارها، درصد ترکیب ها، دماها، اندازه واحد ها) را نشان می‌دهد و y یک بردار از متغیرهای عدد صحیح(بطور مثال حلال های جایگزین یا مواد) است؛ $h(x,y)=0$ محدودیت های کیفیتی m (بطور مثال جرم، تراز انرژی، روابط تعادلی) را نشان می‌دهد؛ $g(x,y)\le 0$ محدودیت های غیر کیفیتی p (بطور مثال خصوصیات درجه خلوص در محصولات تقطیر، نظارت های زیست محیطی، محدودیت های ممکن در سیستم های بازیافت حرارت، محدودیت های منطقی) را نشان می‌دهد؛ $f(x,y)$ تابع هدف (بطور مثال هزینه کلی سالیانه شده، سود، ضابطه ترمودینامیکی) است.

تبصره ۱) متغیرهای عدد صحیح y با محدودیت های بالایی و پایینی داده شده زیر:

$$y^L \le y \le y^U$$

می‌توانند بصورت متغیرهای ۰–۱ (مثلاً دوتایی) نشان داده شود که با استفاده از فرمول زیر بصورت Z نشان داده شده اند.

$$y = y^L + z_1 + 2z_2 + 4z_3 + \ldots + 2^{N-1} z_N$$

که N کمترین متغیرهای ۰–۱ مورد نیاز است. این مقدار بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$N = 1 + INT\left\{\frac{\log(y^U - y^L)}{\log 2}\right\}$$

که تابع INT، آرگومان واقعی آن را به یک متغیر عدد صحیح کوتاه می‌کند. اگر چه این روش برای محدودیت های بزرگ قابل اعمال نیست.

فرمولاسیون (۱) می‌توانند بصورت متغیرهای ۰–۱ نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x,y) \qquad (6.2) \\ S.t. \quad & h(x,y)=0 \\ & g(x,y)\le 0 \\ & x \in X \subseteq \Re^n \\ & y \in Y = \{0,1\}^q \end{aligned}$$

که یک بردار از q متغیر ۰–۱ (بطور مثال وجود یک واحد فرآیندی($y_i=1$) یا عدم وجود آن ($y_i=0$))است.

ما در اکثر توعه های بعدی از فرمولاسیون (۲) استفاده خواهیم کرد.

۲–۲– مسایل و مشکلات در MINLP

سر و کار داشتن با مدلهای بهینه یابی غیر خطی ترکیبی که از فرمول های (۱) یا (۲) ناشی می شوند، دو مشکل اساسی را نمودار می سازد. این مشکلات وابسته به طبیعت مسئله است، برای مثال دامنهٔ ترکیبی (دامنه y) و دامنهٔ پیوسته (دامنه x).

در حالیکه تعداد متغیرهای دوتایی در معادلهٔ (۲) افزایش می یابد، شخص با یک مسئلهٔ بزرگ ترکیبی مواجه می شود و نتایج تحلیل پیچیدگی، مشخصات مسایل MINLP را بصورت NP کامل نشان می دهد. (Nemhauser and Wolsey, 1988). در همان زمان مسایل MINLP بخاطر وجود غیر خطی ها در کل غیر محدب هستند که این هم به پتانسیلی برای وجود چندین حل محلی اشاره می کند. تخمین یک حل جهانی مسایل MINLP غیر محدب، NP-hard است (Murty and Kabadi, 1987)، نظر به اینکه حتی بهینه یابی جهانی از مسایل برنامه ریزی غیر خطی مقید شده می تواند NP-hard باشد (pardalos and Schniter, 1991)، و حتی مسایل کوادراتیک با یک ویژه مقدار منفی NP-hard هستند (Pardalos and Vavasis, 1991). یک کتاب عالی در پیچیدگی موضوعات، برای بهینه یابی غیر خطی بوسیلهٔ Vavasis در سال ۱۹۹۱ نوشته شده است.

علی رقم نتایج دلسرد کنندهٔ ذکر شده، در بخش MINLP پیشرفت های قابل توجهی در بخش های تئوریک، الگوریتم و محاسبات بوجود آمده است. در نتیجه، الگوریتم های مختلفی پیشنهاد شده اند، خواص همگرایی آنها بررسی شده است و در حال حاضر تعداد بسیار زیادی کاربرد وجود دارد که از محدوده های چندین مقررات عبور می کنند. در ادامه این پیشرفت ها را شرح می دهیم.

۲-۳- خلاصه ای از الگوریتم های MINLP

مجموعه ای از الگوریتم ها برای حل مدل های MINLP ناشی از فرمول (۲) یا گروه های محدود شده از (۲)، توسعه داده شده اند. که بصورت ذیل هستند:

- Generalized Benders Decomposition, GBD (Geoffrio, 1972; Paules and Floudas, 1989; Floudas et al.,1989);
- Branch and Bound, BB (Beale,1977; Gupta,1980; Ostrovsky et al., 1990; Borchers and Mitchell, 1991);
- Outer Approximation, OA (Duran and Grossman, 1986a);
- Feasibility Approach, FA (Mawengkang and Murtagh, 1986);
- Outer Approximation With Equality Relaxation, OA/ER (Kocis and Grossman, 1987);
- Outer Approximation with Equality Relaxation and Augmented Penalty, OA/ER/AP (Viswanthan and Grossman, 1990)
- Generalized Outer Approximation, GOA (Fletcher and Leyffer, 1994)
- Generalized Cross Decompositiion, GCD (Holmberg, 1990);

در کار پیشرو Geoffrion در سال ۱۹۷۲ بر روی GBD، دو توالی از باندهای بالایی (غیر صعودی) و پایینی (غیر نزولی) خلق شده اند که باندازهٔ ε در تعداد محدودی تکرار همگرا می شوند. حدهای بالای با حل زیرمسئله ها در مغیرهای x بوسیلهٔ ثابت کردن متغیرهای y برابراند. در حالیکه حدهای پایین بر پایهٔ تئوری همزادی هستند.

رویکرد BB بوسیلهٔ حل کردن حل پیوستهٔ MINLP و متعاقباً اجرای یک شمارش ضمنی در جایی که یک متغیر ۰-۱ در هر گره ثابت شده است. حد پایین برابر است با حل NLP در هر گره و برای توسعه دادن بر روی گره با

کمترین حد پایین (بطور مثال نیروی اولین شمارش) بکار می رود، یا اگر حد پایینی از حد بالایی تجاوز کند برای نشان دادن گره ها بکار می رود (بطور مثال عمق اولین شمارش). اگر continuous NLP بسبب MINLP دارای حل ۰–۱ برای متغیرهای y باشد، الگوریتم BB در همان گره خاتمه می یابد. با یک استدلال مشابه اگر نتایج یک tight NLP در نخستین گرهٔ درخت باشد، تعداد نقاطی که نیاز به حذف شدن دارند، می تواند کم باشد. اما loose NLP ممکن است ناشی از زیرمسایل NLP زیادی باشد که باید حل شوند که دارای خصایص جذاب مسایل LP نیستند.

OA متوجهٔ مسایلی با نامعادلات غیر خطی است و مانند GBD توالی هایی برای حدهای بالا و پایین بوجود می آورد، اما OA دارای ویژگی مشخص برای استفاده از اطلاعات اولیه است– آن حل حد بالای مسایل است– بنابر این شبیه خطی سازی هدف و قیود اطراف آن نقطه است. حدود پایین در OA بر تجمع تابع هدف خطی شده و قیود در اطراف نقاط حل ابتدایی کلی، پایه ریزی شده اند.

FA حل relaxed NLP را به یک حل عدد صحیح تبدیل می کند، آن هم با آخرین تنزل مرتبهٔ محلی بوسیلهٔ اعمال نیروی پیوسته بر متغیرهای مافوق اصلی برای تبدیل شده به متغیرهای غیر اصلی بر اساس اطلاعات قیمتی کاهش یافته.

الگوریتم OA/ER الگوریتم OA را برای انجام قیدهای تساوی غیرخطی توسعه می دهد آن هم بوسیلهٔ کم کردن آنها به نامعادلاتی مطابق با علامتی از مضرب های بهم پیوسته شده آنها.

الگوریتم OA/ER/AP یک تابع جریمهٔ اضافه شده به حد پایینی زیرمسایلی از رویکرد OA/ER را معرفی می کند.

GOA ، الگوریتم OA را به مسایل MINLP و برای انواع فرمولاسیون (۱) و (۲) توسعه می دهد و یک تابع جریمهٔ دقیق را معرفی می کند.

GDC بوسیلهٔ بکار انداختن مزیت های Dantzig-Wolfe و GBD ، بطور همزمان از اطلاعات اولیه و همزاد استفاده می کند.

در بخش های بعدی، بر الگوریتم هایی که بر پایه تجزیه و OA هستند متمرکز خواهیم شد. این تمرکز در مطالعه ما در نتیجهٔ وجود شاهدی برای بازدهی عالی ذکر شده از الگوریتم های تجزیه و OA در مقایسه با روش های BB و FA است.

۳– Generalized Benders Decomposition (GBD)

۳–۱– فرمولاسیون

Geoffrion در سال ۱۹۷۲ رویکرد ارائه شده توسط Benders در سال ۱۹۶۲ را بمنظور استخراج ساختار ریاضی مسایل برنامه ریزی (۲) را به گروهی از مسایل بهینه یابی بصورت زیر تعمیم داد:

$$\min_{x,y} \quad f(x,y) \qquad (6.2)$$
$$\begin{aligned} S.t. \quad & h(x,y)=0 \\ & g(x,y)\le 0 \\ & x\in X\subseteq \Re^n \\ & y\in Y=\{0,1\}^q \end{aligned}$$

بر اساس شرایط زیر:

C1: x یک دسته از توابع غیر خالی و محدب است.

$$f:\Re^n\times\Re^q\to\Re,$$
$$g:\Re^n\times\Re^q\to\Re^P,$$

محدب هستند برای هر y ثابت شده بطوریکه $y\in Y=\{0,1\}^q$ ، در حالیکه توابع $h:\Re^n\times\Re^l\to\Re^m,$ غیر خطی هستند برای هر y ثابت شده بطوریکه $y\in Y=\{0,1\}^q$

C2: دسته

$$z_y=\{z\in\Re^P: h(x,y)=0, g(x,y)\le z, \ for\ some\, x\in X\}$$

برای هر y ثابت شده عضو Y، بسته شده است.

C3: برای هر y ثابت شده عضو $y\in Y\cap V$ که

$$V=\{y: h(x,y)=0, g(x,y)\le 0, \ for\ some\, x\in X\}$$

یکی از دو شرایط زیر بوجود می آید:

(i)مسئله حاصله (۲) دارای یک حل محدود است و دارای یک بردار افزاینده بهینه برای مساوی ها و نا مساوی ها است.

(ii)مسئله حاصله (۲) نامحدود است و می گوید مقدار تابع هدف بسمت $-\infty$ می رود.

تبصره ۱) شایان ذکر است که فرمول (۲) توضیح داده شده در بالا، در حقیقت یک زیر دسته از مسایلی برای GBD ابداعی توسط Geoffrion می تواند بکار رود. این امر منجر به خصوصیت $Y=\{0,1\}$ برای y می شود، در حالیکه Geoffrion در جستجوی حالت کلی تری برای $y\subseteq\Re^q$ بود و بردار متغیرهای y را بصورت متغیرهای پیچیده تعریف کرده است، با این احساس که اگر ما y را ثابت کنیم، سپس:

(a) مسئله (۲) ممکن است به تعدادی از مسئله غیر وابسته تبدیل شود که هر یک شامل یک زیربردار متفاوت از x است؛ یا

(b) مسئله (۲) یک ساختار معروف بگیرد که الگوریتمهای پربازده برای آن در دسترس باشد؛ یا

(c) مسئله (۲) در x محدب باشد حتی اگر در اتصال دامنه x-y نامحدب باشد که گفته می‌شود یک ساختار مخصوص ایجاد کرده است.

حالت (a) ممکن است منجر به ترکیبات موازی از ریز مثله های غیر وابسته شود. حالت (b) امکان استفاده از الگوریتم های دارای هدف خاص را می دهد (بطور مثال الگوریتم های شبکه تعمیم یافته)، در حالیکه حالت (c) ساختار مخصوصی از تحدب را طلب می کند که می تواند برای تجزیه مسایل بهینه یابی غیر محدب مفید باشد.

در ادامه بر $y \in Y = \{0,1\}^q$ متمرکز می شویم که منجر به علاقه مندی ما در مدل های MINLP می شود. توجه شود که تحلیل شامل قیود مساوی $h(x,y)=0$ است که بوضوح در روش Geoffrion مورد بحث قرار نگرفته اند.

تبصره ۲) شرط C2 خیلی هم سخت نیست و اگر یکی از شرایط زیر اتفاق بیافتد، ارضا می‌شود. (به علاوه C1 و C2).

(i) X محدود و بسته باشد و $h(x,y)=0, g(x,y)$ بر حسب x و برای $y \in Y$ پیوسته باشند.

(ii) یک نقطه zy وجود داشته باشد که بصورت زیر تنظیم شده باشد و محدود شده و تهی نباشد.

$$\{x \in X : h(x,y)=0, g(x,y) \le z_y\}$$

توجه شود که با وجود آن تنها پیوستگی $h(x,y)=0, g(x,y)$ بر حسب x برای هر y ثابت شده $y \in Y$ اجازه ن می‌دهد که شرط C2 ارضا شود. برای مثال اگر $X=[1,\infty]$ و $h(x,y)=x+y$، $g(x,y)=-\frac{1}{x}$ سپس $x_y=(-\infty,0)$ که بسته نشده است تا زمانیکه برای $x \to \infty$ ، $g(x,Y) \to \infty$.

تبصره ۳) توجه شود که مجوعه V مقادیری از y را نشان می‌دهد که برای مسئله حاصله از (۲) با توجه به X قابل قبول است. به عبارت دیگر، V مقادیری از y را نمایش می‌دهد که در اینجا یک x موجه بصورت $x \in X \quad for\ h(x,y)=0, g(x,y) \le 0$ وجود دارد. سپس اشتراک y و V ($Y \cap V$) تصویر منطقه موجه از (۲) به فضای y را نشان می‌دهد.

تبصره ۴) شرط C3 اگر یک محدودیت وضعیت مرتبه اول برای مسائل حاصله از (۲) و بعد از ثابت کردن $y \in Y \cap V$، نگاه داشته شود.

۳-۲- ایده پایه

ایده پایه در GBD، در هر تکرار، تولید یک حد بالایی و حد پایینی بر حل جستجو شده در باره مدل های MINLP است. حد بالایی از مسئله اولیه نتیجه می‌شود، در حالیکه حد پایینی از مسئله اصلی نتیجه می‌شود. مسئله اصلی مشابه با مسئله (۲) است همراه با متغیرهای y ثابت شده (بطور مثال فقط در فضای x است) و حل آن اطلاعاتی در

مورد حد بالایی و ضرایب لاگرانژ همبسته با قیدهای مساوی و نامساوی بدست می‌دهد. مسئله اصلی مشتق از تئوری ثانویه غیر خططی است، باعث استفاده از ضرایب لاگرانژ بدست آمده از مسئله اولیه می‌شود و حل آن اطلاعاتی در مورد حد پایینی بدست می‌دهد، بعلاوه دسته بعدی متغیرهای y ثابت شده متعاقباً در مسئله اولیه بکار می‌روند. در حالیکه تکرارها انجام می‌شوند، نشان داده شده است که توالی به روز شده حدهای بالایی افزایش ن می‌یابد، توالی حدهای پایین کاهش ن می‌یابد و توالی در یک تعداد محدود تکرار همگرا می‌شود.

۳-۳- توسعه تئوریکی

این بخش توسعه تئوریکی GBD را معرفی می‌کند. مسئله اولیه در ابتدا برای حالت های موجه وغیر موجه تحلیل می‌شود. متعاقباً، تحلیل تئوریکی برای استخراج مسئله اصلی معرفی شده است.

۳-۳-۱- مسئله اولیه

مسئله اولیه از ثابت کردن متغیرهای y به یک ترکیب ۰-۱ ویژه نتیجه می‌شود که، آن را با y^k نمایش می‌دهیم که k از شمارنده تکرار ناشی می‌شود. فرمولاسیون مسئله اولیه $P(y^k)$ در تکرار k بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x} \quad f(x, y^k) \qquad (6.1)\\
&S.t. \quad h(x, y^k) = 0\\
&\qquad\quad g(x, y^k) \le 0\\
&\qquad\quad x \in X \subseteq \Re^n
\end{aligned}
$$

تبصره ۱) توجه شود که به علت شرطهای C1 و C3(i)، حل مسئله اولیه $P(y^k)$ یک حل جهانی است.

ما دو حالت را جدا خواهیم کرد (i) اولیه موجه (ii) اولیه ناموجه و تحلیل هر حالت را بصورت جداگانه شرح خواهیم داد.

حالت(i): اولیه موجه

اگر مسئله اولیه در تکرار k موجه باشد، حل آن اطلاعاتی را بر حسب x^k و $f(x^k, y^k)$ ارائه می‌دهد که حد بالایی و حالت بهینه بردارهای ضریب λ^k و μ^k برای قیدهای مساوی و نا مساوی است. متعاقباً، با استفاده از این اطلاعات می‌توانیم تابع لاگرانژ را بصورت زیر فرمولاسیون کنیم:

$$L(x, y, \lambda^k, \mu^k) = f(x, y^k) + \lambda^{k^T} h(x, y) + \mu^{k^T} g(x, y)$$

حالت(ii): اولیه ناموجه

اگر اولیه بوسیله حل کننده NLP ناموجه تشخیص داده شود، ما قیود آن را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(x, y^k) = 0$$
$$g(x, y^k) \leq 0$$
$$x \in X \subseteq \Re^n$$

که دسته X بطور مثال شمال حدهای بالایی و پایینی بر متغیرهای x است. برای شناسایی یک نقطه موجه می‌توانیم l یا l_∞ که جمع خطاهای قید است را مینیمم کنیم. یک مسئله مینیمم سازی l_1 می‌تواند بصورت زیر فرموله شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \\ &\qquad g_i(x, y^k) \leq \alpha_i \quad i = 1,2,\ldots,P \\ &\qquad \alpha_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,P \end{aligned}$$

توجه شود که اگر $\sum_{i=1}^{P} \alpha_i = 0$ باشد، یک نقطه موجه تعیین شده است.

همچنین توجه شود که بوسیله تعریف زیر

$$\alpha^+ = \max(0, \alpha) \, and$$
$$g_i^+(x, y^k) = \max[0, g_i(x, y^k)]$$

مسئله مینیمم سازی l_1 بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^{P} g_i^+ \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \end{aligned}$$

بطور مشابه یک مسئله مینیمم سازی l_∞ بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \ \max_{1,2,\ldots,P} \ g_i^+(x, y^k) \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \end{aligned}$$

رویکردهای جایگزین در مینیمم سازی موجه، بر نگهداری موجه بودن در هر قید باقیمانده که قبلاً برقرار شده است، هدف گذاری شده اند. یک مینیموم سازی l_1 در این رویکردها از فرمولاسیون زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \quad \sum_{i \in I} g_i^+(x, y^k) \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \\ &\qquad g_i(x, y^k) \leq 0 \ i \in I \end{aligned}$$

که I یک دسته قید موجه است و I' دسته ای از قیدهای ناموجه است. دیگر روش ها موجه بودن قیدها را بصورت یکی یکی جستجو می‌کنند، ضمن اینکه موجه بودن برای نا مساوی های اندیس گذاری شده بوسیله $i \in I$ را بر قرار می‌کنند. این مسئله موجه بودن بصورت زیر فرموله شده است:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad \sum_{i\in I} w_i \ g_i^{+}(x, y^k) \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \\ &\qquad\quad g(x, y^k) \le 0 \ i \in I \end{aligned}$$

برای در بر گرفتن تمام امکانات نامبرده شده Felecher and Leyffer(1994) یک مسئله موجه بودن(FP) [۱] را فرموله بندی کرده اند که بصورت زیر است:

$$\left| \begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad \sum_{i\in I} w_i \ g_i^{+}(x, y^k) \\ &S.t. \quad h(x, y^k) = 0 \qquad\qquad (FP) \\ &\qquad\quad g(x, y^k) \le 0 \ i \in I \end{aligned} \right.$$

وزنهای w، غیر منفی هستند و همگی صفر نیستند. توجه شود که با $w_i = 1 i \in I'$ مینیمم سازی l_1 را بدست می‌آوریم. همچنین در مینیمم سازی l_∞، وزنهای غیر منفی در هر حل وجود دارد که:

$$\sum_{i\in I} w_i = 1$$

و $w_i = 0 \ \ if \ \ g_i(x, y)$ به ماکزیمم مقدار دست ن می‌یابد.

توجه شود که ناموجه بودن در مسئله اولیه هنگا می‌تشخیص داده می‌شود که حل بدست آمده از مسئله موجه بودن، برای مقدار هدف بزرگتر از صفر است.

حل مسئله موجه بودن اطلاعاتی در مورد ضرایب لاگرانژ برای قید های مساوی و نامساوی بدست می‌دهد که با نمادهای $\overline{\lambda}^k$ و $\overline{\mu}^k$ به نمایش در آمده اند. سپس تابع لاگرانژ ناشی شده از مسئله اولیه ناموجه در تکرار k می‌تواند بصورت زیر معرفی شود:

$$\overline{L}(x, y, \overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k) = f(x, y^k) + \overline{\lambda}^{k^T} h(x, y) + \overline{\mu}^{k^T} g(x, y)$$

تبصره ۲) باید توجه شود که دو نوع مختلف از توابع لاگرانژ بر حسب اینکه مسئله اولیه موجه است یا ناموجه، تعریف شده است. همچنین حد بالایی فقط برای مسئله اولیه موجه بدست آورده شده است.

۳-۳-۲- مسئله اصلی

استخراج مسئله اصلی در GBD استفاده از تئوری همزادی غیر خطی را می‌طلبد و با سه ایده اصلی زیر بیان شده است:

(i) انداختن مسئله (۲) به فضای y.

---

[۱] Feasibility Problem-

(ii) نمایش همزاد V

(iii) نمایش همزاد از انداختن مسئله (۲) به فضای y.

در ادامه، تحلیل تئوریکی این سه ایده اصلی نشان داده شده است.

(i) انداختن معادله (۲) به فضای y

مسئله (۲) می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\min_{y}\ \inf_{x}\ f(x,y) \qquad (6.3)\\ &S.t.\quad h(x,y)=0\\ &\qquad\quad g(x,y)\le 0\\ &\qquad\quad x\in X\subseteq \Re^{n}\\ &\qquad\quad y\in Y=\{0,1\}^{q} \end{aligned}$$

که عملگر min بطور مجزا برای x و y نوشته شده است. توجه شود که بزرگترین مقدار که کمتر یا مساوی با یک مجموعه یا زیر مجموعه از مقادیر اینفیموم(infimum) [۱] با توجه به x است چون ممکن است مسئله داخلی برای y داده شده، نامحدود باشد. اجازه دهید $v(y)$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} &v(y)=\inf_{x}\ f(x,y) \qquad (6.4)\\ &S.t.\quad h(x,y)=0\\ &\qquad\quad g(x,y)\le 0\\ &\qquad\quad x\in X\subseteq \Re^{n} \end{aligned}$$

تبصره ۱) توجه شود که $v(y)$ بر روی متغیر y پارامتری است و بنابراین، بخاطر نوع تعریف آن با مقدار بهینه مسئله (۲) برای y ثابت شده، برابر است (بطور مثال مسئله اولیه $P(y^k)$ برای $y=y^k$).

اجازه دهید مجموعه V را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$V=\{y: h(x,y)=0,\ g(x,y)\le 0,\ \textit{for some}\ x\in X\}$$

پس مسئله (۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\min{}_{y}\ v(y)\\ &S.t.\ \ y\in Y\cap V \end{aligned}$$

که $v(y)$ و V با معادلات (۴) و (۵) تعریف شده اند.

تبصره ۲) مسئله (۶) تصویر مسئله (۲) در فضای y است. همچنین توجه شود که در معادله (۵) $y\in Y\cap V$ است چون تصویر نیاز دارد تا شرایط موجه بودن را اغنا کند.

۱- The largest quantity that is less than or equal to each of a given set or subset of quantities.

با داشتن تعریف تصویر مسئله (۲) در فضای y، می‌توان نتیجه تئوریک Geoffrion را توضیح داد.

قضیه ۳-۱ (تصویر)

(i) اگر (x^k, y^k) در (۲) بهینه باشد، y^k در (۶) بهینه است.

(ii) اگر (۲) موجه باشد و یا دارای حل نامحدود باشد، همین امر در مورد (۶) صادق است و بلعکس.

تبصره ۳) توجه شود که دشواری موجود در (۶) ناشی از این حقیقت است که $v(y)$ و V تنها تحت (۴) و (۵) شناخته می‌شوند.

برای حل دشواری ذکر شده ما باید نمایش همزاد V و $v(y)$ را معرفی کنیم.

(ii) نمایش همزاد V

نمایش همزاد V بر حسب عباراتی از فصل مشترک یک مجموعه از مناطق که شامل آن است، صورت می‌گیرد و بوسیله قضیه زیر از Geofferion توضیح داده شده است.

قضیه ۳-۲- (نمایش همزاد V)

شرط های C1 و C2 و نقطه --- را در نضز بگیرید که به مجموعه V نیز تعلق دارند، اگر وتنها اگر دستگاه زیر را اغنا کنند:

$$0 \geq \inf \overline{L}(x, y, \overline{\lambda}, \overline{\mu}), \quad \forall \overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k \in \Lambda,$$
$$where\ \Lambda = \left\{ \overline{\lambda} \in \Re^m, \overline{\mu} \in \Re^P : \overline{\mu} \geq 0, \sum_{i=1}^{P} \overline{\mu}_i = 1 \right\},$$

تبصره ۴) توجه شود که (۷) یک دستگاه نامحدود است، چون باید برای تمام $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in \Lambda$ اغنا شده باشد.

تبصره ۵) نمایش همزاد از مجموعه V، برای تولید مجموعه ای از مناطق که شامل آن است، نیاز به محاسبه دارد(بطور مثال دستگاه (۷) برابر با مجموعه ای از قیدها است که باید برای حالت مسائل اولیه ناموجه، باهم ترکیب شوند).

تبصره ۶) توجه شود که اگر اولیه ناموجه باشد و ما از مینیمم سازی l_1 زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i\in I}\alpha_i \\ S.t. \quad & h(x,y^k)=0 \\ & g_i(x,y^k)\le\alpha_i\,, \quad i\in I \\ & x\in X \end{aligned}$$

در اینصورت مجموعه Λ از کاربرد شرایط گرادیان KKT برای مسئله (۸) و با توجه به α_0، نتیجه می‌شود.

حال می‌توانیم با داشتن نمایش همزاد ارائه شده از مجموعه V، که مشابه با مسائل اولیه ناموجه است، نمایش همزاد $v(y)$ را بدست آوریم.

(iii) نمایش همزاد $v(y)$

نمایش همزاد $v(y)$ بر اساس شرایط اینفیموم برای یک مجموعه از توابع که آن را پشتیبانی می‌کنند است و این امر با قضیه زیر که توسط Geoffrion(1972) بوجود آمده، توضیح داده شده است.

قضیه ۳-۳- همزاد $v(y)$

$$v(y)=\begin{bmatrix} \inf\limits_x & f(x,y) \\ S.t. & h(x,y)=0 \\ & g(x,y)\le 0 \\ & x\in X \end{bmatrix}=\left[\inf_{\lambda,\mu\ge 0}\quad \inf_{x\in X}\bar{L}(x,y,\lambda,\mu)\right],\ \forall y\in Y\cap V \qquad (6.9)$$

$$where \quad L(x,y,\lambda,\mu)=f(x,y)+\lambda^T h(x,y)+\mu^T g(x,y)$$

تبصره ۷) رابطه مساوی برای $v(y)$ و همزاد آن به سبب داشتن برهان همزادی قوی اغنا شده برای شرط های C1 و C2 و C3 است.

با جانشین کردن (۹) برای $v(y)$ و (۷) برای $y\in Y\cap V$ در مسئله (۶)، که معادل با (۳) است، به فرمولاسیون زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \min_{y\in Y} \ & \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y,\lambda,\mu) \\ S.t. \ & 0\ge\inf_{x\in X}\bar{L}(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف سوپریموم(Supremum) [۱] به عنوان کوچکترین حد بالایی و معرفی یک μ_b اسکالر، به فرمولاسیون زیر می‌رسیم:

---

[۱] The smallest quantity that is greater than or equal to each of a given set or subset of quantities. The opposite of infimum.

$$\left|\begin{array}{l}\min\limits_{y\in Y,\mu_B} \ \mu_B \\ S.t. \ \ \mu_B \geq \inf\limits_{x\in X} \ L(x,y,\lambda,\mu), \ \ \forall\lambda, \ \forall\mu\geq 0 \\ \qquad\quad 0 \geq \inf\limits_{x\in X} \ \bar{L}(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}), \ \ \forall(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} where \quad & L(x,y,\lambda,\mu) = f(x,y)+\lambda^T h(x,y)+\mu^T g(x,y) \\ & L(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \bar{\lambda}^T h(x,y)+\bar{\mu}^T g(x,y)\end{aligned}$$

که مسئله اصلی نامیده می‌شود و با عنوان (M) نمایش داده شده است.

تبصره ۸) اگر فرض کنیم که حل بهینه برای $\nu(y)$ در (۴) در تمام $y\in Y\bigcap V$ محدود شده است، می‌توانیم اینفیموم را با مینیموم جایگزین کنیم. متعاقباً مسئله اصلی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{l}\min\limits_{y\in Y,\mu_B} \ \mu_B \\ S.t. \ \ \mu_B \geq \min\limits_{x\in X} \ L(x,y,\lambda,\mu), \ \ \forall\lambda,\mu\geq 0 \\ \qquad\quad 0 \geq \min\limits_{x\in X} \ \bar{L}(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}), \ \ \forall(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda\end{array}$$

که $L(x,y,\lambda,\mu)$ و $\bar{L}(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu})$ قبلاً تعریف شده اند.

تبصره ۹) توجه شود که مسئله اصلی (M) با (۲) برابر است. اما مسئله اصلی شامل تعداد نامحدود قید است و بنابراین ما نیاز به در نظر گرفتن یک سازی برای مسئله اصلی داریم (بطور مثال با رها کردن تعدادی از قیدها) که یک محدودیت پایینی را بر مسئله اصلی نشان خواهد داد. همچنین توجه شود که مسئله اصلی یک مسئله بهینه سازی بیرونی را با توجه به $y\in Y$ و مسائل بهینه یابی داخلی با توجه به x که در حقیقت بر حسب y پارامتریک هستند، را نشان می‌دهد. در این طبیعت داخلی-خارجی است که راه حل هایی برای یک مسئله اصلی ساده شده و مشکل بوجود می‌آید.

تبصره ۱۰) (تفسیر هندسی مسئله اصلی) مسائل بهینه یابی داخلی

$$\begin{array}{l}\min\limits_{x\in X} \ L(x,y,\lambda,\mu), \ \ \forall\lambda,\mu\geq 0, \\ \min\limits_{x\in X} \ \bar{L}(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}), \ \ \forall(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda,\end{array}$$

توابعی از y هستند و می‌توانند بصورت توابع پشتیبان برای $\nu(y)$] $\xi(y)$ تابعی پایه از $\nu(y)$ در نقطه y_0 است اگر وتنها اگر $\xi(y_0)\leq\nu(y_0)$ و $\xi(y)\leq\nu(y)\forall y\neq y_0$] تفسیر شوند. اگر توابع پشتیبان بر حسب y خطی باشند، مسئله اصلی $\nu(y)$ را بوسیله فراصفحات مماس تخمین می‌زند و می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\nu(y)$ بر حسب y محدب است. توجه شود که $\nu(y)$ می‌تواند بر حسب y محدب باشد حتی اگر مسئله (۲) در محل تلاقی فضای x-y نامحدب باشد.(Floudas and Visweswaran)

در ادامه، به معرفی مسائل بهینه یابی ذکر شده بر حسب مفهو می‌از توابع پایه خواهیم پرداخت که بصورت زیر است:

$$\xi(y;\lambda,\mu)=\min_{x\in X} L(x,y,\lambda,\mu),\ \forall\lambda,\mu\geq 0,$$
$$\bar{\xi}(y;\bar{\lambda},\bar{\mu})=\min_{x\in X} L(x,y,\bar{\lambda},\bar{\mu}),\ \forall(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda,$$

۳-٤- توسعه الگوریتم

مسئله اصلی در حالیکه دارای قیدهای دو نوع مسائل بهینه یابی داخلی است(یعنی برای حالت اولیه موجه و اولیه ناموجه)، اما نیاز دارد برای تمام λ و $\mu\geq 0$ (یعنی اولیه موجه) و تمام $(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda$ (یعنی اولیه ناموجه) ملاحظه شده باشد. این امر، بر این دلالت دارد که مسئله اصلی دارای تعداد بسیار زیادی قید است.

طبیعی ترین رویکرد برای حل کردن مسئله اصلی ساده سازی است (Geoffrion,1972) . ایده اصلی در رویکرد ساده سازی بصورت زیر است:

(i) نادیده انگاشتن تعدا ی از قیدها که با مسائل بهینه یابی داخلی مشابه هستند (بطور مثال فرض کردن مسائل بهینه یابی اولیه برای ضرایب خاص یا ثابت (λ^t,μ^t) یا $(\bar{\lambda}^t,\bar{\mu}^t)$).

(ii) حل کردن مسئله اصلی ساده شده و بررسی کردن اینکه آیا حل بدست آمده در تمام قیدها صدق می‌کند یا خیر. اگر نه، قیدهایی که جواب در آنها صدق ن می‌کند را به مسئله اصلی اضافه کرده و دوباره مسئله اصلی ساده شده جدید را حل کرد.

(iii) ادامه دادن تا اینکه یک مسئله اصلی ساده شده، تمام قیدهای خذف شده را اغنا کند که دلالت بر این دارد که حل بهینه بر روی مسئله اصلی بدست آورده شده است یا اینکه ملاک متوقف سازی نشان دهد که حلی با درجه درستی قابل قبول پیدا شده است.

۳-۴-۲- دستور الگوریتمی‌برای GBD

فرض کنید که مسئله (۲) دارای یک مقدار بهینه محدود باشد. Geoffrion,1972 این الگوریتم کلی را برای GBD شرح داده است:

گام ۱) یک نقطه اولیه مثل $y^1\in Y\cap V$ بگیرید (بطور مثال بوسیله ثابت کردن $y=y^1$ ، یک اولیه موجه داریم). مسئله اولیه $P(y^1)$ بوجود آمده را حل کنید و یک حل اولیه بهینه x^1 و ضرایب بهینه بردارهای λ^1 و μ^1 را بدست آورید. فرض کنید که به هر طریق ممکن می‌توانید تابع پشتیبان $\xi(y;\lambda^1,\mu^1)$ برای ضرایب λ^1 و μ^1 بدست آمده را پیدا کنید. شمارنده را برای موجه h=1 و l=1 برای ناموجه و حد بالایی فعلی UBD=$v(y)$ تنظیم کنید. خطای مجاز همگرایی را $\varepsilon\geq 0$ انتخاب کنید.

گام ۲) مسئله اصلی ساده شده RM [۱] زیر را حل کنید.

$$\min_{y\in Y,\mu_B} \ \mu_B$$
$$S.t. \ \ \mu_B \ge \xi(y;\lambda^k,\mu^k), \ k=1,2,...,K$$
$$0 \ge \bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^t,\bar{\mu}^t), \ l=1,2,...,\Lambda$$

$(\hat{y},\hat{\mu}_B)$ را یک حل بهینه از مسئله اصلی ساده شده بالا قرار دهید. $\hat{\mu}_B$ یک حد پایینی بر مسئله (۲) است، به عبارت دیگر حد پایینی فعلی $\hat{\mu}_B$ است. اگر $UBD-LBD\le\varepsilon$، این گام را تمام کنید.

گام ۳) مسئله اولیه را برای $y=\hat{y}$ حل کنید که مسئله $P(\hat{y})$ است. در اینجا دو حالت را متمایز می‌کنیم: اولیه موجه و ناموجه.

گام a۳) اولیه دارای $v(y)$ محدود با یک حل بهینه و بردارهای ضرایب بهینه $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ است. حد بالای $UBD=\min\{UBD,v(\hat{y})\}$ را به روز رسانی کنید، اگر $UBD-LBD\le\varepsilon$ ، گام را به پایان برسانید. در غیر اینصورت، h=h+1 و $\mu^k=\hat{\mu}$, $\lambda^k=\hat{\lambda}$ قرار دهید. به گام ۲ برگردید، فرض کنید به هر طریقی می‌توانیم تابع پایه $\xi(y;\lambda^{k+1},\mu^{k+1})$ را مشخص کنیم.

گامb۳) اولیه دارای حل موجه برای $y=\hat{y}$ نیست. یک مسئله موجه بودن را (بطور مثال مینیمم سازی - l_1) به منظور تشخیص ضرایب بردارهای $\hat{\bar{\lambda}}$, $\hat{\bar{\mu}}$ برای مسئله موجه بودن، حل کنید.

$\bar{\lambda}^l=\hat{\bar{\lambda}} \ \ and \ \ \bar{\mu}^l=\hat{\bar{\mu}}$ و $l=l+1$ را تنظیم کنید. به گام ۲ باز گردید، فرض کنید به طریق ممکن می‌توانیم تابع پایه $\xi(y;\bar{\lambda}^{k+1},\bar{\mu}^{k+1})$ را تشخیص دهیم.

تبصره ۱) توجه شود که در گام اول یک اولیه ابتدایی موجه مورد نیاز است. اما این مورد GBD را محدود ن می‌سازد چون ممکن است که با یک مسئله اولیه ناموجه شروع کرد. در این حالت، پس از تشخیص این اولیه ناموجه است، گام b۳ به می‌رود که در آن یک تابع پایه $\bar{\xi}$ بکار گرفته می شود.

تبصره ۲) توجه شود که گام اول می‌تواند عوض شود، به عبارت دیگر بجایحل مسئله اولیه می‌توانیم یک ساده سازی پیوسته از مسئله (۲) را حل کنیم که در آن متغیرهای y بصورت کراندار پیوسته بین صفر و یک رفتار می‌کنند:

---

[۱] Relaxed Problem-

$$\min_{x,y} \quad f(x,y) \qquad (6.10)$$
$$S.t. \quad h(x,y)=0$$
$$g(x,y)\le 0$$
$$x\in X$$
$$0\le y\le 1$$

اگر حل (۱۰) عدد صحیح است، کار را تمام می‌کنیم. اگر مقادیر کسری از متغیرهای y وجود داشته باشد، می‌توان آنها را به نزدیکترین عدد صحیح گرد کرد و متعاقباً این مقادیر می‌توانند به عنوان مقادیر بردار y_1 شروع کننده استفاده شوند، با این امکان که مسئله اولیه نتیجه شده موجه یا ناموجه باشد.

تبصره ۳) همچنین توجه شود که در گام ۱، a۳، b۳ یک فرض نسبتاً مهم ساخته شده است. به عبارت دیگر، ما می‌توانیم تابع پایه ξ و $\bar{\xi}$ برای مقادیر داده شده از ضرایب بردارهای (μ,λ) و $(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ را پیدا کنیم. تخمین این توابع پایه در حالت کلی امکان پذیر نیست، چون آنها توابع پارامتری از y هستند و از حل مسائل بهینه یابی داخلی نتیجه می‌شوند. تخمین آنها در حالت کلی نیاز به یک رویکرد بهینه یابی جهانی مانند حالتی که بوسیله Floudas ans visversaran(1990) معرفی شده است، دارد. اما در اینجا تعدادی حالات خاص وجود دارد که توابع پایه می‌توانند به صورت مجزا و بصورت توابعی از متغیرهای y بدست آیند. ما این حالت های خاص را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد. اما اگر ممکن نباشد که توابع پایه جداگانه را بر حسب متغیرهای y بدست آورد، مفروضات نیاز به معرفی شدن برای محاسبات مروبطه دارند. این مفروضات بعلاوه متغیرهای نتیجه شده از GBD در بخش بعد بررسی خواهد شد. نکته ای که در اینجا باید به آن توجه شود اینست که صحت حدهای پایینی با این گونه های مختلف برای GBD، بوسیله مفروضات تحمیل شده، محدود خواهد شد.

تبصره ۴) توجه شود که مسئله اصلی ساده شده (گام ۲ را ببینید)، در تکرار اول مانند یک قید بر تابع پایه که مشابه اولیه موجه است، خواهد بود و بشکل زیر نشان داده خواهد شد:

$$\min_{y\in Y,\mu_B} \quad \mu_B \qquad (6-11)$$
$$S.t. \quad \mu_B \ge \xi(y;\lambda^1,\mu^1)$$

در تکرار دوم، اگر موجه باشد و (μ^2,λ^2) ضرایب بهینه بردارها باشند، مسئله اصلی ساده شده دو قید را نشان خواهد داد و بشکل زیر خواهد بود:

$$\min_{y\in Y,\mu_B} \quad \mu_B$$
$$S.t. \quad \mu_B \ge \xi(y;\lambda^1,\mu^1)$$
$$\mu_B \ge \xi(y;\lambda^2,\mu^2)$$

توجه شود که در این حالت مسئله اصلی (۱۲) حلی خواهد داشت که بزرگتر یا مساوی حل مسئله (۱۱) است. این امر منجر به داشتن قید اضافی می‌شود. بنابراین می‌توانیم ببینیم که توالی حدهای پایینی که از حل مسائل اصلی ساده شده بوجود آمده اند، غیر نزولی است. یک استدلال مشابه در حالت داشتن اولیه ناموجه در تکرار دوم معتبر است.

تبصره ۵) توجه شود تا زمانی که حدهای بالایی بوسیله متغیرهای y ثبات برای ترکیب های ۰-۱ مختلف، تولید می‌شود، دلیلی وجود ندارد که حدهای بالایی هر خاصیت ثابتی را اغنا کنند. اما اگر حدهای بالایی به روز شده را در نظر بگیریم (بطور مثال $(i.e., UBD = \min_k v(y^k))$)، در این حالت توالی برای حدهای بالایی به روز شده، بطور ثابت غیر صعودی است تا زمانی که ما همیشه با تعریف آنها، بهترین (آخرین) حد بالایی را بگیریم.

تبصره ۶) ملاک پایان دهی برای GBD بر اساس اختلاف بین حد بالایی به روز شده و حد پایینی فعلی پایه ریزی شده است. اگر این اختلاف کمتر یا مساوی یک خطای مجاز از قبل تعیین شده $\varepsilon \geq 0$ باشد، الگوریتم را پایان می‌دهیم. توجه شود که با وجود آنکه اگر ما در برش های عدد صحیح اصلی ساده شده، نشان دهیم که از ترکیبات ۰-۱ پیدا شده از قبل مستثنی است، معیار پایان دهی می‌تواند داشتن یک مسئله اصلی غیر موجه باشد (بطور مثال در اینجا هیچ ترکیب ۰-۱ وجود ندارد که آن را موجه سازد).

۳-۴-۳- همگرایی محدود GBD

برای فرمولاسیون (۲-۱۶)، Geoffrion,1972 الگوریتم همگرایی محدود GBD را ثابت کرد که در بخش ۳-۴-۲ نشان داده شده است و بصورت زیر است:

قضیه ۳-۴- (همگرایی محدود)

اگر C1 و C2 و C3 نگهداری شوند و Y یک مجموعه گسسته باشد، الگوریتم GBD برای هر $\varepsilon > 0$ و یا حتی برای $\varepsilon = 0$ در تعداد محدودی تکرار به پایان خواهد رسید.

توجه شود در این حالت در تعداد محدودی تکرار می‌توان به همگرایی دقیق رسید.

۳-۵- گونه های GBD

در بخش قبل دستورات الگوریتم کلی برای GBD را تشریح نمودیم و یک فرض کلیدی (تبصره ۳ را ببنید) ساخته شده با توجه به محاسبات برای توابع پایه $\xi(y;\lambda,\mu)$ *and* $\xi(y;\bar{\lambda},\bar{\mu})$ از مسائل اولیه موجه وناموجه را نشان دادیم؛ متعاقباً، در این بخش چندین نوع از گونه های GBD را بررسی خواهیم کرد که نتیجه شده از نظارت بر

محاسبات برای توابع پایه معرفی شده با دقت بالا برای حالات خاص و هم برای ساختن فرضیاتی که ممکن است حدهای پایینی معتبری در حالت کلی تولید نکنند، هستند.

۳-۵-۱- گونه اول GBD، V1-GBD

این گونه GBD بر پایه فرض زیر شکل گرفته است که بوسیله Geoffrion,1972 به عنوان خاصیت P نامیده شده است.

قضیه ۳-۵-(خاصیت P)

برای هر λ و $\mu \geq 0$ ، اینفیموم $L(x,y,\lambda,\mu)$ با توجه به $x \varepsilon X$ می‌تواند مستقل از y انتخاب شود، برای اینکه تابع پایه $\xi(y;\lambda,\mu)$ می‌تواند صریحاً با تأثیر کم یا بدون تأثیری که برای سنجیدن آن در یک مقدار منفرد y مورد نیاز است، بدست آورده شود. بطور مشابه، توابع پایه $\xi(y;\bar{\lambda},\bar{\mu}),(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \in \Lambda$ می‌توانند صریحاً بدست آورده شوند.

Geoffrion,1972 دو دسته مهم از مسائل خاصیت P را شناسایی کرد:

دسته ۱: f و h و g بطور خطی قابل جداسازی بر حسب x و y هستند.

دسته ۲: برنامه ریزی ضریب متغیر.

Ceromel and Belloni(1986) یک دسته مشابه برای برنامه ریزی ضریب متغیر شناسایی کرد که برای کاربرد نیروی دستگاه برای مسائل سیستم های گرمایی قابل کاربرد است.

در مسائل دسته ۱ داریم:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f_1(x) + f_2(y) \\
h(x,y) &= h_1(x) + h_2(y) \\
g(x,y) &= g_1(x) + g_2(y)
\end{aligned}
$$

در مسائل دسته ۲ داریم:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= -\sum_i f_i(x^i)\, y_i, \\
g(x,y)_j &= \sum_i x^i\, y_i - c
\end{aligned}
$$

در مسائل Gromel and Belloni(1986)، داریم:

$$f(x,y)=\sum_k\sum_i f_i(x_i(k))\,y_i+\sum_i g_i(y_i),$$
$$g(x,y)_j=\sum_i x_i(k)\,y_i-L(k)$$

در ادامه، به بحث در مورد V1-GBD برای مسائل دسته ۱ خواهیم پرداخت چون این مورد بتنهایی یک ساختار ریاضی جالب برای دیگر الگوریتم هایی که توسعه داده شده اند (بطور مثال OA) را شرح می‌دهد.

V1-GBD تحت تفکیک پذیری

فرض تحت تفکیک پذیری، توابع پایه $\xi(y;\lambda^k,\mu^k)$ akd $\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)$ ، می‌توانند بصورت توابع صریح از y بدست آورده شوند چون

$$\begin{aligned}\xi(y;\lambda^k,\mu^k)&=\min_{x\in X}\ L(x,y,\lambda^k,\mu^k)\\&=\min_{x\in X}\left\{f(x,y)+\lambda^{k^T}h(x,y)+\mu^{k^T}g(x,y)\right\}\\&=\min_{x\in X}\left\{f_1(x)+f_2(y)+\lambda^{k^T}(h_1(x)+h_2(y))+\mu^{k^T}(g_1(x)+g_2(y))\right\}\\&=f_2(y)+\lambda^{k^T}h_2(y)+\mu^{k^T}g_2(y)+\min_{x\in X}\left\{f_1(x)+\lambda^{k^T}h_1(x)+\mu^{k^T}g_1(x)\right\}\end{aligned}$$

تبصره ۱) توجه شود که بعلت تفکیک پذیری به یک تابع صریح از y و یک مسئله از x که می‌تواند بصورت غیر وابسته حل شود، می‌رسیم.

بطور مشابه تابع پایه $\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)$ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^t,\bar{\mu}^t)&=\min_{x\in X}\ \bar{L}(x,y,\bar{\lambda}^t,\bar{\mu}^t)\\&=\min_{x\in X}\left\{\bar{\lambda}^{t^T}h(x,y)+\bar{\mu}^{t^T}g(x,y)\right\}\\&=\min_{x\in X}\left\{\bar{\lambda}^{t^T}(h_1(x)+h_2(y))+\bar{\mu}^{t^T}(g_1(x)+g_2(y))\right\}\\&=\bar{\lambda}^{t^T}h_2(y)+\bar{\mu}^{t^T}g_2(y)+\min_{x\in X}\left\{\bar{\lambda}^{t^T}h_1(x)+\bar{\mu}^{t^T}g_1(x)\right\}\end{aligned}$$

تبصره ۲) توجه شود که برای حل مسائل غیر وابسته از x، نیاز داریم تا بردارهای ضریب λ^k,μ^k و $\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l$ از مسائل اولیه موجه و ناموجه را بشناسیم.

فرض تحت تفکیک پذیری مسئله اولیه برای $y=y^k$ ثابت شده از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\min_{x\in X}\quad f_1(x)+f_2(y^k)\\&S.t.\quad h_1(x)=-h_2(y^k)\\&\qquad\quad g_1(x)\le -g_2(y)\end{aligned}$$

حالا می‌توانیم طرز کار الگوریت می‌برای V1-GBD تحت فرض تفکیک پذیری را توضیح دهیم.

الگوریتم V1-GBD

گام ۱) نقطه اولیه را $y^1 \in Y \cap V$ قرار دهید. اولیه $P(y^k)$ را حل کنید و یک حل x^1 بهینه و بردارهای ضرایب μ^1 , λ^1 بدست آورید. شمارنده ها را $l=1$, $h=1$ قرار دهید. ضریب خطای همگرایی را $\varepsilon \geq 0$ انتخاب کنید.

گام ۲) مسئله اصلی ساده شده را حل کنید

$$\begin{aligned} &\min_{y \in Y, \mu_B} \ \mu_B \\ &S.t. \ \ \mu_B \geq f_2(y) + \lambda^{k^T} h_2(y) + \mu^{k^T} g_2(y) + L_1^k \quad k = 1,2,\ldots,K \\ &\qquad 0 \geq \mu_B \bar{\lambda}^{l^T} h_2(y) + \bar{\mu}^{l^T} g_2(y) + L_1^l \qquad l = 1,2,\ldots,\Lambda \\ &\qquad where \ \ L_1^k = \min_{x \in X} [f_1(x) + \lambda^{k^T} h_1(x) + \mu^{k^T} g_1(x)] \\ &\qquad\qquad \bar{L}_1^k = \min_{x \in X} [f_1(x) + \bar{\lambda}^{k^T} h_1(x) + \bar{\mu}^{k^T} g_1(x)] \end{aligned}$$

حل هایی که برای مسائل غیر وابسته توضیح داده شده در بالا هستند.

$(\hat{y}, \hat{\mu}_B)$را در یک حل بهینه قرار دهید. $\hat{\mu}_B$ یک حد پایینی است بدین معنی که $LBD = \hat{\mu}_B$. اگر $UBD - LBD \leq \varepsilon$ الگوریتم به پایان می‌رسد.

گام ۳) مانند بخش ۳-۴-۲

تبصره ۳) توجه شود که اگر علاوه بر تفکیک پذیری در x و y ، فرض کنیم که y بصورت خطی شرکت می‌کند(بطور مثال شرط هایی برای الگوریتم OA)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= c^T y, \\ h_2(y) &= A y, \\ g_2(y) &= B y, \end{aligned}$$

که در این حالت، مسئله اصلی ساده شده از گام ۲ برای V1-GBD یک مسئله برنامه ریزی ۰–۱ خطی با یک μ_B اسکالر اضافی خواهد بود که می‌تواند با حل کننده های در دسترس حل شود(بطور مثال SCICONIC،ZOOM،CPLEX) اگر متغیرهای y بطور تفکیک پذیر در یک روش غیر خطی شرکت کنند، مسئله اصلی ساده شده از نوع برنامه ریزی غیر خطی ۰–۱ است.

تبصره ۴) توجه شود که بسبب قضیه همزادی قوی، نیازی به حل مسائل برای L_1^k و L_1^1 نداریم چون حلهای بهینه آنها مشابه انواعی از مسائل اولیه موجه و ناموجه با توجه به x است.

مثال ۳-۱- این مثال یک نسخه اصلاح شده از مثال ۱ از Kocis and Grossmann(1997) و می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1, y} && -y + 2x_1 - \ln(0.5x_1) \\ &\text{subject to} && -x_1 - \ln(0.5x_1) + y \le 0 \\ &&& 0.5 \le x_1 \le 1.4 \\ &&& y = \{0,1\} \end{aligned}$$

توجه شود که خصوصیات آن تفکیک پذیری در x و y و خطی بودن بر حسب y است.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x_1 - \ln(0.5x_1) \\ f_2(y) &= -y \\ g_1(x) &= -x_1 - \ln(0.5x_1) \\ g_2(y) &= y \end{aligned}$$

همچنین توجه شود که $f_1(x)$ و $g_1(x)$ ، توابع محدبی بر حسب x_1 هستند و بنابراین شرایط محدب بودن مورد نیاز، اغنا شده اند.

حالا طبق تحلیل ارائه شده برای V1-GBD تحت فرض تفکیک پذیری، می‌توانیم مسئله اصلی ساده شده را بشکل صریح فرمولاسیون کنیم.

مسئله اصلی ساده شده

$$\begin{aligned} &\min_{y, \mu_B} && \mu_B \\ &\text{subject to} && \mu_B \ge -y + \mu^k y + L_1^k \qquad k = 1, 2, \ldots, K \\ &&& 0 \ge \bar{\mu}^l y + \bar{L}_1^l \\ &\text{where} && L_1^k = \min_{0.5 \le x \le 1.4} 2x_1 - \ln(0.5x_1) + \mu^k(-x_1 - \ln(0.5x_1)) \\ &&& L_1^l = \min_{0.5 \le x \le 1.4} \mu^l(-x_1 - \ln(0.5x_1)) \end{aligned}$$

حال می‌توانیم الگوریتم V1-GBD را بکار ببریم.

گام ۱) انتخاب $y^1 = 0$

حل مسئله اولیه $P(y^1)$ زیر:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1, y} && 2x_1 - 2\ln(0.5x_1) \\ &\text{subject to} && -x_1 - \ln(0.5x_1) \le 0 \\ &&& 0.5 \le x_1 \le 1.4 \end{aligned}$$

که دارای حل زیر است:

$$x_1 = 0.353$$
$$\mu^l = 0.381$$

و حد بالایی $UBD = 2.558$ است.

گام ۲)

$$L_1^l = \min_{0.5 \le x \le 1.4} \quad 2x_1 - \ln(0.5x_1) + 0.381(-x_1 - \ln(0.5x_1)) = 2.558$$

توجه شود که نیازی به حل برای L_1^k نداریم چون بسبب همزادی قوی، حل آن برابر مسئله اولیه متناظر $P(y^1)$ است. پس مسئله جامع ساده شده از شکل زیر است:

$$\min_{y,\mu_B} \ \mu_B$$
$$subject \ to \quad \mu_B \ge -y + 0.381y + 2.558$$
$$y = [0,1]$$

حل آن $y^2 = 1$ است و حد پایینی آن بصورت زیر است و

$$LBD = 1.939$$

گام ۳) حل اولیه برای $y^2 = 1$، $P(y^2)$ که دارای حل زیر است:

$$x_1 = 1.375$$
$$objective = 2.124$$
$$\mu = 0.73684$$

حد بالایی جدید بصورت زیر است:

$$UBD = \min(2.558, 2.124) = 2.124$$

و این حل بهینه است چون تمام ترکیب های ۰–۱ را امتحان کرده ایم.

۳–۵–۲– گونه ۲ از GBD، V2-GBD

این گونه از GBD بر اساس این فرض است که ما می‌توانیم از حل بهینه x^k از مسئله اول $P(y^k)$ همراه با بردارهای ضرایب برای تخمین تابع پایه $\xi(y;\lambda^k,\mu^k)$ استفاده کنیم.

بطورمشابه، فرض می‌کنیم که می‌توانیم از حل بهینه مسئله موجه بودن (اگر اولیه ناموجه باشد)، برای تخمین تابع پایه $\bar{\xi}(y;\lambda^k,\mu^k)$ استفاده می‌کنیم.

فرض بالا، بردار x را به مقدار بهینه بدست آمده از مسئله اولیه متناظر آن متصل می‌کند و بنابراین مسائل بهینه یابی داخلی که توابع پایه را تعریف می‌کنند حذف می‌شوند. باید توجه شود که ممکن است متصل کردن x به حل مسئله اولیه هم ارز، لزوماً توابع پایه معتبر را تولید نکند، به این معنی که هیچ تضمین تئوریکی برای بدست آوردن حدهای پایینی برای حل (۲) در حالت کلی قابل تصور نیست.

الگوریتم V2-GBD

الگوریتم V2-GBD می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

گام ۱) یک نقطه ابتدایی $y^1 \in Y \bigcap V$ انتخاب کنید.

مسئله اولیه $P(y^1)$ را حل کنید و یک حل بهینه x^1 و بردارهای ضریب λ^1 , μ^1 . شمارنده را k=1 و l=1 و خطای مجاز برای همگرایی را $\varepsilon \geq 0$ انتخاب کنید.

گام ۲) مسئله اصلی داده شده را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in Y, \mu_B} \ \mu_B \\
&S.t. \quad \mu_B \geq L(x^k, y, \lambda^k, \mu^k), \quad k = 1, 2, \ldots, K \\
&\qquad\quad 0 \geq \overline{L}(x^k, y, \overline{\lambda}^k, \overline{\mu}^k), \quad l = 1, 2, \ldots, \Lambda \\
&where \ \ L(x^k, y, \lambda^k, \mu^k) = f(x^k, y) + \lambda^{k^T} h(x^k, y) + \mu^{k^T} g(x^k, y) \\
&\qquad\quad \overline{L}(x^l, y, \overline{\lambda}^l, \overline{\mu}^l) = \overline{\lambda}^{k^T} h(x^l, y) + \overline{\mu}^{k^T} g(x^l, y)
\end{aligned}
$$

توابع لاگرانژ سنجیده شده در حل بهینه x^k برای مسئله اولیه هستند.

اجازه دهید $(\hat{y}, \hat{\mu}_B)$ یک حل بهینه باشد. $\hat{\mu}_B$ یک حد پایینی است به این معنی که $LBD = \hat{\mu}_B$. اگر $UBD - LBD \leq \varepsilon$ الگوریتم پایان می‌یابد.

تبصره ۱) توجه شود تا زمانی که $y \in Y = \{0,1\}$ باشد ، مسئله جامع یک مسئله برنامه ریزی ۰-۱ با یک متغیر μ_B اسکالر است. اگر متغیرهای y بصورت خطی شرکت کنند، آن یک مسئله خطی ۰-۱ است که می‌تواند با الگوریتم های استاندارد branch and bound حل شود. در چنین حالتی می‌توانیم برش های عدد صحیح را به شکل زیر معرفی کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i \in B} y_i - \sum_{i \in NB} y_i \leq |B| - 1 \\
&where \quad B = \{i : y_i = 1\} \\
&\qquad\quad NB = \{i : y_i = 0\} \\
&|B| \ is \ the \ cardinality \ of \ B,
\end{aligned}
$$

که ترکیبات ۰-۱ پیدا شده از قبل را حذف می‌کند. اگر ما از چنین تدبیری استفاده نماییم، گزینه دیگر برای ملاک پایان برای مسائل جامع ساده شده خواهیم داشت. البته این امر اشاره می‌کند که تمام ترکیبات ۰-۱ مورد رسیدگی قرار گرفته اند.

تبصره ۲) برای رسیدگی کردن مهم است شرایطی که در صورت اغنا، فرض بکار رفته در V2-GBD را معتبر می‌سازد، شناسایی شوند. این فرض با یک اختلاف جزئی بصرت زیر بیان می‌شود:

$$\xi(y;\lambda^k,\mu^k)=\min_{x\in X} L(x,y,\lambda^k,\mu^k)\geq L(x^k,y,\lambda^k,\mu^k),\quad k=1,2,...,K$$
$$\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)=\min_{x\in X} \bar{L}(x,y,\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)\geq \bar{L}(x^l,y,\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l),\quad l=1,2,...,\Lambda$$

به این معنی که، فرض می‌کنیم توابع لاگرانژ سنجیده شده در حل اولیه متناظر، برآورد کننده های معتبر برای مسائل بهینه یابی داخلی با توجه به $x\in X$ هستند.

بسبب شرط C1 توابع لاگرانژ $L(x,y,\lambda^k,\mu^k)$ و $\bar{L}(x,y,\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)$، برای هر y ثابت شده بر حسب x محدب هستند چون آنها ترکیبات خطی از توابع محدب بر حسب x هستند.

متعاقباً $L(x,y,\lambda^k,\mu^k)$ و $\bar{L}(x,y,\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)$ خطی بودن های محل اطراف نقاط x^k و $\bar{x}^k$ از توابع پایه $\xi(y;\lambda^k,\mu^k)$ و $\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l)$ را نشان می‌دهند. بنابراین فرض قبلی پا برجاست اگر مسئله تصویر شده $v(y)$ بر حسب y محدب باشد. اما اگر مسئله تصویر شده $v(y)$ غیر محدب باشد، فرض پا برجا نیست و الگوریتم ممکن است در یک حل محلی یا حتی در یک نقطه غیر ایستا به پایان رسد.

این تحلیل برای اولین بار توسط Foudas and Visweswaran(1990) و سپس بوسیله Sahanidis Grossman بیان شده است. شکل ۱ حالتی را نشان می‌دهد که در آن فرض معتبر است در حالیکه شکل ۲ یک حالت برای یک حل محلی یا نقطه نا ایستا را نشان می‌دهد.

توجه شود که در تحلیل بالا فرض نکرده ایم که $Y=\{0,1\}^q$ و بنابراین، این استدلال حتی هنگا می‌که متغیر های y پیوسته هستند، قابل کاربرد است. درحقیقت، شکلهای ۱ و ۲ متغیرهای y پیوسته را نمایش می‌دهند.

تبصره ۳) همچنین بسیارمهم است که اعتبار فرض ساخته شده در V2-GBD تحت شرطهای تفکیک پذیری x و y خطی بودن بر حسب y (بطور مثال شرایط OA) امتحان شوند. در این حالت داریم:

$$f(x,y)=c^Ty+f_1(x)$$
$$h(x,y)=Ay+h_1(x)$$
$$g(x,y)=By+g_1(x)$$

پس تابع پایه برای اولیه موجه بصورت زیر در می‌آید:

$$\xi(y;\lambda^k,\mu^k)=c^Ty+\lambda^{k^T}(Ay)+\mu^{k^T}(By)$$
$$+\min_{x\in X} f_1(x)+\lambda^{k^T}h_1(x)+\mu^{k^T}g_1(x)$$

که بر حسب y خطی بوده و بنابراین بر حسب y خطی است. همچنین توجه شود که چون ما $x=x^k$ را ثابت کرده ایم، $\min_{x\in X}$ ، در حقیقت یک ارزیابی در x^k است. به طور مشابه حالت $\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^k,\mu^k)$ می‌تواند تحلیل شود. بنابراین، فرض در V2-GBD درست نگه داشته می‌شود اگر تفکیک پذیری و خطی بودن نگه داشته شود که حالت

متغیرهای y ۰–۱ را نیز پوشش می‌دهد. این روش تحت شرایط C1 و C2 و C3، V2-GBD یک حل جهانی برای مسائل تفکیک پذیر بر حسب x و y و خطی بر حسب y را تخمین می‌زند.

مثال ۳-۲- این مثال از Sahinidis and Grossmann(1991) گرفته شده است و دارای سه متغیر ۰–۱ است.

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\ S.t. \quad & 3x - y_1 - y_2 \le 0 \\ & -x + 0.1y_2 + 0.25y_3 \le 0 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \ge 2 \\ & y_1 + y_2 + 2(y_3 - 1) \ge 0 \\ & 0.2 \le x \le 1 \\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1 \end{aligned}$$

توجه شود که قید سوم و چهارم تنها دارای متغیرهای ۰–۱ هستند و بنابراین می‌توان مستقیماً به مسئله اصلی ساده شده تغییر داده شود.

در ضمن توجه شود که این مثال بر حسب x و y تفکیک پذیر بوده و بر حسب y خطی است و دارای تحدب بر حسب x برای y ثابت شده است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \xi(y;\lambda^k,\mu^k) &= y_1 + y_2 + y_3 + \mu_1^k(-y_1 - y_2) + \mu_2^k(0.1y_2 + 0.25y_3), \\ &+[5x^{k^2} + \mu_1^k(3x^k) + \mu_2^k(-x^k)] \end{aligned}$$

$$\bar{\xi}(y;\bar{\lambda}^l,\bar{\mu}^l) = \mu_1^l(-y_1 - y_2) + \mu_2^l(0.1y_2 + 0.25y_3) + [\bar{\mu}_1^l(3x^l) + \mu_2^l(-x^l)]$$

تکرار ۱)

گام ۱) $(y_1, y_2, y_3) = (1,1,1)$ را قرار دهید.

مسئله اولیه بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3 + 5x^2 \\ S.t. \quad & 3x - 2 \le 0 \\ & -x + 0.35 \le 0 \\ & 0.25 \le x \le 1 \end{aligned}$$

و حل آن بصورت زیر است:

$$x^1 = 0.35,$$
$$x^2 = 0,$$
$$x^3 = 3.5,$$

با هدف برابر با $UBD = 3.6125$.

گام ۲) مسئله جامع ساده شده برابر است با:

$$\min_{y_1,y_2,y_3,\ \mu_B} \quad \mu_B$$

$$\begin{aligned} S.t. \quad & \mu_B \geq y_1 + y_2 + y_3 + 0(-y_1 - y_2)3.5(0.1y_2 + 0.25y_3) + 0.6125 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1 + y_2 + 2(y_3 - 1) \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1 \end{aligned}$$

که دارای حل $y^2 = (1,1,0)$ و $\mu_{\mathbf{B}} = LBD = 1.7375$ است. چون $UBD - LBD = 3.6125 - 1.735$ ، کار را با $y = y^2$ ادامه می‌دهیم. توجه شود که $.5(0.35)^2 + (0)(30.35) + (3.5)(-0.35) = -0.6125$.

تکرار ۲)

گام ۱) $y^2 = (1,1,0)$ را قرار دهیم.

اولیه $P(y^2)$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2 + 5x^2 \\ s.t. \quad & 3x - 2 \leq 0 \\ & -x + 0.1 \leq 0 \\ & 0.2 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

و حل آن اینست

$$x^2 = 0.2,$$
$$\mu_1^2 = 0,$$
$$\mu_2^2 = 0,$$

تابع هدف ۲/۲ است. حد بالایی به روز شده $UBD = \min(3.6125, 2.2) = 2.2$ است.

گام ۲) مسئله جامع ساده شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu_B \\ s.t. \quad & \mu_B \geq y_1 + y_2 + y_3 + 3.5(0.1y_2 + 0.25y_3) - 0.6125 \\ & \mu_B \geq y_1 + y_2 + y_3 + 0.2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1 + y_2 + 2(y_3 - 1) \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1 \end{aligned}$$

که دارای حل $(y_1, y_2, y_3) = (1,1,0)$ و $\mu_B = LBD = 2.2$ است . چون $UBD - LBD = 0$ ، کار را ب $(y_1, y_2, y_3) = (1,1,0)$ به عنوان حل بهینه ادامه می‌دهیم.

تبصره ۴) توجه شود که اگر باید برای نقطه شروع، حل بهینه را انتخاب کنیم، آن (۰و۱و۱) است. سپس V2-GBD باید در در یک تکرار پایان یابد. این امر می‌تواند بر حسب شرایط تبصره ۳ توضیح داده شود. چون $v(y)$ محدب است، نقطه بهینه متناظر است، مینیمم جهانی و صفحه مماس به این مینیمم محکمترین حد بالایی را بوجود می‌آورد که بوسیله با همزادی قوی با حد بالایی برابر است. این امر در شکل ۳ نشان داده شده است.

۳-۵-۳- گونه ۳ از GBD، V3-GBD

این گونه بوسیله Floudas et al نشان داده شده است و به عنوان GOS شناخته شده است و برای دستگاه Y ۱-۰ و پیوسته بکار می‌رود. این روش از همان فرض بکار رفته در V2-GBD استفاده می‌کند اما با فرض های اضافه شده به آن:

(i) $f(x,y)$ ، $g(x,y)$ توابع محدب بر حسب y برای هر x ثابت شده هستند و

(ii) $h(x,y)$ توابع خطی بر حسب y برای هر x هستند

این فرض اضافه برای این ساخته شده بود که یک ساختار مخصوص را تنها برای اولیه بلکه برای مسئله جامع ساده شده، بوجود آورد. نوع ساختار مخصوص در مسئله اصلی ساده شده باید با خصوصیات تحدب آن انجام شود.

ایده اصلی در GOS، انتخاب متغیرهای x و y به روشی است که مسئله اصلی ساده شده و اولیه بوسیله V2-GBD ، نیاز های تحدب مناسب را اغنا کنند و بنابراین به حلهای جهانی مربوط به خود برسند.

V3-GBD با تفکیک پذیری

با توجه به فرض تفکیک پذیری داریم:

$$f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$$
$$h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$$
$$g(x,y) = g_1(x) + g_2(y)$$

فرض اضافی که V3-GBD را از V2-GBD متمایز می‌سازد، بر این دلالت دارد که:

(i) $f_2(y)$ و $g_2(y)$ بر حسب y محدب هستند و

(ii) $h_2(y)$ بر حسب y خطی است.

پس، مسئله اصلی ساده شده بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\min_{y,\mu_B} \ \mu_B \\
&S.t. \quad \mu_B \ge f_2(y) + \lambda^{k^T} h_2(y) + \mu^{k^T} g_2(y) \\
&\qquad\quad + [\, f_1(x^k) + \lambda^{k^T} h_1(x^k) + \mu^{k^T} g_1(x^k)\,], \quad k = 1,2,\ldots,K \\
&\quad 0 \ge \bar{\lambda}^{l^T} h_2(y) + \bar{\mu}^{l^T} g_2(y) + [\bar{\lambda}^{l^T} h_1(\bar{x}^l) + \bar{\mu}^{l^T} g_1(\bar{x}^l)], \qquad l = 1,2,\ldots,L
\end{aligned}$$

تبصره ۱) توجه شود که فرض اضافی، مسئله را بر حسب y محدب می‌کند اگر y نشانگر متغیرهای پیوسته باشد. اگر $y \in Y = \{0,1\}^q$ و متغیرهای y بصورت خطی شرکت کنند (بطور مثال f_2, g_2 خطی بر حسب y هستند)، در نتیجه مسئله اصلی ساده شده، محدب است. بنابراین، این حالت یک ترقی تحت V3-GBD را نشان می‌دهد و کاربرد V3-GBD در توابع پایه معتبر خواهد بود که به این دلالت دارد که به حل جهانی برای (۲) خواهیم رسید.

V3-GBD بدون تفکیک پذیری

GOS به سمت استخراج و طلب ساختار مخصوص برای مسائل غیر قابل تفکیک غیر محدب برای نوع (۲) می‌رود.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x,y) \\
S.t. \quad & h(x,y) = 0 \\
& g(x,y) \le 0 \\
& x \in X \subseteq \Re^n \\
& y \in Y \subseteq \Re^q
\end{aligned}
$$

تحت شرایط C1 و C2 و C3 و شرط اضافی:

(i) $g(x,y)$ و $f(x,y)$ توابع محدب بر حسب y برای هر x ثابت شده هستند.

(ii) $h(x,y)$ توابع خطی بر حسب y برای هر x هستند.

بنابراین مسائل ساده شده و اولیه به حلهای بهینه مربوطه می‌رسند.

تبصره ۲) توجه شود که چون x و y تفکیک پذیر هستند، پس GOS ن می‌تواند از نظر تئوریکی توابع معتبر در حالت کلی تولید کند، اما اگر $v(y)$ محدب باشد این امر امکان پذیر است.(V2-GBD را ببیند)

علی رغم محدودیت تئوریکی، آموزنده است که ببینیم چگونه برای $Y \subseteq \Re$ مسائل اصلی ساده شده و اولیه محدب استنتاج می‌شوند. این امر در ادامه توضیح داده خواهد شد.

مثال ۳-۳- این مثالی است که از Floudas et al گرفته شده است.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -12x_1 - 7x_2 + x_2^2 \\
S.t. \quad & -2w_3 x_1 - x_2 + 2 = 0 \\
& 0 \le x_1 \le 2 \\
& 0 \le x_2 \le 3
\end{aligned}
$$

توجه شود که تابع هدف محدب است چون دارای بخش های کوادراتیک مثبت و خطی است.

تنها غیر خطی بودن ها از محدودیت مساوی می‌آید. بوسیله معرفی سه متغیر جدید w_1, w_2, w_3 سه تساوی:

$$w_1 - x_1 = 0$$
$$w_2 - x_1 w_1 = 0$$
$$w_3 - x_1 w_2 = 0$$

می‌توانیم یک فرمولاسیون معادل بصورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -12x_1 - 7x_2 + x_2^2 \\
S.t. \quad & -2w_3 x_1 - x_2 + 2 = 0 \\
& w_1 - x_1 = 0 \\
& w_2 - x_1 w_1 = 0 \\
& w_3 - x_1 w_2 = 0 \\
& 0 \le x_1 \le 2 \\
& 0 \le x_2 \le 3
\end{aligned}$$

توجه شود که اگر در نظر بگیریم:

$$y = x_1$$
$$x = (x_1, w_1, w_2, w_3)$$

تمام شرایط تحدب تحمیلی اغنا می‌شوند و بنابراین مسائل اصلی ساده شده و اولیه محدب می‌شوند و به حلهای جهانی مربوط به خودشان خواهند رسید.

مسئله اولیه برای $y = y^k$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -12y^k - 7x_2 + x_2^2 \\
S.t. \quad & -2w_3 y^k - x_2 + 2 = 0 \\
& w_1 - y^k = 0 \\
& w_2 - y^k w_1 = 0 \\
& w_3 - y^k w_2 = 0 \\
& 0 \le x_2 \le 3
\end{aligned}$$

مسئله اصلی ساده شده برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&\min_{y,\mu_B} \ \mu_B \\
&S.t. \quad \mu_B \ge L(x^k, y, \lambda^k, \mu^k), \quad k = 1,2,\dots,K \\
&\qquad\quad 0 \ge \overline{L}(x^l, y, \overline{\lambda}^l, \overline{\mu}^l), \quad l = 1,2,\dots,L \\
&\qquad\quad 0 \le y \le 2 \\
&where \quad L(x^k, y, \lambda^k, \mu^k) = -12y^k - 7x_2^k + (x_2^k)^2 \\
&\qquad\qquad + \lambda_1^k(-2w_3^k y - x_2^k + 2) \\
&\qquad\qquad + \lambda_2^k(w_1^k - y) \\
&\qquad\qquad + \lambda_3^k(w_2^k - yw_1^k) \\
&\qquad\qquad + \lambda_4^k(w_3^k - yw_2^k) \\
&\overline{L}(x^l, y, \overline{\lambda}^l, \overline{\mu}^l) = +\lambda_1^l(-2\overline{w}_3^l y - x_2^l + 2) \\
&\qquad\qquad + \lambda_2^l(\overline{w}_1^l - y) \\
&\qquad\qquad + \lambda_3^l(\overline{w}_2^l - y\overline{w}_1^l) \\
&\qquad\qquad + \lambda_4^l(\overline{w}_3^l - y\overline{w}_2^l)
\end{aligned}
$$

تبصره ۳) اولیه بر حسب x محدب است، در حالیکه مسئله جامع ساده شده بر حسب y خطی است.

کاربرد V3-GBD برای چندین نقطه شروع، حل جهانی بصورت زیر را تعیین می کند:

$$
\begin{aligned}
&y = 0.718 \\
&x_2 = 1.47 \\
&objective = -16.7389
\end{aligned}
$$

تبصره ۴) اگر x_2 را از محدودیت مساوی جایگزین کنیم، به فرمولاسیون متناظر زیر می‌رسیم:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad -12x_1 - 14(1-x_1^4) + 4(1-x_1^4) \\
&S.t. \quad 0 \le x_1 \le 2
\end{aligned}
$$

تحلیل ویژه مقدار بر این فرمولاسیون نشان می‌دهد که آن یک مسئله محدب است.

در نتیجه مسئله $v(y)$ تصویر شده در این مثال، محدب است و بنابراین V3-GBD برای نقطه به حل جهانی همگرا می‌شود.

مثال ۳-۴- این مثال از Floudas and Visweswaran(1990) گرفته شده است و به عنوان یک مثال انگیزشی برای بهینه یابی جهانی بکار رفته است.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad -x-y \\
&S.t. \quad xy \le 4 \\
&\qquad\quad 0 \le x \le 4 \\
&\qquad\quad 0 \le y \le 8
\end{aligned}
$$

منطقه موجه در شکل ۴ نشان داده شده است و بسبب محدودیت نامساوی دو سویه(وابسته به دو خط مستقیم)، غیر محدب است. این مسئله یک مینیمم محلی قوی در $(x,y)=(4,1)$، همراه با یک تابع هدف برابر با ۵- و یک مینیمم جهانی در $(x,y)=(0.5,8)$ با تابع هدف برابر ۸/۵- را نشان می‌دهد.

تصویر بر فضای y، $v(y)$ ، در شکل ۵ نشان داده شده است.

توجه شود که $v(y)$ نامحدب است و اگر ما $y^1=2$ را به عنوان نقطه شروع در V3-GBD انتخاب کنیم، الگوریتم با آن به عنوان حل به پایان می‌رسد، که در حقیقت حتی یک حل محلی هم نیست. این امر بسبب فرض متداول برای V2-GBD و V3-GBD است.

تبصره ۵) GOP [۱] بر این اشکال پایه ای چیره شده است و بهینگی جهانی برای کلاس های مختلف از مسائل غیر محدب را تضمین می‌کند. در طول دهد گذشته فضا برای بهینه یابی جهانی از اهمیت بالایی برخوردار شده است و خواننده علاقه مند به تئوریهای بهینه یابی جهانی، الگوریتم ها، کاربردها و مسائل آزمایشی به کتابهایی از Horst and Tuy(1990), Neumaier(1990),Floudas and Pardalos(1990),Hansen(1992),… ارجاع داده می‌شود.

۳- GBD در بهینه یابی پیوسته و پیوسته-گسسته

ما درتبصره ۱ از بخش فرمولاسیون (مراجعه شود به ۳-۱) ذکر کرده ایم که (۲) یک زیر کلاس از مسائل را معرفی می‌کند که می‌تواند برای GBD بکار رود. این به آن علت است که ما در مسئله (۲) فرض کرده ایم که $y \in Y$ برای ترکیبی از متغیرهای ۰-۱ تنظیم شده است، در حالیکه Geoffrion یک تحلیل برای Y پیشنهاد کرده است که مجموعه Y پیوسته، گسسته یا پیوسته-گسسته باشد.

هدف اصلی در این بخش نشان دادن اصلاحات مورد نیاز برای ادامه دادن تحلیل نشان داده شده در بخش های ۳-۱ تا ۳-۵ برای Y پیوسته و مجموعه Y پیوسته- گسسته است. تحلیل ارائه شده برای مسئله اولیه (بخش ۳-۳-۱ را ببینید) به همان صورت باقی می‌ماند. با وجود آن تحلیل مسئله جامع فقط در نمایش همزاد برای تصویر مسئله (۲) (بطور مثال $v(y)$) در فضای y تغییر می‌کند. در حقیقت قضیه ۳ اغنا می‌شود اگر علاوه بر دو شرطی که در C3 بیان شده است داشته باشیم که:

(iii) برای هر y ثابت شده، $v(y)$ محدود است، $h(x,y)$ و $f(x,y)$ و $g(x,y)$ بر حسب x پیوسته هستند، x بسته است و حل بهینه- ε برای مسئله اولیه $P(y)$ ناتهی است و برای برخی $\varepsilon \geq 0$ محدود شده است.

۱- Generalized Bender Decomposition

بنابراین قضیه ۳ فرض هایی بصورت C1 و C3 دارای سه بخش (i) و (ii) و(iii) است. طرز عمل الگوریت می‌بیان شده در بخش ۳-۴-۲ به همان صورت باقی می‌ماند در حالیکه قضیه برای همگرایی محدود[۱] به ε– همگرایی محدود[۲] تبدیل می‌شود و به شرایط اضافی نیاز دارد که در قضیه زیر شرح داده می‌شود:

قضیه ۳- (ε– همگرایی محدود)

اجازه دهید

(i) y یک زیر مجموعه ناتهی از V باشد.

(ii) x یک مجموعه محدب ناتهی باشد.

(iii) f و g برای هر $y \in Y$ ثابت شده بر حسب x محدب باشند.

(iv) h برای هر $y \in Y$ ثابت شده بر حسب x محدب باشد.

(v) f و g و h بر حسب x×y پیوسته باشند.

(vi) مجموعه بردارهای ضریب بهینه برای مسئله اولیه برای تمام $y \in Y$ ناتهی باشد و بطور یکنواخت در بعضی از همسایگان هر یک از این نقاط محدود شده باشد.

سپس برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، GBD در تعداد محدودی تکرار به پایان برسد.

تبصره ۱) فرض (i) (یعنی $Y \subseteq V$) امکان گام b۳ را از بین می‌برد و بسیاری کاربردها وجود دارند که درآن $Y \subseteq V$ برقرار است (برای مثال برنامه ریزی ضریب متغیر). اما اگر $Y \not\subset V$، ما ممکن است که در زمانهای متوالی بسیاری نیاز به حل گام b۳ داشته باشیم. در این حالت،برای حفظ کردن ε– همگرایی محدود، می‌توانیم طرز عمل را اصلاح کنیم بطوریکه برای بطور محدود کوتاه کردن هر توالی بیش از حد طولانی از حلهای گام b۳ و بازگشت به گام a۳ با $Y \cap V$ مساوی با نقطه محدود برون یابی شده که فرض شده است که به $Y \subseteq V$ تعلق دارد. اگر ما فرض $Y \subseteq V$ را نسازیم، کلید مناسب برای جستجو اینست که V دارای نمایشی بر حسب یک مجموعه محدود از قیدها باشد، چون اگر این حالت باشد گام b۳ می‌تواند در بسیاری از مواقع در یک عدد محدود اتفاق بیافتد. توجه شود که اگر علاوه بر C1، داشته باشیم که X حدهای متغیر x را نشان دهد یا X بوسیله قیدهای خطی داده شده باشد و g و h شرط تفکیک پذیری را اغنا کنند، V می‌تواند بر حسب مجموعه محدودی از قیدها نمایش داده شود.

تبصره ۲) فرض (vi) نیاز دارد که برای تمام $y \in Y$ بردارهای ضریب بیهنه وجود داشته باشد و دلیل اینکه این بردارهای ضریب به سمت بی نهایت میل نکنند، این است که آنها بطور یکنواخت در برخی همسایه ها از هر یک از این

---

[۱] Finite Convergence-

[۲] Finite ε- convergence-

نقاط محدود شده اند. Geoffrion(1972) شرط زیر را برای بررسی boundedness یکنواخت بوجود آورده است:

اگر X یک مجموعه ناتهی، فشرده و محدب باشد و در آنجا یک نقطه $\bar{x} \in X$ وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$
$$g(\bar{x}, \bar{y}) < 0$$

مجموعه بردارهای ضریب بهینه بطور یکنواخت در تعدادی همسایگی از $\bar{y}$ محدود شده است.

مثال ۳-۵- این مثال از Kocis and Grossman(1988) گرفته شده است و بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \; 2x + y \\ &S.t. \; 1.25 - x^2 - y \le 0 \\ &\quad x + y \le 1.6 \\ &\quad x \ge 0 \\ &\quad y = 0,1 \end{aligned}$$

توجه شود که قید اول مقعر بر حسب x است و بنابراین با یک مسئله غیر محدب مواجهیم. در ضمن توجه شود که متغیر ۱-۰ y خطی و تفکیک پذیر بر حسب متغیر x بنظر می‌رسد.

اگر از رویکرد V3-GBD استفاده کنیم و سپس یک متغیر x_1 جدید و یک قید مساوی اضافی تعریف کنیم.

$$x_1 - x = 0$$

مسئله می‌تواند بشکل معادل زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x,x_1,y} \; 2x + y \\ &S.t. \; 1.25 - x_1 x - y \le 0 \\ &\quad x_1 - x = 0 \\ &\quad x + y \le 1.6 \\ &\quad x, x_1 \ge 0 \\ &\quad y = 0,1 \end{aligned}$$

تحلیل دقیق از مجموعه قیدها که حد را معین می‌کنند، موارد زیر را مشخص می‌کند:

(i) برای $y = 0$ داریم $x^2 \ge 1.25$ و برای $y = 1$ داریم $x^2 \ge 0.25$ (قید نامساوی اول را ببینید) بطور مشابه

(ii) اگر قید نامساوی دوم داریم که برای $y = 0$ ، $x^2 \le 1.6$ در حالیکه برای $y = 1$ ، $x^2 \le 0.6$

با استفاده از مشاهدات مذبور یک حد پایینی برای x (وبنابراین x_1) داریم:

$$0.5 \le x \le 1.6$$

مجموعه ای از متغیرهای پیچیده برای این مثال بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = (x_1, y)$$

و این یک مجموعه از متغیرهای ۰–۱ و پیوسته است. مسئله اولیه بشکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ 2x+y^k\\&S.t.\ 1.25-x_1^k x-y^k\le 0\\&\qquad x_1^k-x=0\\&\qquad 0.5\le x\le 1.6\end{aligned}$$

مسئله اصلی ساده شده بسبب رویکرد V3-GBD بصورت زیر در می‌آید(اولیه را موجه فرض کنیم):

$$\begin{aligned}&\min_{y,\mu_B}\ \mu_B\\&S.t.\quad \mu_B\ge L(x^k,y,\lambda^k,\mu^k),\\&\qquad x_1+y\le 1.6\\&\qquad 0.5\le x_1\le 1.6\\&\qquad y=0,1\\&where\ L(x^T,y,\lambda^k,\mu^k)=2x^k+y+\lambda^k(x_1-x^k)+\mu^k(1.25-x_1^k x-y)\end{aligned}$$

توجه شود که قید $x+y\le 1.6$ بصورت $x_1+y\le 1.6$ نوشته شده است و چون x_1 و y متغیرهای پیچیده هستند بطور مستقیم به مسئله اصلی ساده شده منتقل می‌شود.

همچنین توجه شود که در این حالت مسئله اولیه یک مسئله برنامه ریزی خطی است، در حالیکه مسئله اصلی ساده شده یک مسئله برنامه ریزی خطی آمیخته است. V3-GBD برای حل این مسئله برای نقاط شروع مختلفی بکار رفته بود (Feloudas et al.) و حل جهانی در دو تکرار بدست آمده بود، حتی با وجود آنکه شرایط تئوریک برای تعیین حل جهانی اغنا نشده بود.

۴– تقریب بیرونی Outer Approximation

۴–۱– فرمولاسیون

Duarn and Grossmann(1986a;1986b) یک الگوریتم OA برای دسته های زیر از مسائل MINLP ارائه داده اند:

$$\begin{aligned}&\min_{x,y}\ c^T y+f(x)\\&S.t.\ g(x)+By\le 0\\&x\in X=\{x:x\in\Re^n,A_1x\le a_1\}\subseteq\Re^n\\&y\in Y=\{y:y\in\{0,1\}^q,A_2y\le a_2\}\end{aligned}$$

تحت شرایط زیر:

C1: X یک مجموعه ناتهی، فشرده و محدب است و توابع

$$\begin{aligned}&f:\Re^n\to\Re\\&g:\Re^n\to\Re^p\end{aligned}$$

بر حسب x محدب هستند.

C2: f و g همیشه بطور مداومقابل دیفزانسیل گیری هستند.

C3: یک قید صلاحیت (بطور مثال Slater’s) در حل هر مسئله برنامه ریزی غیر خطی نتیجه شده از (۱۳) بوسیله ثابت کردن y، نگه داشته می‌شود.

تبصره ۱) توجه شود که فرمولاسیون (۱۳) متناظر با یک زیر مجموعه از مسئله (۲) است که GBD می‌تواند اداره کند. این امر بسبب فرضیات ذاتی برای

(i) تفکیک پذیری بر حسب x و y و

(ii) خطی بودن بر حسب y است.

همچنین توجه شود که مسئله (۱۳) هیچ محدودیت مساوی غیر خطی را نشان ن می‌دهد. بنابراین فرض ضمنی در الگوریتم OA اینست که:

(iii) تساوی های غیر خطی می‌توانند بصورت جبری یا عددی حذف شوند.

تبصره ۳) تحت فرضیات ذکر شده در (i) و (ii) ، مسئله (۱۳)، خاصیت P از Geoffrion (1972) را اغنا می‌کند و بنابراین OA متناظر با یک زیر مجموعه از V1-GBD (بخش های ۳-۵-۱ را ببینید) بعلاوه همانطور که در بخش ۳-۵-۲ دیدیم، فرضیات(i) و (ii) فرض تحمیلی در V2-GBD را معتبر می‌سازد (تبصره بخش ۳-۵-۲ را ببینید) و بنابراین OA می‌تواند بصورت همتراز با V2-GBD با تفکیک پذیری بر حسب x و y و خطی بودن بر حسب y، در نظر گرفته شود. توجه شود که V1-GBD قادر به کار بردن محدودیت های مساوی غیر خطی است.

تبصره ۳) توجه شود که مجموعه محدودیت های

$$g(x) + By \le 0$$

می‌توانند بصورت متناظر زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} g(x) - C\,x^l &\le 0 \\ C\,x^l + By &\le 0 \end{aligned}$$

بوسیله معرفی یک دسته جدید از متغیرهای x^l و بنابراین افزودن x به (x, x^l) و یک دسته جدید از معادلات.

اکنون اگر ما متغیرهای x را بصورت (x, x^l) و شرطهای اول را بصورت $G(x) \le 0$ تعریف کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} G(x) &\le 0 \\ C\,x + By &\le 0 \end{aligned}$$

که دسته اول از محدودیت ها غیر خطی بر حسب متغیرهای نوع x است، در حالیکه دسته دوم از محدودیت ها بر حسب متغیرهای x و y خطی هستند. جریمه ای که باید به خاطر تبدیل بالا پرداخت نمائیم، معرفی x^l و محدودیت های همراه با آنها می‌باشد.

۴-۲- ایده پایه

ایده پایه در OA شبیه با چیزی است که در GBD وجود دارد، در هر تکرار از حل MINLP یک حد بالایی و یک حد پایینی تولید می‌کنیم. حد بالایی نتیجه شده از حل مسئله ای که مسئله (۱۳) با متغیرهای y ثابت شده (بطور مثال $y = y^k$) است. حد پایینی نتیجه شده از حلی برای مسئله اصلی است. مسئله اصلی با استفاده از اطلاعات اولیه که شامل نقطه حل x^k از اولیه و پایه ریزی شده بر اساس یک OAی خطی شده از تابع هدف غیر خطی و محدودیت های اطراف حل اولیه x^k است، استنتاج شده است. حل مسئله اصلی علاوه بر حد بالا و پائین، اطلاعاتی برای دسته بندی متغیرهای y ثابت شده (یعنی $y = y^{k+1}$) بوجود می‌آورد که در مسئله اولیه بعدی بکار می‌رود. در حالیکه تکرار ها انجام می‌شوند، دو توالی از حدهای بالایی و حدهای پایینی تولید می‌شوند که متعاقباً نشان داده شده است، غیر صعودی و غیر نزولی هستند. سپس، نشان داده شده است که این دو توالی به اندازه ε در تعدادی محدود تکرار همگرا می‌شوند.

تبصره ۱) نوجه شود که خصیصه مجزای OA در برابر GBD اینست که مسئله اصلی بر اساس اطلاعات اولیه و خطی سازی بیرونی، فرمولاسیون شده است.

۳-۴- توسعه تئوریکی

۴-۳-۱- مسئله اولیه

مسئله اولیه متناظر با ثابت کردن متغیرهای y در (۱۳) به ترکیب ۰-۱ است که بصورت y^k نمایش یافته است و فرمولاسیون آن بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ \ c^T y^k\\&S.t.\ \ \ g(x)+By^k \le 0\\&x\in X=\{x: x\in\Re^n, A_1x\le a_1\}\end{aligned}$$

بسته به نقطه y^k تثبیت، مسئله اولیه می‌تواند موجه یا ناموجه باشد و این دو حالت در ذیل تحلیل شده است:

حالت (i): اولیه موجه

اگر اولیه در تکرار k موجه باشد، حل آن اطلاعاتی بر $x^k, f(x^k)$ بهینه و بنابراین حد بالایی کنونی $UBD = c^T y^k + f(x^k)$ بوجود می‌آورد با استفاده از اطلاعات x^k، متعاقباً می‌توانیم توابع محدب $g(x)$ و $f(x)$ را در اطراف x^k خطی سازی کرده و روابط اغنا شده زیر را داشته باشیم:

$$\begin{aligned}&f(x)\ge f(x^k)+\nabla f(x^k)(x-x^k)\quad \forall x^k\in X,\\&g(x)\ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)\quad \forall x^k\in X\end{aligned}$$

بسبب تحدب $g(x)$ و $f(x)$.

حالت (ii): اولیه ناموجه

اگر اولیه در تکرار k ناموجه باشد، نیاز به معرفی یک نقطه موجه با نظر به مجموعه محدودیت زیر داریم:

$$g(x) + By^k \le 0$$

و فومول بندی یک مسئله موجه بودن با روشی مشابه GBD (حالت (ii) از بخش ۳-۳-۱ را ببینید.) انجام می‌شود.

برای مثال، اگر از مینیمم سازی - l_1 استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in X} \quad \sum_{j=1}^{p} a_j \\
&S.t. \\
&g_j(x) + By^k \le a_j \quad j = 1,2,\dots,p \\
&a_j \ge 0
\end{aligned}$$

حل آن نقطه x^l متناظر را بوجود خواهد آورد که بر پایه آن می‌توانیم محدودیت ها را خطی سازی کنیم:

$$g(x) \ge g(x^l) + \nabla g(x^l)(x - x^l), \ \ \forall x^l$$

که سمت راست یک پایه خطی معتبر است.

۴-۳-۲- مسئله اصلی

استنتاج مسئله اصلی در رویکرد OA شامل دو ایده اصلی زیر است:

(i) تصویر (۱۳) به فضای y و

(ii) OA برای تابع هدف و منطقه موجه

(i) تصویر (۱۳) به فضای y

مسئله (۱۳) می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned}
&\min_{y} \ \inf_{x} \quad c^T y + f(x) \\
&S.t. \qquad g(x) + By \le 0 \\
&\qquad\qquad x \in X \\
&\qquad\qquad y \in Y
\end{aligned}$$

توجه شود که مسئله داخلی بصورت اینفیموم با توجه به x برای پوشش حالتی برای داشتن حل نامحدود برای یک y ثابت شده نوشته شده است. همچنین توجه شود که $c^T y$ می‌تواند خارج از اینفیموم انتخاب شود، تا زمانی که مستقل از x باشد.

اجازه دهید $v(y)$ را تعریف کنیم:

$$v(y)=c^T y+\inf_x f(x)$$
$$S.t. \quad g(x)+By\le 0$$
$$bx\in X$$

تبصره ۱) $v(y)$ بر حسب متغیرهای y پارامتری است و این امر متناظر است با مقداربهینه برای مسئله (۱۳) برای y ثابت شده (یعنی مسئله اولیه $P(y^k)$)

همچنین اجازه دهید مجموعه V از yها تعریف کنیم که برای حلهای موجه بر حسب متغیرهای x بصورت زیر وجود دارد:

$$V=\{y:g(x)+By\le 0,\ \ for\ some\ x\in X\}$$

سپس مسئله (۱۳) می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\min_y \quad v(y)$$
$$S.t. \quad y\in Y\bigcap V$$

تبصره ۲) مسئله (۱۷) تصویر (۱۳) بر فضای y است. تصویر نیاز به اغنای احتیاجات موجه بودن دارد و این امر در (۱۷) بوسیله تحمیل کردن $y\in Y\cap V$ نشان داده شده است.

تبصره ۳) توجه شود که می‌توانیم اینفیموم را با توجه به $x\in X$ با اینفیموم تعویض کنیم، چون تا زمانی که $y\in Y\cap V$، بسبب فرض تراکم برای X موجودیت حل x درست نگه داشته می‌شود. این امر مانع امکان حل نامحدود مسئله داخلی برای y ثابت شده $y\in Y\cap V$ می‌شود.

تبصره ۴) مشکلی که در حل (۱۷) است، ناشی از V و $v(y)$ می‌باشد که بصورت ضمنی شناخته می‌شوند. برای فائق آمدن بر این مشکل، Duran and Grossmann(1986a) خطی سازی بیرونی از $v(y)$ و یک نمایش ویژه برای V را در نظر گرفته اند.

(ii) OA برای $v(y)$

OA برای $v(y)$ بر اساس شرایط اشتراک برای یک دسته نامحدود از توابع پایه خواهد بود، این توابع پایه متناظر با خطی سازی $f(x)$ و $g(x)$ در تمام $x^k\in X$ است. سپس، شرایط زیر:

$$f(x)\ge f(x^k)+(x-x^k)\quad \forall x^k\in X,$$
$$g(x)\ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)\quad \forall x^k\in X$$

بسبب فرض تحدب و قابلیت تشخیص پیوسته اغنا می‌شوند. $\nabla f(x^k)$ بردار شیب-n برای $f(x)$ را نشان می‌دهد و $\nabla g(x^k)$ ماتریس جاکوبسن (n×p) ارزیابی شده در $x^k \in X$ را نشان می‌دهد.

تبصره ۵) توجه شود که توابع پایه بر حسب x خطی است و در نتیجه $v(y)$ یک مسئله MINLP است. فرض صلاحیت قید که در حل هر مسئله اولیه برای y ثابت شده $y \in Y \cap V$ نگه داشته می‌شود، جفت شده با تحدب برای $f(x)$ و $g(x)$ دلالت بر لم زیر دارد:

لم ۴-۱-

$$v(y)=\begin{bmatrix} \min\limits_{y} \; c^T y+f(x) \\ S.t. \qquad g(x)+By \le 0 \\ \qquad\quad x \in X \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \min\limits_{y} \quad c^T y+f(x^k)+\nabla f(x^k)(x-x^k) \\ S.t. \quad 0 \ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)+By \\ \qquad x \in X \end{bmatrix} \forall x^k \in X,$$

تبصره ۶) کفایت می‌کند که خطی سازی هایی از قیدها بحساب آورده شوند که در (x^k, y^k) فعال هستند. این نشان می‌دهد که قیدهای کمتری در مسئله اصلی مورد نیاز هستند. سپس، بوسیله جانشینی $v(y)$ از لم بالا در تصویر مسئله (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} &\min_{y}\ \min_{x} \quad c^T y+f(x^k)+\nabla f(x^k)(x-x^k) \\ &S.t. \qquad 0 \ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)+By \\ &\qquad\qquad x \in X \\ &\qquad\qquad y \in Y \cap V \end{aligned}$$

بوسیله ترکیب عملگرهای min و معرفی یک μ_{OA} اسکالر، مسئله (۱۸) می‌تواند بصورت شکل متناظر زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y,\mu_{OA}} \quad c^T y+\mu_{OA} \\ &S.t. \quad \left.\begin{aligned} \mu_{OA} &\ge f(x^k)+\nabla f(x^k)(x-x^k), \forall k \in F \\ 0 &\ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)+By \end{aligned}\right\}, \forall k \in F \\ &\qquad x \in X \\ &\qquad y \in Y \cap V \end{aligned}$$

که F={ $k : x^K$ یک حل بهینه موجود برای $P(y^k)$ است }

Duran and Grossmann یک فرض اضافی بوجود آوردند که می‌توانیم $y \in Y \bigcap V$ را با $y \in Y$ جایگزین کنیم. با استفاده از این استدلال که نمایشی از قیدهای $y \in Y \bigcap V$ که در خطی سازیهای مسئله (۱۹) هستند، مشروط بر آنکه برش های عدد صحیح مناسب که از امکان تولید همان ترکیبات عدد صحیح جلوگیری می‌کنند، معرفی شوند. متعاقباً آنها مسئله اصلی OA را بصورت زیر تعریف کردند:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y,\mu_{OA}} \quad c^T y + \mu_{OA} \\
&S.t. \quad \left.\begin{aligned} \mu_{OA} &\geq f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k), \forall k \in F \\ 0 &\geq g(x^k) + \nabla g(x^k)(x - x^k) + By \end{aligned}\right\}, \forall k \in F \\
&\qquad x \in X \\
&\qquad y \in Y \bigcap V \\
&\sum_{i \in B^k} y_i^k - \sum_{i \in NB^k} y_i^k \leq \left|B^k\right| - 1 \ , \quad k \in F
\end{aligned}
$$

تبصره ۷) توجه شود که مسئله اصلی (۲۰) یک مسئله MILP است چون دارای تابع هدف و محدودیت های خطی و متغیرهای پیوسته (x, μ_{oA}) و متغیرهای y ۰–۱ است. بنابراین، می‌تواند با الگوریتم های استاندارد branch and bound حل شود.

تبصره ۸) مسئله اصلی شامل پایه های خطی معتبر است و بنابراین ساده سازی توابع غیر خطی برای تمام نقاط x^k که نتیجه شده از ثابت کردن $y = y^k \in Y$، بصورت نشان داده شده در (۲۰) است. به عنوان یک نتیجه این امر ساده سازی برای مدل اصلی MINLP (۱۳) را نشان می‌دهد و بنابراین یک حد پایینی بر حل های آن است و این مشابه با حل آن است اگر تمام پایه ها در نظر گرفته شوند.

تبصره ۹) کارآمد نیست که مسئله اصلی (۲۰) بطور مستقیم حل شود، چون ما احتیاج داریم تا تمام نقاط x^k موجه را بشناسیم که دلالت بر این دارد که ما باید تمام مسائل اولیه $P(y^k)$، $y \in Y$ (یعنی شمارش فراگیر از گزینه های ۰–۱) را حل کنیم. در عوض، Duran and Grossmann یک ساده سازی برای مسئله اصلی معرفی کردند که در بخش بعد شرح داده خواهد شد.

تبصره ۱۰) (تفسیر هندسی مسئله اصلی OA)

مسئله اصلی OA می‌تواند بصورت هندسی بوسیله آزمایش اثر تابع پایه خطی (یعنی خطی سازی بیرونی) بر تابع هدف و محدودیت ها تفسیر شود. شکل ۶ پایه های خطی برای تابع هدف $f(x)$ گرفته شده در نقاط x^1, x^2, x^3 را نشان می‌دهد.

توجه شود که پایه های خطی مماس های $f(x)$ در نقاط x^1, x^2 , x^3 هستند و تابع هدف را تخمین می‌زنند. همچنین توجه شود که تجمع نتایج این پایه های تخمین خطی درتقریب بهتری از تابع هدف $f(x)$ بواسطه بیرون (یعنی OA) است. همچنین توجه شود که تخمین های چون $f(x)$ بر حسب x محدب است، معتبر هستند.

شکل ۷ OA را برای منطقه موجهی شامل دو نامساوی خطی (یعنی g_3, g_4) و دو نامساوی غیر خطی (یعنی g_1, g_2) در نقطه x^l را نشان می‌دهد.

با داشتن موارد بالا در ذهن، مسئله اصلی برای OA می‌تواند بصورت هندسی به عنوان یک ساده سازی از MINLP اصلی که بصورت زیر تعریف شده است، تفسیر شود:

(i) Underestimating تابع هدف و

(ii) Overestimating منطقه موجه.

همینطور حل آن یک حد پایینی بر حل مسئله MINLP اصلی بوجود می‌آورد.

تبصره ۱۱) توجه شود که در هر تکرار k ما نیاز به اضافه کردن خطی سازیهایی برای قیدهای فعال در مسئله اصلی برای OA هستیم. این امر بر این دلالت دارد که مسئله اصلی ممکن است شامل تعداد زیادی قید به عنوان انجام تکرارها باشد. برای مثال، اگر داشته باشیم $Y = \{0,1\}^q$ و (۱۳) دارای m نامساوی باشد، مسئله اصلی باید دارای $2^q(m+1)$ قید باشد، برای اینکه دقیقاً با (۱۳) متناظر باشد. این امر، انگیزشی برای حل مسئله اصلی از طریق یک استراتژی ساده سازی را ایجاد می‌کند.

۴-۴- توسعه الگوریتمی

نقطه مرکزی در توسعه الگوریت می‌برای OA، حل مسئله اصلی است چون مسئله اصلی برای حل مسئله اولیه کاملاً سر راست است که یک مسئله غیر خطی محدب است.

رویکرد طبیعی برای حل مسئله اصلی، ساده سازی است. به این معنی که، در هر تکرار پایه های خطی از تابع هدف و قیدها در اطراف تمام نقاط خطی سازی قبلی ملاحظه شود. با این روش، در هر تکرار یک دسته جدید از قیدهای پایه خطی اضافه می‌شود که ساده سازی و بنابراین حد پایینی را ازایش می‌دهد.

۴-۴-۱- دستورات الگوریت می‌برای OA

گام ۱) یک نقطه اولیه $y^1 \in Y$ یا اگر ممکن باشد $Y \cap V$ بگیرید. مسئله اولیه $P(y^1)$ حاصله را حل کنید و یک حل بهینه x^l بدست آورید. شمارنده تکرار را $k=1$ تنظیم کنید. حد بالایی فعلی را $UBD = P(y^1) = v(y^1)$ تنظیم کنید.

گام ۲) مسئله اصلی ساده شده (RM) را حل کنید.

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,\mu_{OA}} & c^T y + \mu_{OA} \\ S.t. & \left.\begin{array}{l} \mu_{OA} \geq f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) \\ 0 \geq g(x^k) + \nabla g(x^k)(x - x^k) + By \end{array}\right\}, \forall k \in F \\ & x \in X \\ & y \in Y \bigcap V \\ \sum\limits_{i \in B^k} y_i^k - \sum\limits_{i \in N\,B^k} y_i^k \leq \left|B^k\right| - 1 \;\; , \;\; k = 1,2,\ldots,K-1 \end{cases}$$

اجازه دهید (y^{k+1}, μ_{OA}^k) حل بهینه برای مسئله اصلی ساده شده باشد، که $\mu_{OA} + c^T g^{k+1}$ حد پایینی فعلی جدید بر (۱۳) است. $LBD = \mu_{OA} + c^T y^{k+1}$ و y^{k+1} نقطه بعدی مطرح شده برای مسئله اولیه $P(y^{k+1})$ است.

اگر $UBD - LBD \leq \varepsilon$، الگوریتم پایان می‌یابد. در غیر اینصورت به گام ۱ باز می گردیم.

اگر مسئله جامع دارای یک حل موجه نباشد، الگوریتم پایان می‌یابد. حل بهینه بوسیله بالایی فعلی و بردارهای بهینه (x,y) وابسته به آن داده می‌شود.

تبصره ۱) توجه شود که در گام ۱ علی رقم انتخاب یک $y^1 \in Y$ یا $Y \bigcap V$ ، می‌توانیم ساده سازی پیوسته از (۱۳) (یعنی تلقی $0 \leq y \leq 1$) را حل کنیم و متغیرهای y را به نزدیکترین مقدار عدد صحیح گرد کنیم. با این روش، همچنین ممکن است که اولیه حاصله ناموجه باشد که دلالت بر این دارد که مطابق الگوریتم OAی فرض شده بوسیله Duran And Grossmann ، قادر هستیم این ترکیب ناموجه در مسئله اصلی ساده شده برای تکرار اول را حذف کنیم و از طریق یک y دیگر که متعلق به $Y \cap V$ است، ادامه دهیم. واضح است این نقطه که در مسئله اصلی ساده شده هیچ اطلاعاتی بوجود ن می‌آورد که بتواند به عنوان نقطه خطی سازی برای اینچنین حالتی مورد استفاده قرار گیرد، جدا از برش عدد صحیح است.

همانطور که در OA برای $v(y)$ شرح دادیم، Duran And Grossmann فرض $y \in Y$ را بجای $y \in Y \bigcap V$ ساختند وقیدهای برش عدد صحیح را معرفی کردند که ادعا کرده اند فرض خود را معتبر ساخته اند. اما Fletcher and Leyffer یک مثال شمارنده که بصورت زیر نشان داده شده است را معرفی کردند:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & -2y - x \\ S.t. & x^2 + y \leq 0 \\ & y \in \{-1,1\} \end{array}$$

که دارای حل زیر است:

$$(x^*, y^*) = (1, -1)$$

هدف برابر با ۱ است. اجازه دهید از $y^1=-1$ ، $x^1=2$ شروع کنیم. مسئله اصلی با توجه به Duran and Grossmann(1986a) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \quad -2y+\mu_{OA} \\ &S.t. \quad \mu_{OA}\ge -x \\ &\qquad 0\ge 1+2(x-1)+y \\ &\qquad y\in\{-1,1\}\bigcap y=-1 \end{aligned}$$

که دارای حل زیر است:

$$(y^2,-2y^2+\mu_{OA}^1)=(1,-2)$$

با ادامه به دیگر اولیه $P(y^2)$ تشخیص می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \quad -2-x \\ &S.t. \quad x^2+1\le 0 \end{aligned}$$

ناموجه است.

بنابراین، برش عدد صحیح در حذف ترکیبات غیرموجه ناموفق است. این مثال نشان می‌دهد که اطلاعات از مسائل اولیه ناموجه نیاز به حساب آوردن در مسائل اصلی دارد و اینکه نمایشی از قید

$$y\in Y\bigcap V$$

بر حسب پایه های خطی باید متناظر باشد. به عبارت دیگر، ما تمایل داریم مطمئن باشیم که ترکیبات عدد صحیحی که مسائل اولیه ناموجه را تولید می‌کنند، در مسئله اصلی نیز ناموجه باشند و بنابراین تولید نشوند.

Flecher and Leyffer نشان دادند که برای حالتی از مسائل اولیه ناموجه، قیدهای زیر که پایه های خطی برای این حالت هستند،

$$0\ge g(x^l)+\nabla g(x^l)(x-x^l)+By \qquad l\in\overline{F}$$

که $\overline{F}=\{j:P(y^l)\ \ \text{is infeasible and } x^l \text{ solves the feasibility problem}\}$

نیاز دارند تا در مسئله اصلی، هم ارز شوند. سپس، مسئله اصلی برای OA به شکل زیر در می‌آید:

$$\left\{\begin{aligned} &\min_{x,y,\mu_{OA}} \quad c^T y+\mu_{OA} \\ &S.t. \quad \left.\begin{aligned} \mu_{OA}&\ge f(x^k)+\nabla f(x^k)(x-x^k) \\ 0&\ge g(x^k)+\nabla g(x^k)(x-x^k)+By \end{aligned}\right\},\forall k\in F \\ &0\ge g(x^l)+\nabla g(x^l)(x-x^l)+By \quad \forall\, l\in\overline{F} \\ &\qquad x\in X \\ &\qquad y\in Y\bigcap V \end{aligned}\right.$$

همچنین نیاز است تا تغییرات مناسب در مسئله اصلی ساده شده، که در بخش طرز عمل الگوریت می‌توصیف شد، بوجود آید. همچنین توجه شود که فرمولاسیون فعلی از مسئله اصلی از طریق (۲۱) تعداد قیدها را افزایش می‌دهد.

۴-۴-۲- همگرایی محدود OA

برای مسئله (۱۳) Duran and Grossmann، همگرایی محدود OA را ایجاد کردند که در ۴-۴-۱ نشان داده شد و بصورت زیر است:

" اگر شرایط C1 و C2 و C3 پابرجا باشند و Y مجموعه ای گسسته باشد، OA در تعداد محدودی تکرار به پایان می‌رسد."

در ضمن ثابت کردند که مقایسه ای بین OA با V2-GBD ، همیشه دارای حاصل زیر است:

$$LBD_{OA} \geq LBD_{V2-GBD}$$

که LBD_{OA}, LBD_{V2-GBD} حدهای پایینی در تکرارهای متناظر از OA و V2-GBD هستند.

تبصره ۱) خاصیت ذکر شده برای حدود بسیار مهم است چون بر این امر دلالت دارد که OA برای مسائل محدب در تکرارهای کمتری نسبت به V2-GBD به پایان می‌رسد. توجه شود که این امر لزوماً بیان ن می کند که OA زودتر به پایان می‌رسد، چون مسئله اصلی ساده شده برای OA دارای تعداد زیادی قید به عنوان تکرارهای در حال انجام است، در حالیکه مسئله اصلی ساده شده برای V2-GBD تنها یک قید به ازای هر تکرار را اضافه می‌نماید.

۵- (OA/ER) Outer Approximation with Equality Relaxation

تقریب بیرونی با ساده سازی مساوی

۵-۱- فرمولاسیون

برای انجام دادن قیدهای مساوی غیر خطی صریح برای شکل $h(x)=0$، Kocis and Grossmann الگوریتم OA/ER را برای دسته مسائل MINLP زیر ارائه کرده اند:

$$\begin{aligned}
&\min_{x,y} \; c^T y + f(x) \\
&S.t. \; h(x) = 1 \\
&g(x) \leq 0 \\
&Cx + By \leq 0 \\
&x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \leq a_1\} \subseteq \Re^n \\
&y \in Y = \{y : y \in \{0,1\}^q, A_2 x \leq a_2\}
\end{aligned}$$

تحت شرط های زیر:

C1: X مجموعه ای محدب، فشرده و ناتهی است و توابع شرط ها را اغنا می کنند:

$$f(x)\ is\ convex\ in\ x$$
$$g_i(x)\ \ i\in I_{IN}=\{i:g_i(x)<0\}\ are\ convex\ in\ x$$
$$g_i(x)\ \ i\in I_{EQ}=\{i:g_i(x)=0\}\ are\ quasi-convex\ in\ x, and$$
$$Th(x)\ are\ quasi-convex\ in\ x$$

که T ماتریسی قطری (m×m) با عناصر t_{ii} است.

$$t_{ii}\begin{Bmatrix}-1 & if & \lambda_i<0\\ +1 & if & \lambda_i>0\\ 0 & if & \lambda_i=0\end{Bmatrix}\ \ i=1,2,...,m$$

و λ_i ضرایب لاگرانژ وابسته با m قید مساوی است.

C2: f و g و h بطور پیوسته قابل دیفرانسیل گیری هستند.

C3: یک صلاحیت قید در حل هر مسئله برنامه ریزی غیر خطی حاصله از (۲۱) بوسیله ثابت کردن y نگه داشته شود.

تبصره ۱) تساوی های غیر خطی $h(x)=0$ و دسته ای از تساوی های خطی که در $h(x)=0$ هستند، متناظر با بالانس های جرم وانرژی و معادلات طراحی برای سیستم های فرآیندهای شیمیایی هستند و می‌توانند بزرگ باشند. تا زمانی که قیدهای مساوی غیر خطی نتوانند بطور صریح تحت تأثیر بوسیله الگوریتم OA قرار گیرند، بعضی از گزینه های ممکن باید به اجرا در آیند:

(i) حذف جبری تساوی های غیر خطی.

(ii) حذف عددی تساوی های غیر خطی و

(iii) ساده سازی تساوی های غیر خطی به نامساوی ها.

گزینه (i) می‌تواند با موفقیت برای دسته های معینی از مسائل (بطور مثال طراحی فرآیندهای بَچ و طراحی خطوط لوله گاز) بکار روند. اما اگر تعداد قیدهای مساوی غیرخطی زیاد باشد، استفاده از روش حذف جبری یک گزینه عملی نیست.

گزینه (ii) شامل حذف عددی قیدهای مساوی غیرخطی در هر تکرار از الگوریتم OA از طریق خطی سازیهای آنها است. توجه شود با وجود آن که این خطی سازی ها ممکن است باعث مشکلاتی در محاسبات باشند چون ممکن است سبب تکینگی هایی وابسته به انتخاب متغیرهای تصمیم گیری باشند. علاوه بر مسئله پتانسیل برای تکینگی ها، حذف عددی قیدهای مساوی غیر خطی ممکن است سبب افزایش در عناصر غیر صفر شده و بنابراین باعث کاهش تفکیک پذیری شود، بطوریکه بوسیله Kocis and Grossmann نشان داده شده است.

محدودیت های ذکر شده برای گزینه های (i) و (ii) باعث افزایش انگیزه برای سرمایه گذاری بر گزینه (iii) شده است که پایه های الگوریتم OA/ER را بوجود آورده است.

تبصره ۲) توجه شود که شرط C1 از OA/ER شامل قیدهای اضافی برای شبه تحدب بر حسب x در $Th(x)$ and $g_i(x)=0 \quad i \in I_{EQ}$ است.

در ضمن توجه شود که ماتریس قطری T جهت را برای ساده سازی مساوی ها به نامساوی ها معرفی می‌کند و توقع می‌رود که چنین ساده سازی فقط بتواند تحت شرایط معینی معتبر باشد.

۵-۲- ایده پایه

ایده پایه در OA/ER ساده کردن قیدهای مساوی غیر خطی به تساوی ها و متعاقباً استفاده از الگوریتم OA است. ساده سازی تساویهای غیر خطی بر پایه علامت ضرایب لاگرانژ همراه با آنهاست، هنگا می‌که مسئله اولیه (۲۱) با y ثابت شده، حل می‌شود. اگر یک ضریب λ_i مثبت باشد، تساوی غیر خطی متناظر $h_i=0$ به صورت $h_i \le 0$ ساده می‌شود. اگر یک ضریب λ_i منفی باشد، تساوی غیر خطی بصورت $-h_i \le 0$ ساده می‌شود، اما اگر $\lambda_i=0$ باشد، قید مساوی غیر خطی وابسته بصورت $h_i=0$ نوشته خواهد شد که بر این دلالت دارد که می‌توانیم با توجه به این قید عمل حذف را انجام دهیم. با داشتن تساویهای غیر خطی تبدیل شده به نامساویها، در ادامه مسئله اصلی را بر اساس اصول رویکرد OAی بحث شده در بخش ۴ فرمولاسیون می‌کنیم.

۵-۳- توسعه تئوریکی

نظر به اینکه تنها تفاوت بین OA و OA/ER بر ساده سازی قیدهای مساوی غیر خطی به نامساوی ها قرار گرفته است، ما در این بخش کلید حاصل شده برای ساده سازی مسئله اصلی برای OA/ER را معرفی خواهیم کرد.

خاصیت ۵-۱

اگر شرایط C1 و C3 اغنا شده اند، پس برای $y=y^k$ ثابت شده مسئله (۲۲) متناظر با (۲۳) است.

$$\begin{aligned}
&\min_x \; c^T y^k + f(x) \\
&S.t. \; T^k h(x) \le 0 \\
&\qquad g(x) \le 0 \\
&\qquad Cx + By^k \le d \\
&\qquad x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n
\end{aligned}$$

که T یک ماتریس قطری (m×m) با عناصر t_{ii}^k است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$t_{ii}\begin{Bmatrix} -1 & if & \lambda_i < 0 \\ +1 & if & \lambda_i > 0 \\ 0 & if & \lambda_i = 0 \end{Bmatrix} \; i = 1,2,\dots,m$$

تبصره ۱) تحت قیدهای ذکر شده، مسائل اصلی برای (۲۲) و (۲۳) دارای حل های محلی یکتا هستند که در حقیقت حلهای جهانی مربوطه هستند چون شرایط KKT هر دو لازم وکافی هستند.

تبصره ۲) اگر شرط C1 اغنا نشده است، پس حل های یگانه بطور تئوریکی برای مسائل اولیه NLP تولید نشده است و در نتیجه مسائل اصلی حاصله ممکن است حدهای پایینی معتبری تولید نکنند. این امر بسبب خطای پتانسیل برای ابقای هم ارزی (۲۲) و (۲۳) است.

باید توجه شود که هم ارزی بین مسائلاولیه از (۲۲) و (۲۳) نیاز به نگهداری در هر تکرار دارند. این امر هنگا می‌بطور قطعی اتفاق می‌افتد که ضرایب لاگرانژ درسراسر تکرارهای k در علامت یکسان باشند و شرط C1 را در تکرار اول اغنا کنند.

تبصره ۳) بعد از ساده سازی مساویهای غیر خطی ما به یک دسته از نامساویهای افزایش یافته رسیدگی میکنیم:

$$T^k h(x) \le 0$$
$$g(x) \le 0$$

که برای اصول OA شرح داده شده در بخش ۴ قابل کاربرد است.

مثال ۵-۱- برای روشن کردن ساده سازی برای مساوی ها به نامساویها، ما مثال ساده زیر را از Kocis and Grossmann در نظر گرفته ایم:

$$\begin{aligned}
&\min \quad -y+2x+x_2 \\
&S.t. \quad x_1-2e^{-x_2}=0 \\
&\qquad -x_1+x+y \le 0 \\
&\qquad 0.5 \le x_1 \le 1.4 \\
&\qquad y=0,1
\end{aligned}$$

بوسیله ثابت کردن $y^1=0$ و حل مسئله اولیه حاصله که غیر خطی است، داریم:

$$\begin{aligned}
&OBJ = 2.558(x_1,x_2)=(0.853,0.853) \\
&(x_1,x_2)=(0.853,0.853) \\
&\lambda=-1.619<0
\end{aligned}$$

ما فقط یک قید مساوی داریم و بنابراین ضریب لاگرانژ آن λ، منفی است. پس ماتریس $t_{11}=-1$ آن است.

سپس مساوی ساده شده بصورت زیراست:

$$\begin{aligned}
&T^1 h(x) \le 0 \\
&-(x_1-2\exp(-x_2)) \le 0 \\
&2\exp(-x_2)-x_1 \le 0
\end{aligned}$$

تبصره ۴) توجه شود که مساوی ساده شده

$$2\exp(-x_2) - x_1 \le 0$$

بر حسب x_1 و x_2 محدب است و بنابراین شرط C1 اغنا شده است.

تبصره ۵) اگر بجای رویه ساده سازی نشان داده شده در بالا، از گزینه حذف جبری x_1 از قید مساوی را انتخاب کنیم، MINLP حاصله بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & -y + 4\exp(-x_2) + x_2 \\ S.t \quad & 2\exp(-x_2) + x_2 + y \le 0 \\ & 0.357 \le x_2 \le 1.386 \\ & y = 0,1 \end{aligned}$$

بوسیله انتخاب $y=0$ بصورتیکه در مثال نشان دادیم، مشاهده می‌کنیم که قید نامساوی در (۲۸) در حقیقت بر حسب x نامحدب است. بنابراین، کاربرد OA برای (۲۸) ن می‌تواند بهینگی جهانی را تضمین کند که بسبب داشتن غیر محدبی بر حسب x_2 است.

این مثال ساده به وضوح پتانسیل اشکال گزینه حذف جبری را اثبات می‌کند.

تبصره ۶) اگر ما x_2 را برای حذف جبری از قید مساوی استفاده کنیم، مسئله MINLP حاصله بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & -y + 2x_1 - 2\ln x_1 + \ln 2 + y \le 0 \\ S.t. \quad & -x_1 - \ln x_1 + \ln x_2 + \ln 2 + y \le 0 \\ & 0.5 \le x_1 \le 1.4 \\ & y = 0,1 \end{aligned}$$

توجه شود که در این حالت قید نامساوی بر حسب x_1 محدب است وبنابراین تابع هدف است.

بنابراین کاربرد OA می‌تواند حل جهانی آن را تضمین کند.

به عنوان یک پیشنهاد نهایی در مورد این مثال، باید توجه کنیم که هنگا می‌که حذف جبری بکار می‌رود، باید دقت زیادی شود به عنوان مثال برای نگهداری کردن تحدب و در اغلب حالات حفظ خصوصیات تفکیک پذیری.

۵-۳-۱- مسئله اصلی

مسئله اصلی الگوریتم OA/ER در اصل به همان صورت مسئله (۲۰) نشان داده شده در بخش ۴-۳-۲ است، با این تفاوت که بردار قیدهای نامساوی بوسیله اضافه کردن مساوی های ساده شده افزایش خواهد یافت.

$$T^k h(x) \le 0$$

حالت کلی از مسئله اصلی ساده شده برای الگوریتم OA/ER بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,\mu} \;\; \mu_{OA} \\ \left.\begin{aligned} S.t. \quad & \mu \ge f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) \\ & 0 \ge g(x^k) + \nabla g(x^k)(x - x^k) \\ & 0 \ge T^k[h(x^k) + \nabla h(x^k)^T (x - x^k)] \end{aligned}\right\}, \forall k = 1,2,\ldots,K \\ Cx + By \le d \\ x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n \\ y \in Y = \{y : y \in \{0,1\}^q, A_2 x \le a_2\} \\ \sum\limits_{i \in B^k} y_i^k - \sum\limits_{i \in N B^k} y_i^k \le \left|B^k\right| - 1 \;\;,\;\; k = 1,2,\ldots,K \\ Z_L^{k-1} \le c^T y + \mu \le Z_U \end{cases}$$

که Z_L^{k-1} حد پایینی در تکرار k-1 است و Z_U حد بالایی فعلی است و برای تسریع حل (۲۹) بکار می‌روند و ملاک پایان دهی داشتن ناموجهی است.

تبصره ۱) سمت راست سه دسته از قیدهای (۲۹) می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k)^T x - [\nabla f(x^k)^T x^k - f(x^k)] = (w^k)^T x - w_0^k \\ & \nabla g(x^k)^T x - [\nabla g(x^k)^T x^k - g(x^k)] = (S^k)x - s^k \\ & \nabla h(x^k)^T x - [\nabla h(x^k)^T x^k] = (R^k)x - r^k \\ & where \;\; w^k = \nabla f(x^k) \;,\; w_0^k = \nabla f(x^k)^T x^k - f(x^k) \\ & \qquad S^k = \nabla g(x^k) \;,\; s^k = \nabla g(x^k)^T x^k - g(x^k) \\ & \qquad R^k = \nabla h(x^k) \;,\; r^k = \nabla h(x^k)^T x^k \end{aligned}$$

توجه شود که $h(x^k) = 0$ است.

باید توجه شده باشد که $w^k, w_0^k, S^k, s^k, R^k, r^k$ بتوانند بسرعت با استفاده از عبارت های بالا، بعد از حل مسئله اولیه حل شوند. چون اطلاعات قبلی با حل مسئله اولیه در دسترس است.

تبصره ۲) سمت راست سه دسته اول قیدها، توابع پایه هستند که در نقطه فعلی x^k برای مسئله اولیه، بصورت تقریب های بیرونی یا خطی سازیها، نشان داده می شوند. اگر شرط C1 اغنا شده باشد این پایه ها تخمین های معتبری هستند و در نتیجه مسئله جامع ساده شده یک حد پایینی معتبر بر حل جهانی برای مسئله MINLP ایجاد می کند.

تبصره ۳) اگر قیدهای مساوی خطی بر حسب x در فرمول بندی MINLP وجود داشته باشند، این قیدها بصورت زیر مجموعه ای از $h(x)=0$ رفتا رمی کنند با این تفاوت که ما نیاز به محاسبه ماتریس T متناظر آنها نداریم اما به سادگی آنها را عنوان قیدهای مساوی در مسئله اصلی ساده شده، قرار می دهیم.

تبصره ۴) مسئله اصلی ساده شده یک مسئله MILP است که می تواند با برنامه های استاندارد branch and bound برای حل جهانی مربوط به خودش حل شود. همچنین توجه شود که اگر $f(x)$, $g(x)$, $h(x)=0$ بر حسب x خطی باشد، ما یک مسئله MILP خواهیم داشت. درنتیجه، تا زمانی که مسئله MILP باشد، OA/ER باید در دو تکرار حل شود.

۵-۴- توسعه الگوریتمی

الگوریتم OA/ER می تواند بصورت زیر نشان داده شود:

گام ۱) یک نقطه اولیه از $y^1 \in Y$ یا در صورت امکان $y^1 \in Y \bigcap V$ انتخاب کنید. مسئله اولیه --- حاصله را حل کنید و بهینه x^1 و بردار ضریب بهینه λ^1 را برای قیدهای مساوی $h(x)=0$ بدست آورید. حد بالایی فعلی را $UBD = P(y^1) = v(y^1)$ تنظیم کنید.

گام ۲) ماتریس T^k (m×m) را مشخص کنید. $w^k, w_0^k, S^k, s^k, R^k, r^k$ را محاسبه کنید.

گام ۳) مسئله اصلی ساده شده (RM) را حل کنید.

$$Z_L^K = \min_{x,y,\mu} \; c^T y + \mu$$

$$\begin{aligned}
S.t.\;\; & \left.\begin{aligned} &\mu \ge (w^k)^T x - w_0^k \\ &0 \ge (S^k)^T x - s^k \\ &0 \ge (R^k)^T x - r^k \end{aligned}\right\}, k = 1,2,\ldots,K \\
& Cx + By \le d \\
& x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n \\
& y \in Y = \{y : y \in \{0,1\}^q, A_2 x \le a_2\} \\
& \sum_{i \in B^k} y_i^k - \sum_{i \in NB^k} y_i^k \le \left|B^k\right| - 1 \;\;,\;\; k = 1,2,\ldots,K-1 \\
& Z_L^{k-1} \le c^T y + \mu \le Z_U
\end{aligned}$$

اگر مسئله اصلی ساده شده موجه باشد، (y^{k+1}, μ^k) را حل بهینه قرار دهید،که $Z_L^k \le c^T y^{k+1} + \mu^K$ حد پایینی جدید برای (۲۲) است و y^{k+1}، نقطه بعدی در نظر گرفته شده برای مسئله اولیه $P(y^{k+1})$ است.

اگر $UBD - Z_L^k \leq \varepsilon$،الگوریتم پایان می یابد. در غیر اینصورت به گام ۱ بر گردید.

اگر مسئله جامع ناموجه است، الگوریتم پایان می گیرد.

تبصره ۱) در حالت مسئله اولیه ناموجه، نیاز به حل یک مسئله موجه بودن داریم. یک راه فرمول بندی این مسئله موجه بودن بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min_x \quad \alpha \\ &S.t. \quad h(x)=0 \\ &\qquad g(x) \leq 0 \\ &\qquad Cx + By^k - d \leq \alpha \\ &\qquad x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \leq a_1\} \subseteq \Re^n \\ &\qquad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

توجه شود که در (۳۰) ما $h(x)=0$ و $g(x) \leq 0$ را نگه می داریم در حالکه اجازه می دهیم قید $Cx + By^k - d \leq \alpha$ بوسیله α که در تابع هدف مینیموم می کنیم،ساده شود. Kocis and Grossmann مسئله موجه بودن (۳۰) را حدس زدند و در ضمن آنها استفاده از ضرایب لاگرنژ همراه با قیدهای مساوی (۳۰) را برای تعیین ماتریس T^k، پیشنهاد کردند. اما در حالتی که مسئله (۳۰) دارای حل موجه نباشد، Kocis and Grossmann پیشنهادکرده اند که این ترکیب عدد صحیح را با یک برش عدد صحیح و حل مسئله اصلی ساده شده، رفع کردند. اما این امر ممکن است استفاده درستی از استدلال Fletcher and Leyffer نباشد.

تبصره ۲) با استدلال های مشابه ذیل برای الگوریتم OA، الگوریتم OA/ER به همگرایی محدود برای مینیموم جهانی می رسد بشرطی که C1 وC2 و C3 اغنا شوند.

تبصره ۳) Kocis and Grossmann یک فرمول بندی دیگر برای مسئله موجه بودن پیشنهاد کرده اند که در آن یک بخش جریمه ای به تابع هدف اضافه می شود که بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} &\min_x \quad c^T y + f(x) + p\alpha \\ &S.t. \quad h(x)=0 \\ &\qquad g(x) \leq \alpha \\ &\qquad Cx + By^k \leq \alpha \\ &\qquad x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \leq a_1\} \subseteq \Re^n \end{aligned}$$

یک حل موجه برای مسئله اولیه هنگامی وجود دارد که بخش جریمه به سمت صفر میل کند. اگر اولیه حل موجه نداشته باشد، حل مسئله (۳۱) متناظر با مینیموم سازی ماکزیموم خطا برای قیدهای نامساوی (خطی و غیر خطی بر حسب x) است. یک تحلیل کلی از گونه های مختلف مسئله موجه بودن در بخش ۳-۳-۱ نشان داده شد.

۵-۵- مثال

این مثال یک نسخه با اندکی اصلاح از یک مسئله طرح ریزی کوچک است که بوسیله Kocis and Grossmann بررسی شده است. نمایشی از گزینه ها در شکل ۸ برای تولید محصول نشان داده شده است.

C از مواد خام A و B، از طریق فرآیندهای I و II و III بدست می آید. محصول C می تواند از طریق فرآیند I، فرآیند I و II و فرآیند I و III تولید شود. فرآیندهای II و III نمی توانند بطور همزمان اتفاق بیافتند.

هزینه های سرمایه گذاری برای فرآیندها بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\text{Process } I: \quad 3.5y_1 + 2C, \\ &\text{Process } II: \quad 1.0y_2 + 1.0B_2, \\ &\text{Process } III: \quad 1.5y_3 + 1.2B_3, \end{aligned}$$

که y_1, y_2, y_3 متغیرهای دوتایی هستند که وجود یا عدم وجود فرآیندها را نشان می دهند. $B_2, B_3, and\ C, A, B$ جریان محصولات در فرآیندها هستند.

درآمد بصورت اختلاف فروش محصول C منهای هزینه مواد اولیه A و B بیان می شود.

$$\text{Revenue} = 13C - 1.8(A_2, A_3) - 7B_1,$$

تابع هدف مینیموم کردن هزینه ها منهای درآمد است که بشکل زیر است:

$$\begin{aligned} Objective &= Cost - \text{Revenue} \\ &= (3.5y_1 + 2C) + (y_2 + B_2) + (1.5y_3 + 1.2B_3) \\ &\quad -13C + 1.8(A_2, A_3) + 7B_1 \\ &= -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 \\ &\quad + 3.5y_1 + y_2 + 1.5y_3 \end{aligned}$$

موازنه های جرم برای گزینه های نمایش داده شده در شکل ۸ بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\text{Process } I: \quad C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0, \\ &\text{Process } II: \quad B_2 - \ln(1 + A_2) = 0, \\ &\text{Process } III: \quad B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) = 0, \end{aligned}$$

حدهای موجود بر هر فرآیند بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\text{Process } I: \quad C \le 1, \\ &\text{Process } II: \quad B_2 \le \frac{1}{0.9}, \\ &\text{Process } III: \quad B_3 \le \frac{1}{0.9}, \end{aligned}$$

توجه شود که تحمیل کردن حد بالای ۱ بر C، بطور اتوماتیک حدهای بالایی را بر B_2, B_3 اعمال می کند.

قیدهای منطقی برای فرآیندها بصورت زیر هستند:

$$\text{Process } I: \quad C \le 1 y_1,$$
$$\text{Process } II: \quad B_2 \le \frac{1}{0.9} y_2,$$
$$\text{Process } III: \quad B_3 \le \frac{1}{0.9} y_3,$$

همچنین ما قید عدد صحیح اضافی زیر را داریم:

$$y_2 + y_3 \le 1$$

پس مدل کامل ریاضی می تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 \\
& + 3.5y_1 + y_2 + 1.5y_3 \\
S.t. \quad & B_2 - \ln(1 + A_2) = 0, \\
& B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) = 0, \\
& C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0, \\
& C - 1y_1 \le 0, \\
& B_2 - \frac{1}{0.9} y_2 \le 0, \\
& B_3 - \frac{1}{0.9} y_3 \le 0, \\
& y_2 + y_3 \le 1 \\
& C, B_1, B_2, B_3, A_2, A_3 \ge 0 \\
& y_1, y_2, y_3 = 0,1
\end{aligned}$$

اجازه دهید با $y^1 = (1,1,0)$ شروع کنیم. پس مسئله اولیه بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 + 4.5 \\
S.t. \quad & B_2 - \ln(1 + A_2) = 0, \\
& B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) = 0, \\
& C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0, \\
& C - 1 \le 0, \\
& B_2 - \frac{1}{0.9} \le 0, \\
& B_3 \le 0, \\
& C, B_1, B_2, B_3, A_2, A_3 \ge 0
\end{aligned}$$

و دارای حل زیر است:

$$C = 1$$
$$B_1 = 0$$
$$B_2 = (1/0.9) = 1.11111,$$
$$B_3 = 0$$
$$A_2 = 2.037732$$
$$A_3 = 0$$
$$Obj = -1.72097$$

ضرایب برای دو قید مساوی غیر خطی بصورت زیر هستند:

$$\lambda_1 = 5.46792$$
$$\lambda_2 = 0$$

تا زمانی که هر دوی λ_1, λ_2 غیر منفی هستند، تساوی های غیر خطی می توانند بصورت زیر ساده شوند:

$$B_2 - \ln(1 + A_2) \le 0$$
$$B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) \le 0$$

توجه شود که هر دوی آنها محدب هستند و بنابراین شرط C1 برای $T^1 h(x) \le 0$ اغنا می شود.

برای استنتاج کردن خطی سازیهای اطراف حل x^1 از مسئله اولیه، ما فقط نیاز به در نظر گرفتن دو مساوی غیر خطی ساده شده بصورت زیر داریم:

$$B_2 - [\ln(1 + 2.03773) + \frac{1}{1 + 2.03773}(A_2 - 2.03773)] \le 0$$
$$B_3 - 1.2[\ln(1 + 0) + \frac{1}{1 + 0}(A_3 - 0)] \le 0$$

و شکل زیر را می‌گیرد:

$$B_2 - 0.329193 A_2 - 0.440303 \le 0$$
$$B_3 - 1.2 A_3 \le 0$$

سپس مسئله اصلی ساده شده به شکل زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3.5y_1 + y_2 + 1.5y_3 + \mu \\
S.t. \quad & \mu \geq -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 \\
& 0 \geq B_2 - 0.329193\,A_2 - 0.440303 \\
& 0 \geq B_3 - 1.2A_3 \\
& C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0 \\
& C - 1y_1 \leq 0 \\
& B_2 - \frac{1}{0.9}y_2 \leq 0, \\
& B_3 - \frac{1}{0.9}y_3 \leq 0, \\
& y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3 = 0,1
\end{aligned}
$$

که دارای حل زیر است:

$$
\begin{aligned}
& y_1 = 1, \\
& y_2 = 0, \\
& y_3 = 1, \\
& C = 1, \\
& B_1 = 0, \\
& B_2 = 0, \\
& B_3 = (1/0.9) = 1.111111, \\
& A_2 = 0, \\
& A_3 = 0.925926, \\
& \mu = -8 \\
& OBJ = -3
\end{aligned}
$$

بنابراین، بعد از تکرار اول داریم:

$$
\begin{aligned}
& UBD = -1.72097 \\
& LBD = -3 \\
& y^2 = (1,0,1)
\end{aligned}
$$

با حل کردن مسئله اولیه با $y^2 = (1,0,1)$ به فرمول بندی زیر می رسیم:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 + 5.0 \\
S.t. \quad & B_2 - \ln(1 + A_2) = 0, \\
& B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) = 0, \\
& C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0, \\
& C - 1 \le 0 \\
& B_2 - 0 \le 0 \\
& B_3 \le 0 \\
& C, B_1, B_2, B_3, A_2, A_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

که دارای حل زیر است:

$$
\begin{aligned}
& C = 1, \\
& B_1 = 0, \\
& B_2 = 0, \\
& B_3 = (1/0.9) = 1.111111, \\
& A_2 = 0, \\
& A_3 = 1.5242, \\
& OBJ = -1.9231(\textit{New Upper Bound})
\end{aligned}
$$

ضرایب برای دو قید مساوی غیر خطی بصورت زیر هستند:

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1 = 0, \\
& \lambda_2 = 3.7863,
\end{aligned}
$$

تا زمانی که هر دوی λ_1, λ_2 غیر منفی هستند می توانیم مساوی های غیر خطی را بصورت زیر ساده نماییم:

$$
\begin{aligned}
& B_2 - \ln(1 + A_2) \le 0, \\
& B_3 - 1.2\ln(1 + A_3) \le 0,
\end{aligned}
$$

که محدب بوده و بنابراین شرط C1 را اغنا می کنند.

خطی سازی های اطراف حل مسئله اولیه در تکرار دوم بصورت زیر هستند:

$$
\begin{aligned}
& B_2 - A_2 \le 0, \\
& B_3 - 0.475398A_3 - 0.386507 \le 0
\end{aligned}
$$

پس مسئله اصلی ساده شده برای دومین تکرار شکل زیر را بخود می گیرد:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3.5y_1 + y_2 + 1.5y_3 + \mu \\
S.t. \quad & \mu \geq -11C + 7B_1 + B_2 + 1.2B_3 + 1.8A_2 + 1.8A_3 \\
& 0 \geq B_2 - 0.329193\,A_2 - 0.440303 \\
& 0 \geq B_3 - 1.2A_3 \\
& 0 \geq B_2 - A_2 \\
& 0 \geq B_3 - 0.475398A_2 - 0.386507 \\
& C - 0.9(B_1 + B_2 + B_3) = 0 \\
& C - 1y_1 \leq 0 \\
& B_2 - \frac{1}{0.9}y_2 \leq 0, \\
& B_3 - \frac{1}{0.9}y_3 \leq 0, \\
& y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_3 - y_2 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3 = 0,1 \\
& -3 \leq 3.5y_1 + y_2 + 1.5y_3 + \mu \leq -1.9231
\end{aligned}
$$

که دارای حل موجه نیست و بنابراین الگوریتم با بدست آوردن حل بهینه مسئله اولیه در تکرار دوم به پایان خواهد رسید.

$$OBJ = -1.9231, \qquad y = (1,0,1)$$

Outer Approximation with Equality Relaxation and Augmented Penalty(OA/ER/AP)

تقریب بیرونی با ساده سازی مساوی و جریمه اضافه شده

الگوریتم OA/ER که در بخش ۵ توضیح داده شد، بر اساس فرض تحدب برای توابع $f(x), g(x)$ شبه-تحدب برای تساوی های مساوی شده $T^k h(x)$ بود. تحت این فرض (به شرط های C1 و C2 و C3 در بخش ۵-۱ توجه شود)، الگوریتم OA/ER از لحاظ تئوریکی برای شناسایی حل بهینه جهانی تضمین شده است. اما اگر شرط C1 در نظر گرفته نشود، مسائل NLP اولیه به یک حل محلی می رسند، تناظر برای تساویهای غیر خطی با محموعه ساده شده از نامساوی ها ممکن است نگه داشته نشود و خططی سازیها برای تابع هدف $f(x)$ ، تساوی های ساده شده $T^k h(x)$ و نامساوی های $g(x)$ ممکن است توابع اصلی را تخمین نزنند وبنابر این ممکن است بخش هایی از منطقه موجه مسئله اصلی بریده شود. این به آن مفهوم است که ترکیبات ۰-۱ کاندید شده، که به منطقه موجه بریده شده توسط توابع پایه نامعتبر (یعنی خطی سازیها) تعلق دارند، ممکن است از بررسی های آینده حذف شوند و بنابراین تنها حل های زیر بینه شناسایی خواهند شد.

Viswanathan and Grossmann الگوریتم OA/ER/AP را معرفی کردند که یک نوع از الگوریتم OA/ER است، با این هدف اصلی که از محدودیتهای تحمیل شده بوسیله فرض تحدب در الگوریتم OA/ER اجتناب شود.

۱- فرمول بندی

الگوریتم OA/ER/AP همان فرمول بندی OA/ER را نشان می دهدکه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{x,y}\ & c^T y + f(x) \\ S.t.\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \ge 0 \\ & Cx + By \le d \\ & x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n \\ & y \in Y = \{y : y \in \{0,1\}^q, A_2 x \le a_2\} \end{aligned}$$

تحت شرایط زیر:

C1: f و h و g بطور پیوسته قابل تشخیص هستند.

C2: صلاحیت قید در هر حل برای هر مسئله برنامه ریزی غیر خطی حاصله از (۳۳) بوسیله ثابت کردن y ، نگه داشته می شود.

تبصره ۱) توجه شود که شر طهای C1 و C2 متناظر با شرط های C2 و C3 از الگوریتم OA/ER هستند. همچنین توجه شود که چون فرض تحدب بکار نرفته است، حتی متناظر از تساویهای غیر خطی برای تساویهای ساده شده $T^k h(x)$ ممکن است معتبر نباشد.

۲-۱- ایده پایه

چون فرض تحدب در الگوریتم OA/ER/AP بکار نرفته است پس (i) تناظر برای --- و $T^k h(x) \le 0$ ممکن است نگه داشته نشود. (ii) خطی سازیها ممکن است پایه های معتبری را نمایش ندهد و (iii) مسئله اصلی ممکن است حد پایینی بر حل (۳۳) را تولید نکند.

ایده پایه در الگوریتم OA/ER/AP آدرس دهی به محدودیتهای (i) و (ii) و (iii) بوسیله ساده کردن خطی سازیها در مسئله اصلی است که این کار بوسیله اجازه دادن به آنها برای نقض شرایط و استفاده از یک رویکرد جریمه ای که این نقض کردن های توابع پایه را جریمه می کند، انجام می شود. سر پیچی از خطی سازیها بوسیله معرفی متغیرهای کمکی اجازه داده شده است، در حالیکه جریمه برای سرپیچی، بصورت اضافه کردن مجموعه ای از شرایط در تابع هدف تعریف می شود که شامل متغیرهای کمکی ضرب شده در ضرایب وزنی مثبت است. در این روش، بدلیل

ساده سازی قیدها، منطقه موجه گسترش یافته است و بنابراین امکان کندن بخشی از منطقه موجه بسبب خطی سازیهای نامعتبر کاهش می یابد.

تبصره ۱) مهم است توجه شود که چنین رویکردی دارای تضمین تئوریکی برایحذف نکردن بخشی از منطقه موجه نیست و در نتیجه تخمین حل بهینه جهانی نمی تواند تضمین شود.

۳- توسعه تئوریکی

چون تفاوت اصلی بین OA/ER و OA/ER/PA در فرمول بندی مسئله اصلی است، در این بخش به معرفی فرمول بندی مسئله جامع خواهیم پرداخت.

۳-۱- مسئله اصلی

مسئله اصلی ساده شده برای OA/ER/PA بر اساس مسئله اصلی ساده شده برای OA/ER است و بشکل زیر می باشد:

$$
\begin{cases}
Z_L^K = \min\limits_{x,y,\mu} \; c^T y + \mu + \sum\limits_{k} w_k^0 s_k^0 + \sum\limits_{i,k} w_{i,k}^P p_{i,k} + \sum\limits_{i,k} w_{i,k}^q q_{i,k} \\
\left.\begin{aligned} S.t.\quad & \mu + s_k^0 \ge f(x^k) + \nabla f(x^k)(x-x^k) \\ & Pk \ge g(x^k) + \nabla g(x^k)(x-x^k) \\ & qk \ge T^k[h(x^k) + \nabla h(x^k)^T (x-x^k)] \end{aligned}\right\}, k=1,2,\dots,K \\
Cx + By \le d \\
x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n \\
y \in Y = \{y : y \in \{0,1\}^q, A_2 x \le a_2\} \\
\sum\limits_{i \in B^k} y_i^k - \sum\limits_{i \in N B^k} y_i^k \le \left|B^k\right| - 1 \;\;, \;\; k = 1,2,\dots,K-1 \\
s_k^0, p_{i,k}, q_{i,k} \ge 0, \qquad\qquad k = 1,2,\dots,K
\end{cases}
$$

که $p_k = \{p_{i,k}\}$ اسکالرهای کمکی مثبت هستند و $q_k = \{q_{i,k}\}$ بردارهایی از متغیرهایکمکی مثبت و $w_0^k, w_{i,k}^p, w_{i,k}^q$ وزن های متغیرهای کمکی $s_k^0, p_{i,k}, q_{i,k}$ هستند که متعاقباً روابط زیر را اغنا می کنند.

$$
\begin{aligned}
w_k^0 &\ge |\overline{\mu}_k|, \\
w_{i,k}^P &\ge |\lambda_{i,k}|, \\
w_{i,k}^q &\ge |\mu_{i,k}|,
\end{aligned}
$$

که $\mu_{i,k}$ ، $\lambda_{i,k}$ و $\overline{\mu}_k$، ضرایب لاگرانژ مسئله اولیه برای $y = y^k$ هستند که بصورت زیر نوشته می شوند:

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^T y^k + \mu \\
S.t. \quad & f(x^k) - \mu \le 0 \leftarrow \overline{\mu}_k \\
& h(x) = 0 \leftarrow \lambda_k \\
& g(x) \le 0 \leftarrow \mu_k \\
& Cx + By^k \le d \\
& x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n
\end{aligned}
$$

Viswanathan and Grossmann خاصیت زیر را نشان داده اند:

خاصیت ۱

اگر (x^k, μ) یک نقطه KKT از (۳۵) باشد، سپس یک نقطه KKT برای مسئله اصلی در $y = y^k$ نیز خواهد بود.

۴- توسعه الگوریتم

الگوریتم OA/ER/PA می تواند بصورت زیر نشان داده شود:

گام ۱) مسئله NLP ساده شده از (۳۳) را (یعنی متغیرهای y بصورت پیوسته با قید $0 \le y \le 1$ عمل کنند) برای بدست آوردن (x^0, y^0)، حل کنید اگر y^0 یک ترکیب ۰-۱ بود،الگوریتم را پایان دهید. در غیر اینصورت به گام ۲ بروید.

گام ۲) مسئله اصلی ساده شده (۳۴) را برای رسیدن به y^1 حل کنید.

گام ۳) مسئله اولیه $P(y^1)$ را حل کنید (یعنی مسئله (۳۵)) تا حد بالایی $UBD = P(y^1)$ بعلاوه ضرایب لاگرانژ را بدست آورید.

گام ۴) ماتریس T^k (m×m) را تشخیص دهید.

گام ۵) مسئله اصلی ساده شده (۳۴) را برای تخمین y^{k+1} و حد پایینی بر (۳۳) که بصورت Z_L^K معرفی شده است را حل کنید.

گام ۶) گام های ۳و۴و۵ را تا وقتی که در مقدار بهینه مسائل NLP موجه اولیه افزایش وجود دارد، ادامه دهید

تبصره ۱) توجه شود که گام ۱ از الگوریتم OA/ER/PA به یک ترکیب اولیه ۰ – ۱ نیاز ندارد اما در عوض ممکن است یک ترکیب را بوسیله حل یک مسئله ساده شده NLP و متعاقباً حل مسئله اصلی ساده شده، تولید کند. چنین رویه ای می تواند در GBD، OA و OA/ER بکاربرده شود.

تبصره ۲) توجه شود که الگوریتم می تواند در گام اول متوقف شود اگر یک ترکیب ۰–۱ بوسیله مسئله NLP ساده شده از (۳۳) تعیین شود. اما باید تأکید شود که چون NLPساده شده هیچ خاصیت تحدبی را بر حسب x اغنا نمی کند، حل بدست آمده اگر یک ترکیب ۰–۱ برای نتغیرهای y تعیین شده باشد، می تواند محلی باشد.

تبصره ۳) در حالتی که یک مسئله اصلی ساده شده یک ترکیب ۰–۱ y^{k+1} تولید می کند که برای مسئله اولیه ناموجه است، Viswanathan and Grossmann دو گزینه زیر پیشنهاد شده است:

گزینه (i): نادیده گرفتن حل اولیه ناموجه x^{k+1} و معرفی یک برش عدد صحیح که ترکیب y^{k+1} را نادیده گرفته و حل دوباره مسئله اصلی ساده شده تا جایی که بتوانید یک y بدست آورید که در آن مسئله اولیه موجه باشد.

گزینه (ii): اضافه کردن خطی سازیهایی اطراف نقطه پیوسته موجه در مسئله اصلی ساده شده. توجه شود که برای بحث کردن مسئله اصلی ساده شده نیاز به داشتن اطلاعاتی در مورد ضرایب لاگرانژ داریم. برای بدست آوردن چنین اطلاعاتی، نیاز به حل یک مسئله موجه بودن است و Viswanathan and Grossmann یک فرمول بندی برای مسئله موجه بودن پیشنهاد کرده اند که بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min_{X,\alpha}\quad & c^T y^k + f(x) + p\alpha \\
S.t.\quad & h(x) = 0 \\
& g(x) \le 0 \\
& Cx + By^k - d \le 0 \\
& x \in X = \{x : x \in \Re^n, A_1 x \le a_1\} \subseteq \Re^n \\
& \alpha \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\alpha = 0$$

که P یک پارامتر جریمه است و α یک متغیر کمکی فقط برای قیدهای نامساوی است. اگر حل (۳۶) دارای $\alpha = 0$ باشد، اولیه دارای یک حل موجه است. توجه شود که (۳۶) هیچ فرض تحدبی را اغنا نمی کند و اینچنین است که می توان فقط به یک حل محلی رسید.

تبصره ۴) ملاک توقف در گام ۶ بر اساس رسیدن به یک مقدار بزرگتر در مسائل اولیه برای تکرارهای متوالی است. اما هیچ دلیل تئوریکی وجود ندارد که این امر ملاکی برای توقف باشد چون مسائل اولیه بوسیله تعریفشان نیازی به اغنای هیچ نوع خاصیت یکنواخت بودن را ندارند (یعنی آنها نیازی به غیر صعودی بودن ندارند). بر اساس موارد بالا،

این ملاک توقف می تواند تنها به عنوان یک ابتکار باشد و ممکن است یک توقف نابهنگام برای الگوریتم OA/ER/PA باشد. بنابراین الگوریتم OA/ER/PA می تواند برای معرفی حل جهانی برای مسئله MINLP (۳۳) شکست بخورد.

۵- مثال

این مسئله نسخه ای اصلاح شده از مثال گرفته شده از Kocis and Grossmann است و دارای فرمول بندی زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0.7y + 5(x_1 - 0.5)^2 + 0.8 \qquad (6.37) \\ S.t. \quad & -\exp(x_1 - 0.2) - x_2 \le 0 \\ & x_2 + 1.1y \le -1 \\ & x_1 - 1.2y \le 1.2 \\ & 0.2 \le x_1 \le 1 \\ & -2.22554 \le x_2 \le -1 \\ & y = 0,1 \end{aligned}$$

این مسئله دارای تابع هدف محدب است اما در مجموع غیر محدب است ، چون اولین قید آن بر حسب x_1 مقعر است.

اجازه دهید در ابتدا NLP ساده شده از (۳۳) را بصورت زیر نشان دهیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0.7y + 5(x_1 - 0.5)^2 + 0.8 \qquad (6.38) \\ S.t. \quad & -\exp(x_1 - 0.2) - x_2 \le 0 \\ & x_2 + 1.1y \le -1 \\ & x_1 - 1.2y \le 1.2 \\ & 0.2 \le x_1 \le 1 \\ & -2.22554 \le x_2 \le -1 \\ & 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

که دارای حل زیر است:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.594 \\ x_2 &= -1.4829 \\ y &= 0.44 \\ OBJ &= 0.53618 \end{aligned}$$

و نامساوی اول با ضریب زیر فعال است:

$$\mu_1 = 0.636$$

با خطی کردن بخش غیر خطی $(x_1 - 0.5)^2$ تابع هدف و نامساوی غیر خطی اول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \mu \ge 5[(0.594 - 0.5)^2 + 2(0.544 - 0.5)(x_1 - 0.594)] + 0.8 \\ & 0 \ge -[\exp(0.594 - 0.2) + \exp(0.544 - 0.2)(x_1 - 0.594)] - x_2 \end{aligned}$$

که بصورت زیر است:

$$\mu \ge 0.94x_1 + 0.28582$$
$$0 \ge -1.4829\,x_1 - x_2 - 0.60206.$$

حال متغیرهای کمکی را معرفی می کنیم:

$$s_1^0 \;\; and \;\; p_{1,1}$$

برای دوبار خطی سازی و تنظیم وزنها برای تابع هدف داریم:

$$w_1^0 = 1000$$
$$w_{1,1}^0 = 1000 \times 0.636 = 636$$

پس مسئله اصلی ساده شده بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
&\min \quad -0.7\,y + \mu + 1000\,s_1^0 + 636\,p_{1,1} \\
&S.t. \quad \mu + s_1^0 \ge 0.94\,x_1 + 0.28582 \\
&p_{1,1} \ge -1.4829\,x_1 - x_2 - 0.60206 \\
&x_2 + 1.1y \le -1 \\
&x_1 - 1.2\,y \le 0.2 \\
&0.2 \le x_1 \le 1 \\
&-2.22554 \le x_2 \le -1 \\
&y = 0,1 \\
&s_1^0 \,,\, p_{1,1} \ge 0
\end{aligned}$$

حل (۳۹) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&y = 1 \\
&x_1 = 1 \qquad\qquad s_1^0 = 0 \\
&x_2 = -2.1 \quad\; p_{1,1} = 0.0159 \\
&Z_L^1 = 10.638
\end{aligned}$$

با حل مسئله اولیه برای $y = y^1 = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2} \;\; 5(x_1 - 0.5)^2 + 0.1 \\
&S.t. \;\; -\exp(x_1 - 0.2) - x_2 \le 0 \\
&\qquad x_2 \le -2.1 \\
&\qquad x_1 \le 1.4 \\
&\qquad 0.2 \le x_1 \le 1 \\
&\qquad -2.22554 \le x_2 \le -1
\end{aligned}$$

و حل زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0.94294 \\
&x_2 = -2.1 \\
&OBJ = 1.07654
\end{aligned}$$

با $\mu_1 = 2.104$ ، خطی سازیها برای تابع هدف و قید اول بصورت زیر است:

$$\mu \geq 4.42\,x_1 - 2.3868$$
$$0 \geq -2.1x_1 - x_2 - 2.2222.$$

با معرفی $s_2^0, p_{1,2}$ و وزنها بصورت زیر

$$w_2^0 = 1000$$
$$w_{1,2}^p = 1000 \times 2.104 = 2104$$

مسئله اصلی بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
Z_L^2 = \min \quad & -0.7y + \mu + 1000\,s_1^0 + 636\,p_{1,1} + 2104\,p_{1,2} \\
S.t. \quad & \mu + s_1^0 \geq 0.94\,x_1 + 0.28582 \\
& \mu + s_2^0 \geq 4.42\,x_1 - 2.3868 \\
& p_{1,1} \geq -1.4829\,x_1 - x_2 - 0.60206 \\
& p_{1,2} \geq -2.1x_1 - x_2 - 0.2222 \\
& x_2 + 1.1y \leq -1 \\
& x_1 - 1.2\,y \leq 0.2 \\
& 0.2 \leq x_1 \leq 1 \\
& -2.22554 \leq x_2 \leq -1 \\
& y = 0,1 \\
s_1^0\,, s_2^0\,, p_{1,1}\,, p_{1,2} \geq 0 &
\end{aligned}$$

که دارای حل زیر است:

$$\begin{aligned}
& y^2 = 0 \\
& x_1 = 0.2 \qquad s_1^0 = s_2^0 = 0 \\
& x_2 = -1 \qquad p_{1,1} = 0.1015, \;\; p_{1,2} = 0.4582, \\
& Z_L^2 = 1.029.08
\end{aligned}$$

با حل مسئله اولیه برای $y = y^2 = 0$ به

$$x_1 = 0.2$$
$$OBJ = 1.25$$

خواهیم رسید، چون $P(y^2) > P(y^1)$ توقف می کنیم. حل بهینه بدست آمده بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
& y = 1 \\
& x_1 = 0.94194 \\
& x_2 = -2.1 \\
& OBJ = 1.07654
\end{aligned}$$

۷– Generalized Outer Approximation (GOA)

تقریب بیرونی تعمیم یافته

۷-۱- فرمول بندی

Fletcher and Leyffer رویکرد OA را برای دسته ای از مسائل بهینه یابی که بصورت زیر نشان داده شده اند را تعمیم دادند.

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x,y) \\ S.t. \quad & g(x,y) \le 0 \\ & x \in X \subseteq \Re^n \\ & y \in Y = \{0,1\} \end{aligned}$$

تحت شرط های زیر :

C1: X مجموعه ای محدب، فشرده و ناتهی است و توابع زیر حدب هستند:

$$\begin{aligned} f &: \Re^n \times \Re^q \to \Re \\ g &: \Re^n \times \Re^q \to \Re^p \end{aligned}$$

C2: f و g بطور پیوسته قابل تشخیص هستند.

C3: یک صلاحیت ملاک (بطور مثال Slater's) در حل برای هر مسئله برنامه ریزی غیر خطی حاصله از (۴۰) بوسیله ثابت کردن y، نگه داشته می شود.

تبصره ۱) مسئله (۴۰) اجازه می دهد غیر خطی بودن های موجود در متغیرهای ۰-۱، بطور مستقیم بحث شوند و همینطور این امر شامل دسته ای از مسائل برنامه ریزی غیر خطی ۰-۱ خالص نیز می شود. همچنین توجه شود که Fletcher and Leyffer فرض کرده اند که y عدد صحیح باشد در حالیکه ما بر اساس تبصره ۱ از بخش ۱، y را بصورت متغیرهای ۰-۱ معرفی کرده ایم.

تبصره ۲) توجه شود که در مسئله (۴۰) هیچ فرضی برای تفکیک پذیری بر حسب x و y یا خطی بودن بر حسب y ساخته نشده است. از این نقطه نظر، مسئله (۴۰) تحت شرطهای C1 تا C3، تعمیم یافته مسئله (۱۳) تحت فرض های مربوطه می باشد.

۷-۲- ایده پایه

ایده پایه در GOA شبیه به OA است، با تفاوت اساسی در (i) توقف برای ناموجهی ها، (ii) فرمول بندی جدید برای مسئله اصلی که به ناموجهی ها بطور صریح رسیدگی می کند و (iii) توقف یکپارچه شده برای توابع جریمه دقیق.

۷–۳– توسعه تئوریکی

۷–۳–۱– توقف ناموجهی ها در مسائل اولیه

اگر مسئله اولیه $P(y^k)$ ناموجه باشد، مسئله موجه بودن کلی زیر بوسیله Fletcher and Leyffer ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i\in I'} w_i g_i^+(x,y^k) \\ S.t. \quad & g_i(x,y^k) \quad i\in I \\ & x\in X \end{aligned}$$

که $y=y^k$ ، y ثابت شده است، y و w وزن ها هستند، $g_i^+(x,y^k)=\max[0,g_i(x,y^k)]$ ، I دسته قید های نامساوی موجه است و I' دسته قیدهای نامساوی ناموجه است.

تبصره ۱) توجه شود که مسئله موجه بودن کلی (۴۱) در تابع هدف یک جمع دارد که فقط بر روی قیدهای نامساوی غیرموجه عمل می کند. Fletcher and Leyffer خاصیت مهم زیر را برای مسئله (۴۱) ثابت کرده اند.

لم ۷–۱) اگر مسئله اولیه $P(y^k)$ ناموجه باشد، بنابراین x^k مسئله (۴۱) را حل می کنیم و داریم:

$$\sum_{i\in I'} w_i g_i^+(x,y^k) > 0$$

سپس $y=y^k$ در قیدهای زیر ناموجه است:

$$\left.\begin{aligned} 0\ge g_i(x^k,y^k)+\nabla g_i(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\ y-y^k\end{pmatrix}, \quad \forall i\in I' \\ 0\ge g_i(x^k,y^k)+\nabla g_i(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\ y-y^k\end{pmatrix}, \quad \forall i\in I \end{aligned}\right\} \quad \forall x\in X.$$

تبصره ۲) توجه شود که قیدهای ذکر شده در بالا خطی سازیهایی برای قیدهای نامساوی غیر خطی در اطراف نقطه (x^k,y^k) هستند. پس خاصیت بالا می گوید که ناموجهی در مسئله اولیه $P(y^k)$ بر این دلالت دارد که برش های خطی از نامساوی های موجه و ناموجه در اطراف (x^k,y^k) نقض شده هستند.

۷–۳–۲– مسئله اصلی

Fletcher and Leyffer ادعا کردند که مسئله اصلی ارائه شده توسط Duran and Grossmann ناموجهی های موجود در مسائل اولیه را محاسبه نمی کنند و مسئله اصلی برای GOA را بر اساس همان ایده ها برای

(i) تصویر (۴۰) بر صفحه y و

(ii) تقریب بیرونی از تابع هدف و منطقه موجه اما به علاوه استفاده از خاصیت اصلی بحث شده در بخش ۷-۳-۱ برای درست بحث کردن در مورد مسائل اولیه ناموجه، این امر با عنوان نمایش V از طریق تقیب بیرونی (OA) نامیده می شود.

(i) تصویر فرمول (۴۰) در فضای y

مسئله (۴۰) می تواندبصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\min_x \ \min_y \ f(x,y) \\ &S.t. \quad g(x,y) \le 0 \\ &\qquad\quad x \in X \\ &\qquad\quad y \in Y \end{aligned}$$

توجه شود که مسئله داخلی با توجه به x تا زمانی که بسبب فرض فشردگی برای مجموعه X بیه اینفیموم برسد، بصورت مینیموم نوشته می شود.

اجازه دهید $v(y)$ را مشخص کنیم

$$\begin{aligned} &v(y) = \min_x \ f(x,y) \\ &S.t. \quad g(x,y) \le 0 \\ &\qquad\quad x \in X \end{aligned}$$

همچنین اجازه دهید مجموعه V از y ها را برای حل موجه موجود در متغیرهای x بصورت زیر مشخص کنیم:

$$V = \{ y : g(x,y) \le 0 \ \ for \ \ some \ \ x \in X \}$$

پس مسئله (۴۰) می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &\min_y \quad v(y) \\ &S.t. \quad y \in Y \bigcup V \end{aligned}$$

تبصره ۱) مسئله (۴۰) تصویر (۴۰) بر فضای y است. تصویر باید از احتیاجات موجه بودن پیروی کند که در (۴۵) بوسیله تحمل کردن $y \in Y \bigcup V$ نشان داده شده است.

تبصره ۲) $v(y)$ و V بطور صریح شناخته می شوند و برای چیره شدن بر این مشکل Fletcher and Leyffer طرز نمایش خود را در (۴۵) از طریق تقریب بیرونی نشان داده اند.

(ii) تقریب بیرونی $v(y)$

نظر به اینکه صلاحیت قید (شرط ۳) در حل هر مسئله اولیه $P(y^k)$ برای هر $y^k \in Y \bigcup V$ نگه داشته می شود، مسئله تصویر (۴۵) دارای همان حل بصورت مسئله زیر است:

$$\min_{y}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & f(x^k,y^k)+\nabla f(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\0\end{pmatrix}\\ S.t. & g(x^k,y^k)+\nabla g(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\0\end{pmatrix}\\ x\in X & \\ & \end{array}\right]\\ y\in Y\bigcap V\end{array}\right.$$

تبصره ۳) توجه شود که مسئله داخلی در (۴۶)، $v(y)$ همرا با تابع هدف خطی شده و قیدهای خطی شده در اطراف x^k است،. هم ارزی در حل بین (۴۵) و (۴۶) بدلیل شرط تحدب و صلاحیت قید درست است.

تبصره ۴) قابل ذکر است که ما احتیاج داریم تنها خطی سازیهای قیدهای نامساوی که در حل مسئله اولیه $P(y^k)$ فعال هستند را به حساب آوریم. این امر مهم است چون تعداد خطی سازیهایی که نیاز به حساب آوردن در مسئله اصلی داریم، کاهش می یابد.

تبصره ۵) فرض تحدب (شرط C1) دلالت دارد که (x^k,y^k) در مسئله داخلی (۴۶) برای تمام $k\in F$، موجه است و برای F داریم:

$$F=\{k: y^k \text{ is a feasible solution to } P(y^k)\ \ x\in X\}$$

بوسیله معرفی کردن یک متغیر اسکالر μ_{GOA}، مسئله اصلی می تواند بصورت زیر فرمول بندی شود:

$$\left\{\begin{array}{ll}\min\limits_{x,y,\mu_{GOA}} & \mu_{GOA}\\ S.t. & \left.\begin{array}{l}\mu_{GOA}\ge f(x^k,y^k)+\nabla f(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\0\end{pmatrix}\\ 0\ge g(x^k,y^k)+\nabla g(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix}x-x^k\\0\end{pmatrix}\end{array}\right\} k\in F\\ & x\in X\\ & y\in Y\bigcap V\end{array}\right.$$

تبصره ۶) توجه شود که (۴۷) هوز نیاز به پیدا کردن نمایشی از مجموعه V خواهد داشت. به عبارت دیگر، ما باید متقاعد شویم که وظیفه دهی های ۰–۱ که زیر مسئله های اولیه ناموجه را می سازند در مسئله اصلی (۴۷) نیز ناموجه هستند.

(iii) نمایش V

اجازه دهید مجموعه $\overline{F}$ را برای وظیفه دهی ۰-۱ که برای مسئله اولیه $P(y^k)$ ناموجه است را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$F = \{k : P(y^k) \text{ is infeasible and } x_k \text{ solves the feasibility Problem } (6.47)\}$$

سپس، آن از خاصیت بخش ۷-۳-۱ که محدودیت های زیر است پیروی می کند.

$$0 \geq g(x^k, y^k) + \nabla g(x^k, y^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall k \in F$$

بجز وظیفه دهی های ۰-۱ که مسئله اولیه $P(y^k)$ ناموجه است.

تبصره ۷) محدودیت های (۴۸) مجموعه ای از $y \in Y \bigcap V$ را معرفی می کند و بنابراین می توانیم مسئله اصلی را بصورت درست فرمول بندی کنیم. توجه شود که ما مجموعه $P(y^k)$ را با قید های (۴۸) عوض کردیم که تقریبهای بیرونی در نقاط y^k برای حالت اولیه ناموجه هستند و مسئله موجه بودن (۴۱) دارای حل x^k است.

حال مسئله جامع برای GOA به شکل زیر در می آید:

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{x,y,\mu_{GOA}} & \mu_{GOA} \\ S.t. & \left.\begin{array}{l} \mu_{GOA} \geq f(x^k, y^k) + \nabla f(x^k, y^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \geq g(x^k, y^k) + \nabla g(x^k, y^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \forall k \in F \\ & \left.\begin{array}{l} 0 \geq g(x^k, y^k) + \nabla g(x^k, y^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \forall k \in \overline{F} \\ & x \in X \\ & y \in Y \end{array}\right.$$

تبصره ۸) مسئله (۴۹) تحت شرط های C1 و C2 و C3 هم ارز با مسئله (۴۰) است. مسئله (۴۹) یک مسئله MINLP است.

تبصره ۹) مسئله (۴۹) بوسیله ساده سازی در یک مسیر تکراری مورد بحث قرار خواهد گرفت، چون عملی نیست که آن را بطور مستقیم حل کرد.

تبصره ۱۰) اگر $Y=\{0,1\}^q$ و دارای p قید نامساوی باشیم، مسئله جامع (۴۹) دارای $2^q(p+1)$ محدودیت خواهد بود. بنابراین، حل (۴۹) از طریق ساده سازی در یک چارچوب تکرار پیشنهاد شده است.

۷-۴- توسعه الگوریتمی

الگوریتم GOA می تواند بصورت زیر بیان شود:

گام ۱) یک نقطه اولیه $y^1 \in Y$ یا اگر در دسترس باشد $y^1 \in Y \cap V$ را بگیرید. اولیه $P(y^1)$ را حل کنید یا در صورت ناموجه بودن آن، مسئله موجه بودن (۴۱) را برای $y=y^1$ حل کنید و حل را x^1 قرار دهید. شمارنده تکرار را k=1 تنظیم کنید. اگر اولیه موجه است حد بالایی فعلی را $UBD=P(y^1)=v(y^1)$ تنظیم کنید.

گام ۲) مسئله اصلی ساده شده (RM) را حل کنید.

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,\mu_{GOA}} \quad \mu_{GOA} \\ S.t. \quad \left.\begin{aligned} \mu_{GOA} \geq f(x^k,y^k)+\nabla f(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix} x-x^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \geq g(x^k,y^k)+\nabla g(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix} x-x^k \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \forall k \in F^i \\ \qquad\qquad \left.0 \geq g(x^k,y^k)+\nabla g(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix} x-x^k \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ \forall k \in \bar{F}^i \\ \qquad\qquad x \in X \\ \qquad\qquad y \in Y \\ \sum\limits_{i\in B^k} y_i^k - \sum\limits_{i\in NB^k} y_i^k \leq \left|B^k\right| - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{where} \quad & F^i=\{k \mid k\leq i: \exists a \ feasible \ solution \ x^k \ to \ P(y^k)\} \\ & \bar{F}^i=\{k \mid k\leq i: P(y^k) \, is \ \inf easible \ and \ x^k \ solves \ problem\,(6.41) \ for \ y=y^k\} \end{aligned}$$

اجازه دهید $(y^{k+1},\ \mu_{GOA}^k)$ یک بهینه برای مسئله جامع ساده شده باشد، در جاییکه حد پایینی فعلی جدید بصورت زیر است:

$$LBD=\mu_{GOA}^k$$

و y^{k+1}، نقطه وظیفه دهی ۰-۱ بعدی است که باید در مسئله اولیه $p(y^{k+1})$ درنظر گرفته شود.

اگر $UBD-LBD\leq\varepsilon$، لگوریتم متوقف شود در غیر اینصورت به گام ۱ بروید.

اگر مسئله اصلی ساده شده دارای حل موجه نباشد، الگوریتم را با حل بهینه ایکه توسط یکی از مسائل اولیه موجه داده شده است به پایان ببرید.

تبصره ۱) توجه شود که در مسئله اصلی ساده شده، نیاز داریم که غیر خطی بودن هایی که فقط مربوط به قیدهای فعال در مسائل اولیه موجه هستند را به حساب بیاوریم.

تبصره ۲) تحت شرط های C1 و C2و C3 و $|Y|<\infty$ ، الگوریتم GOA در تعداد محدودی گام به پایان می رسد و حل جهانی برای مسئله (۴۰) را ارائه می دهد.

۷-۵- تحلیل بدترین حالت GOA

Fletchet and Leyffer کارایی بدترین حالت GOA ر ا در تلاشی برای نشان دادن محدودیتهای پتانسیلی که الگوریتم OAی ارائه شده توسط Duran and Grossmann ممکن است با وجود تجربه دلگرم کننده بدست آمده برای مسائل مهندسی نمایش بدهد، مطالعه کردند. آنها مثال زیر را ساختند که برای تما نقاط موجه عدد صحیح نیاز به آزمایش قبل از پیدا کردن حل دارد، به عبارت دیگر شمارش کامل مورد نیاز است.

$$\min_{y} \quad f(y)=(y-\varepsilon)^2$$
$$S.t. \quad y\in\{0,\varepsilon,...,1/2,1\}$$

که $\varepsilon=2^{-p}$ برای برخی $p>1$ است.

با شروع از $y^1=1$ ، که مقدار نزدیک به حل $y^*=\varepsilon$ است، تکرار بعدی $y^2=1$ است که یک نقطه موجه بی نهایت است. سپس GOA در مسیر خود برای رسیدن به حل $y^*=\varepsilon$ بوسیله مشاهده هر شمارش عدد صحیح باقی مانده، به سمت عقب حرکت می کند.

$$y^i=2^{-i+1}\ , \quad i=3,4,...,p+1$$

۷- Generalized Outer Approximation with Exact Penalty (GOA/EP)

تقریب بیرونی تعمیم یافته با جریمه دقیق

۷- ۱- مسئله اولیه

در GOA/EP فرقی بین مسئله اولیه موجه وناموجه قائل نمی شویم، اما در عوض مسئله اولیه زیر توسط Fletchet and Leyffer پیشنهاد شده که بر پایه یک تابع جریمه دقیق است:

$$\begin{cases} \min\limits_{x} & \Phi(x,y^k)=f(x,y^k)+\sigma\left\|g(x,y^k)^+\right\| \\ S.t. & x\in X \end{cases}$$

که X فقط شامل قیدهای خطی برحسب x است؛

$$g(x,y^k)^+=\max(0,g(x,y^k))$$

$\|.\|$ یک میانگین بر $\Re^p$ است و

σ یک پارامتر بقدر کافی بزرگ است.

تبصره ۱) اگر σ به اندازه کافی بزرگ باشد و شرط C3 معتبر باشد، مسائل (۵۰) و $P(y^k)$ دارای همان حل هستند.

۷– ۲– مسئله اصلی

پیروی توسعه ای شبیه به GOA، فرمول بندی زیر را برای مسئله اصلی GOA/EP بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,\mu} \quad \mu \\ S.t. \\ \left.\begin{array}{l} \mu\geq f(x^k,y^k)+\nabla f(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix} x-x^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0\geq g(x^k,y^k)+\nabla g(x^k,y^k)^T\begin{pmatrix} x-x^k \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \forall k\in FP \\ \quad x\in X \\ \quad y\in Y \end{cases}$$

تبصره ۱) توجه شود که در مسئله اصلی (۵۱)، نیاز به بررسی خطی سازیها در اطراف نقاط اولیه ناموجه نداریم.

تبصره ۲) مسئله (۵۱) تحت شرطهای C1 و C2 و C3 هم ارز با (۴۰) است، به این معنی که (x^0,y^0) مسئله (۴۰) را حل می کنند اگر و تنها اگر مسئله (۵۱) را حل کند.

تبصره ۳) با جانشینی مسئله جامع ساده شده با یک ساده سازی از مسئله (۵۱) الگوریتم GOA/EP را بدست می آوریم.

۷– ۳– همگرایی محدود GOA/EP

Fletchet and Leyffer ثابت کردند که: اگر شرطهای C1 و C2 نگه داشته شوند و $|Y|<\infty$ باشد، الگوریتم GOA/EP در تعداد محدودی تکرار به پایان می رسد.

تبصره ۱) توجه شود که شرط C3 برای همگرایی محدود GOA/EP مورد نیاز نیست. این امر به این دلیل وجود دارد که در توابع جریمه دقیق یک صلاحیت قید بخشی از شرایط لازم مرتبه اول را شکل نمی دهد. اما توجه شود که C3 نیاز دارد که مطمئن باشید حل (x^0, y^0) برای الگوریتم GOA/EP، (۴۰) را نیز حل می کند.

۸- مقایسه GBD و الگوریتم های بر پایه OA

در بخش های ۳ تا ۷، GBD و الگوریتم های برپایه OA (یعنی OA،OA/ER،OA/ER/APو GOA) را معرفی نمودیم و تعدادی شباهت و همچنین تفوت های اساسی بین دو دسته از الگوریتم های MINLP را شناسایی کردیم. شباهت اصلی بین GBD و گونه های OA تولید دو توالی جهنده است: (i) یک توالی جهنده بالایی که غیر صعودی است، اگر به حدهای بالایی به روز شده رسیدگی کنیم (ii) یک توالی جهنده پایینی که غیر نزولی است. بنابراین هر دو دسته از الگوریتم ها برپایه یک تجزیه برای مدل MINLP اصلی به زیر مسئله هایی که در هر تکرار بوجود می آیند و حد بالایی و پایینی در حل جستجو شده و متعاقباً نشان دادن شرط های زیر قطعی که دو توالی در تعداد محدودی تکرار، ε - بسته می شوند.

علاوه بر شباهت ذکر شده، تعدادی تفاوت اصلی وجود دارد که در این بخش توضیح داده می شوند. این تفاوت ها می توانند بصورت زیر دسته بندی شوند:

(i) فرمول بندی

(ii) تساویها

(iii) غیر خطی بودن بر حسب y و x-y

(iv) مسئله اولیه

(v) مسئله اصلی

(vi) کیفیت حدهای پایینی

و در ادامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۸-۱ فرمولاسیون

فرمولاسیون های کلی برای مدل های MINLP که می‌توانند از طریق GBD و OA آدرس دهی شوند بصورت زیر هستند:

$$\left[\begin{array}{lll} & & GBD \\ \min\limits_{x,y,\mu} & f(x,y) & \\ S.t. & h(x,y)=0 & \\ & g(x,y)\le 0 & \\ & x\in X & \\ & y\in Y & \end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{lll} & & OA \\ \min\limits_{x,y} & c^T y+f(x) & \\ S.t. & g(x)\le 0 & \\ & Cx+By\le 0 & \\ & x\in X\subseteq \Re^n & \\ & y\in Y=\{0,1\}^q & \end{array}\right.$$

در فرمولاسیون مدل MINLP که GBD می‌تواند آدرس دهی کند، توجه داریم که:

(i) فرض خطی بودن/تفکیک پذیری بر بردار متغیرهای y ساخته ن می‌شود.

(ii) مجموعه های X و Y نیاز به عدد صحیح و پیوسته بودن ندارد، متعاقباً آنها می‌توانند ترکیبی از عدد صحیح – پیوسته باشند.

(iii) ----

(iv) یک انگیزه اصلی برای تفکیک متغیرها به x و y ، روشی است که ساختار مخصوص موجه در مدل را استخراج کردیم.

از سوی دیگر الگوریتم OA دسته ای از مسائل را آدرس دهی می‌کند که در آن فرضیات اضافی نیاز به تعریف دارند، که بصورت زیر هستند:

(i) متغیرهای y بصورت تفکیک پذیر و خطی شرکت می‌کنند.

(ii) متغیرهای x پیوسته هستند در حالیکه متغیرهای y عدد صحیح هستند.

(iii) تساوی های غیر خطی ن می‌توانند بطور صریح بحث شوند مگر از طریق حذف کردن جبری یا عددی.

توجه شود که خصوصیت اصلی GBD در مقایسه با OA اینست که GBD این اجازه را برای استخراج ساختار مخصوص موجود در دامنه x، دامنه y یا دامنه x-y می‌دهد. در همان زمان GBD این اجازه را برای طلب ساختار مخصوص بوسیله تعریف مناسب از بردارهای x و y و دسته بندی مجموعه قیدها، می‌دهد. مثال هایی از درخواست ساختار مخصوص از کارهای (a) --- که تحدب یا خطی بودن بر حسب x برای y ثابت یا برعکس درخواست ده است. (b) --- که خاصیت total unimodularity در تجزیه زیرمسئله اولیه را طلب می‌کند که اجازه می‌دهد بصورت یک مسئله پیوسته حل شود و بنابراین از طبیعت آمیخته مسئله اصلی دوری می‌شود. (c) --- که ساختار نردبان را در زیر مسائل سطح داخلی، برای مسئله برنامه ریزی تصادفی در طراحی فرآیند در خواست کرده است.

۸-۲- قیدهای مساوی غیر خطی

الگوریتم GBD می‌تواند قیدهای مساوی غیر خطی را بطور آشکار و بدون نیاز به حذف جبری یا عددی آدرس دهی کند.

اما OA/ER، همچنین می‌تواند قیدهای مساوی غیر خطی $h(x)=0$ را بوسیله تبدیل آنها به نامساویها با استفاده از راستای ماتریس T^k بحث و بررسی کند:

$$T^k h(x) \le 0$$

$$T^k = \{t_{11}\} = \begin{cases} -1 & if \quad \lambda_1^k < 0 \\ +1 & if \quad \lambda_1^k > 0 \\ 0 & if \quad \lambda_1^k = 0 \end{cases}$$

توجه شود که شرط اضافی برای شبه تحدب از $T^k h(x)$ برای اینکه به هم ارزی بین مدل اصلی و مدل ساده شده با تبدیل تساوی ها به نامساوی ، نیاز به اعمال شدن دارد.

بنابراین شرط شبه تحدب برای $T^k h(x)$ باید در هر تکرار در الگوریتم OA/ER چک شود که این کار در الگوریتم GBD نیاز نیست.

۸-۳- غیر خطی ها در y و x-y

الگوریتم GBD، می‌تواند برای مدلهایی با غیرخطی های صریح در متغیرهای y یا در اتصال دامنه x-y بکار روند، بدون لزو می‌برای معرفی کردن متغیرها یا محدودیت های اضافی.

الگوریتم های OA، OA/ER، OA/ER/AP ن می‌توانند غیر خطی های صریح برحسب متغیرهای y یا در اتصال دامنه x-y را بحث کنند چون آنها بر پایه فرضیاتی برای تفکیک پذیری بر حسب x و y و خطی بودن بر حسب y در بردار y از متغیرها بنا شده اند. اما آنها می‌توانند غیر خطی هایی به شکل زیر را

(i) $\psi(y)$ غیر خطی

(ii) $\phi(x,y)$ غیر خطی

بوسیله فرمولاسیون دوباره بحثی شامل مساول زیر باشد، بحث کنند

(a) اضافه کردن مغیر های جدید

(b) اضافه کردن قیدهای جدید

برای مثال، بوسیله معرفی کردن یک بردار جدید از متغیرهای پیوسته x^1 و یک دسته جدید از قیدهای $x^1 - y = 0$ ، غیر خطی هایی از شکل های (i) و (ii) می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند:

$$\phi(y) = \phi(x^1)$$
$$\phi(x,y) = \phi(x,x^1)$$
$$x^1 - y = 0$$

توجه شود که قیدهای جدید $x^1 - y = 0$ بر حسب y خطی هستند و بنابراین شرط خطی بودن/تفکیک پذیری را برای الگوریتم های OA، OA/ER، OA/ER/AP اغنا می‌کنند. همچنین توجه شود که اگر بخواهیم قیدهای مساوی غیر خطی کلی از شکل زیر را تبدیل کنیم:

$$h(x,y) = 0$$

خواهیم داشت:

$$h(x,x^1)=0$$
$$x^1-y=0$$

و متعاقباً نیاز به چک کردن شرایط هم ارزی برای نامساوی زیر داریم:

$$T^k h(x,x^1)\le 0$$

که احتیاج به شبه تحدب $T^k h(x,x^1)\le 0$ دارد.

بنابراین در اینجا برای اینکه غیر خطی های کلی را بحث کرد، جریمه ای همراه با تبدیلات ذکر شده در الگوریتم های OA، OA/ER، OA/ER/AP است. اما این روی کرد GOA یک گزینه کلی برای بحث کردن فقط بر روی قیدهای نامساوی را معرفی می‌کند.

تبصره ۱) توجه شود که تبدیلات ذکر شده مشابه آنهایی هستند که در V2-GBD بکار رفتند، اگرچه آنها بیشتر محدود کننده هستند چون آنها تنها بر متغیرهای y ۰-۱ بحث می‌کنند.

۸-۴- مسله اولیه

مسائل اولیه برای GBD و الگوریتم های بر اساس OA شبیه هستند اما لزوماً همانند نیستند. فرمولاسیون آنها برای GBD و OA/ER و OA/ER/AP بصورت زیر هستند:

$$\left[\begin{array}{ll} & GBD \\ \min\limits_{x} & f(x,y^k) \\ S.t. & h(x,y^k)=0 \\ & g(x,y^k)\le 0 \\ & x\in X \end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{ll} & OA/ER \\ \min\limits_{x} & c^T y^k + f(x) \\ S.t. & h(x)\le 0 \\ & g(x)\le 0 \\ & Cx+By\le d \\ & x\in X \end{array}\right.$$

توجه شود که در GBD مسئله اولیه می‌تواند بر اساس انتخاب بردار y برای متغیرهایی که می‌توانند یک مجموعه درهم از متغیرهای عددصحیح و پیوسته باشند، یک برنامه ریزی خطی یا غیر خطی باشد.

در OA و گونه های مختلف آن اگر هر یک از $f(x)$,$h(x)$, $g(x)$ غیر خطی باشند، مسئله اولیه یک برنامه ریزی غیر خطی خواهد بود.

مثال ۸-۱- اجازه دهید مثال زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & y+x \\ S.t. & x\exp(y)\le 10 \\ & 0\le x\le 10 \\ & y=0,1 \end{array}$$

در GBD که می‌تواند غیر خطی های $x-y$ را بطور صریح بحث کرد، مسئله اولیه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\min_{x} \quad y+x\\ &S.t. \quad x\exp(y^k)\le 10\\ &\qquad\quad 0\le x\le 10\end{aligned}$$

که یک مسئله برنامه ریزی خطی بر حسب x است.

اما در OA ما نیاز به تعریف یک متغی جدید x^1 و یک قید جدید بصورت زیر داریم:

$$x^1 - y = 0$$

و مسئله بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&\min_{x,y,x^1} \quad y+x\\ &S.t. \quad x\exp(x^1)\le 10\\ &\qquad\quad x^1-y=0\\ &\qquad\quad 0\le x\le 10\\ &\qquad\quad 0\le x^1\le 1\\ &\qquad\quad y=0,1\end{aligned}$$

سپس مسئله اولیه بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&\min_{x,x^1} \quad y^k+x\\ &S.t. \quad x\exp(x^1)\le 10\\ &\qquad\quad x^1-y^k=0\\ &\qquad\quad 0\le x\le 10\\ &\qquad\quad 0\le x^1\le 1\end{aligned}$$

که یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی بر حسب x و x^1 است. توجه شود که x^1 می‌تواند از $x^1 - y^k = 0$ حذف شود.

۸-۵- مسئله اصلی

مسئله اصلی در GBD و گونه های مختلف V1 و V2و V3-GBD شامل یک قید اضافی در هر تکرار هستند. این قید اضافی تابع پایه برای تابع لاگرانژ است (بخش ۳ را ببینید). در نتیجه،مسئله جامع در GBD و کونه های آن هم ارز با یک مسئله کوچک هستند حتی هنگامی که تعداد زیادی تکرار انجام شده باشد.

مسئله اصلی در OA و گونه های آن شامل خطی سازی هایی برای تابع هدف غیر خطی، بردار تساویهای غیر خطی تبدیل شده و نامساوی های غیر خطی اصلی اطراف حل بهینه x^k از مسئله اولیه در هر تکرار است. در نتیجه، در هر تکرار به مسئله اصلی تعداد زیادی قید اضافه می شود. بنابراین، اگر در تعداد کمی تکرار به همگرایی نرسیم، این اثر برای حل کردن مسئله جامع که یک مسئله MINLP است،افزایش می یابد.

نظر به اینکه مسئله جامع در OA و گونه های آن دارای تعداد قیدهای بیشتری نسبت به مسئله اصلی در GBDو گونه های آن دارد، توقع می رود که حد پایینی بوجود آمده توسط OA بهتر از حد پایینی بدست آمده توسط GBD

باشد. اما برای منصف بودن در مقایسه GBD و OA نیاز به بررسی گونه ای از GBD داریم که شرط های OA را به صورت اسمی،تفکیک پذیر و غیر خطی بودن بر حسب متغیرهای y بعلاوه شرط تحدب و صلاحیت قید اغنا کرد هباشد،بر خلاف الگوریتم GBD کلی، گونه مناسب از GBD برای مقایسه، V2-GBD تحت شرط هایی برای تفکیک پذیری و خطی بودن بر حسب بردار y است. Duran and Grossmann نشان دادند که :

$$(LBD)_{OA}^{k} \geq (LBD)_{v2-GBD}^{k}$$

که تحت شرط های تحدب، تفکیک پذیری/ خطی بودن و صلاحیت قید است،حد پایینی بوجود آمده بوسیله الگوریتم OA در هر تکرار k کوچکتر از حد پایینی تولید شده بوسیله V2-GBD است. این امر دلالت می کند که همگرایی در حل مدل MINLP در تکرار های کمتری از طریق OA نسبت به V2-GBD حاصل می شود. اما این لزوماً دلالت نمی کند که انجام محاسباتی کلی در OAنسبت به الگوریتم V2-GBD کمتر است، چون مسئله اصلی برای OA شامل تعداد زیادی قید است که هم ارز با خطی سازیهای اطراف x^k است، در حالیکه خاصیت V2-GBD یک قید در هر تکرار است. بنابراین، یک رابطه جایگزینی بین کیفیت حدهای پایینی و انجام محاسباتی کل وجود دارد.

مثال ۸–۲– دراینجا مثال استفاده شده در بخش ۵ برای OA/ER را بررسی می کنیم و V2-GBD را برای مدل (۳۲) با شروع از همان نقطه شروع $y^1 = (1,1,0)$ بکار می بریم.

حل مسئله اولیه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&C = 1\\
&B_1 = 0\\
&B_2 = (1/0.9) = 1.1111\\
&B_3 = 0\\
&A_2 = 2.03773\\
&A_3 = 0\\
&OBJ = -1.72097
\end{aligned}$$

ضرایب لاگرانژ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^1 = 5.46792\\
&\lambda_2^1 = 0\\
&\lambda_3^1 = 7.77777\\
&\mu_1^1 = 3.2222\\
&\mu_2^1 = 0.53209\\
&\mu_3^1 = 5.8
\end{aligned}$$

سپس تابع لاگرانژ بصورت زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
L(x^1, y, \lambda^1, \mu^1) = &-6.22097 + 3.5\,y_1 + y_2 + 1.5\,y_3 \\
&+ \lambda_1^1 (B_2^1 - \ln(1 + A_2^1)) \\
&+ \lambda_2^1 (B_3^1 - 1.2\ln(1 + A_2^1)) \\
&+ \lambda_3^1 (C^1 - 0.9(B_1^1 + B_2^1 + B_3^1)) \\
&+ \mu_1^1 (C^1 - y^1) \\
&+ \mu_2^1 (B_2^1 - (1/0.9)y_2) \\
&+ \mu_3^1 (B_3^1 - (1/0.9)y_3) \\
= &-6.22097 + 3.5y_1 + y_2 + 1.5\,y_3 \\
&+ 3.2222(1 - y_1) \\
&+ 0.53209(1.1111 - 1.1111\,y_2) \\
&+ 4.3(0 - 1.1111\,y_3) \\
= &-0.2778y_1 + 0.4088y_2 - 4.9444y_3 - 2.4076
\end{aligned}
$$

مسئله اصلی و حل آن برای V2-GBD بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mu_B \\
S.t. \quad & \mu_B \geq 0.2778y_1 + 0.4088y_2 - 4.9444y_3 - 2.4076 \\
& y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1, y_2, y_3 = 0,1
\end{aligned}
$$

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$y_3 = 1$$
$$\mu_B = -7.352$$

بعد از تکرار برای V2-GBD داریم:

$$UBD = -1.72097$$
$$LBD = -7.352$$

توجه شود که بعد از یک تکرار داریم:

$$(LBD)_{OA} = -3 > (LBD)_{v2-GBD} - 7.352$$

حدهای پایینی

در بخش قبلی نشان دادیم که اگر تحدب همراه با شبه تحدب برای $T^k h(x) \leq 0$ و صلاحیت قید نگه داشته شود، توقف OA/ER در تکرارهای کمتری نسبت به V2-GBD اتفاق می افتد، در حالیکه حد پایینی OA/ER بهتر از حد پایینی بدست آمده از V2-GBD است. اما باید توجه شود که ما نیاز به چک کردن این موضوع که آیا $T^k h(x) \leq 0$ در هر تکرار شبه تحدب است، داریم یا خیر. اگر شرط شبه تحدب اغنا نشده باشد، حد پایینی بدست آمده بوسیله OA/ER نمی تواند معتبر باشد، به عبارت دیگر ممکن است این حد پایینی بالای حل جهانی برای مدل

MINLP باشد. این امر ممکن است در اثر پتانسیل خطی سازیهای نامعبر که ممکن است بخشی از منطقه موجه را قطع کنند، اتفاق افتاده باشد.

برای حالت OA/ER/AP ملاک توقف ابتکاری است و بنابراین ممکن ست به بهینه صحیح نرسیم. اگر شرط های تحدب همراه با صلاحیت قید اغنا شوند، گونه های GBD و OA به حل های جهانی خود می رسند.

۹- Generalized Cross Decomposition (GCD)

تقریب خطی دورگه

۹-۱- فرمول بندی

Holmberg(1990) ، رویکرد معرفی شده توسط VanRoy(1983) برای دسته ای از مسائل بهینه یابی را بصورت زیر تعمیم داده است:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} \quad f(x,y) \\
&S.t. \quad g_1(x,y) \le 0 \\
&\qquad\ \ g_2(x,y) \le 0 \\
&\qquad\ \ x \in X \subseteq \Re^n \\
&\qquad\ \ y \in Y = \{0,1\}^q
\end{aligned}
$$

تحت شرط های زیر:

C1: توابع

$$
\begin{aligned}
&f : \Re^n \times \Re^q \to \Re, \\
&g_1 : \Re^n \times \Re^q \to \Re^{P1}, \\
&g_2 : \Re^n \times \Re^q \to \Re^{P2},
\end{aligned}
$$

توابع محدب مناسب برای هر $y \in Y = \{0,1\}^q$ ثابت شده، هستند. (برای مثال f محدب مناسب است اگر $dom(f) = \{x \in \Re^n \mid f < +\infty\}$ تهی نباشد و $f > -\infty, \ \forall x \in dom(f)$)

C2: X یک مجموعه محدب، فشرده و ناتهی است و توابع f، g_1 و g_2 محدود شده و Lipschitzian بر حسب (x,y) هستند.

C3: بهینه یابی با توجه به x برای تابع لاگرانژ می تواند بطور مستقیم از y انجام شود.

تبصره ۱) فرمول بندی (۵۲) هم ارز با یک زیر دسته از مسائل است که GCD مربوط به Holmberg می تواند بکار برده شود.Holmberg،حالت کلی تر از $y \subseteq \Re^q$ را مطالعه کرد و بردار y را مشابه کار انجام شده توسط Geoffrion برای GBD، ارائه داد.

تبصره ۲) شرط C3، خاصیت P از Geoffrion است که در بخش V1-GBD شرح داده شده است. نظر به اینکه مسئله اولیه می تواند موجه یا ناموجه باشد و توابع لاگرانژ تولید شده دارای اشکال متفوت هستند، شرط C3 می تواند بصورت های زیر بیان شود.

حالت I- اولیه موجه

شرط C3 به اینصورت است که در اینجا توابع q_1 و q_3 وجود دارند که

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = f(x,y) + \mu_1^T g_1(x,y) + \mu_2^T g_2(x,y) = q_1(q_3(x,\mu_1,\mu_2),y,\mu_1,\mu_2)$$
$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \mu_1 \geq 0, \forall \mu_2 \geq 0,$$

q_3 یک تابع اسکالر و q_1 صعودی در اولین آرگومان خود است.

حالت II- اولیه ناموجه

شرط C3 به اینصورت است که در اینجا توابع q_2 و q_4 وجود دارند که

$$\bar{L}(x,y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2) = f(x,y) + \bar{\mu}_1^T g_1(x,y) + \bar{\mu}_2^T g_2(x,y) = q_1(q_3(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2),y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$$
$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall (\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2) \in \Lambda,$$
$$where \quad \Lambda = \{\bar{\mu}_1 \in \Re^{P1}, \bar{\mu}_2 \in \Re^{P2} : \bar{\mu}_1 \geq 0, \bar{\mu}_2 \geq 0, \sum_{i=1}^{P1+P2} \mu_i = 1\}$$

q_4 یک تابع اسکالر است و q_2 در اولین آرگومان خود صعودی است.

تبصره ۳) توجه شود که بسبب شرط های C1 و C2 داریم:

(i) q_1 محدب، محدود شده و Lipschitzian بر (x,y) برای $\mu_1^k \geq 0, \mu_2^k \geq 0$ ثابت شده، است.

(ii) q_1 محدب، محدود شده و Lipschitzian بر (x,y) برای $(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2) \in \Lambda,$ ثابت شده، است.

۹-۲- ایده پایه

GCD شامل دو فاز است که فاز زیر مسئله اولیه و همزاد (یعنی فاز I) و فاز مسئله اصلی (یعنی فاز II) و تستهای همگرایی مناسب می باشد. در فاز I زیر مسئله اولیه یک حد بالایی بر حل جستجو شده برای (۵۲) و ضرایب لاگرانژ μ_1^k و μ_2^k برای مسئله همزاد بوجود می آورد. زیر مسئله همزاد یک حد پایینی بر حل (۵۲) و پایه های y^k برای مسئله اولیه بوجود می آورد. هر دوی زیر مسئله اولیه و همزاد برش هایی برای مسئله اصلی در فاز II تولید می کند. در هر تکرار GCD یک زیر مسئله اولیه و همزاد حل می شود و یک تست همگرایی بر روی y^k بکار می رود، در حالیکه یک تست همگرایی همزاد بر روی μ_1^k و μ_2^k بکار می رود. اگر هیچ تست همگرایی شکست نخورد، به فاز

II وارد می شویم که حل مسئلهاصلی را نشان می دهد و متعاقباً به فاز I باز می گردد. شکل ۹ خصوصیات ضروری برای GCD را نشان می دهد.

ایده اساسی در GCD افزایش استفاده از فاز I (یعنی زیر مسئله های اولیه و همزاد) و تا جای ممکن محدود کردن استفاده از فاز II (یعنی مسئله اصلی) بوسیله کاربرد تستهای همگرایی مناسب است. این به این خاطر است که مسئله اصلی بسیار مشکل شناسایی می شود و مشکل زمان اشغال CPU نسبت به زیرمسائل اولیه و همزاد برای فاز I بوجود می آید.

۹-۳- توسعه تئوریکی

این بخش توسعه تئوریکی برای GCD را نمایش می دهد. در ابتدا فاز I با تحلیل زیرمسائل اولیه و همزاد بحث می شود. متعاقباً فاز II برای استنتاج مسئله بحث می شود، در حالیکه تست های همگرایی در انتها بحث می شود.

۹-۳-۱- زیر مسئله های اولیه و همزاد

زیر مسئله های اولیه از ثابت کردن بردار y برای متغیرهای (۵۲) به ترکیب های ویژه ۰-۱ نتیجه می شود و بصورت y^k مشخص شده است و مشکل زیر را بخود می گیرد:

$$
\begin{aligned}
&\min_x \quad f(x,y^k) \\
&S.t. \quad g_1(x,y^k)=0 \qquad\qquad (P(y^k)) \\
&\qquad\;\; g_2(x,y^k)\le 0 \\
&\qquad\;\; x\in X\subseteq \Re^n
\end{aligned}
$$

تبصره ۱) به خاطر شرط C1، زر مسئله اولیه $P(y^k)$ بر حسب x محدب است.

ثابت کردن متغیر های y به y^k ممکن است منجر به زیر مسئله اولیه موجه یا ناموجه شود. بنابراین ما دو حالت مجزا را در ادامه بحث می کنیم:

حالت (i): زیر مسئله اولیه موجه

یک حل موجه برای $P(y^k)$ شامل x^k و $P(y^k)$ است که حدبالایی و ضرایب لاگرانژ μ_1^k و μ_2^k است. تابع لاگرانژ شکل زیر را می گیرد:

$$L(x,y,\mu_1^k,\mu_1^k)=f(x,y)+\mu_1^{k^T}g_1(x,y)+\mu_1^{k^T}g_2(x,y)$$

حالت (ii): زیر مسئله اولیه ناموجه

اگر زیر مسئله اولیه ناموجه باشد، مسئله موجه بودن زیر فرمول بندی می شود:

$$\begin{aligned} &\min_{x} \quad \alpha \\ &S.t. \quad g_1(x,y^k) \le \alpha \qquad\qquad (F\,P(y^k)) \\ &\qquad\;\; g_2(x,y^k) \le \alpha \\ &\qquad\;\; x \in X \subseteq \Re^n \end{aligned}$$

حل $P(y^k)$ که محدب است، ضرایب لاگرانژ $\overline{\mu}_1^k$ و $\overline{\mu}_2^k$ را برای قیدهای نامساوی بوجود می آورد. پس تابع لاگرانژ شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\overline{L}(x,y,\overline{\mu}_1^l,\overline{\mu}_2^l) = \overline{\mu}_1^{l^T} g_1(x,y) + \overline{\mu}_2^{l^T} g_2(x,y)$$

تبصره ۲) توجه شود که $F\,P(y^k)$ یک حد بالایی برای (۵۲) بوجود نمی آورد.

با داشتن μ_1^k بدست آمده (یعنی در حالت الویه موجه) برای حل $P(y^k)$ ، زیر مسئله همزاد برای حالت اولیه موجه، شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \quad f(x,y) + \mu_1^{k^T} g_1(x,y) \\ &S.t. \quad g_2(x,y) \le 0 \qquad\qquad (D(\mu_1^k)) \\ &\qquad\;\; x \in X \subseteq \Re^n \\ &\qquad\;\; y \in Y = \{0-1\}^q \end{aligned}$$

تبصره ۳) زیر مسئله همزاد $D(\mu_1^k)$ می تواند در فضای اتصال x-y نامحدب باشد. در نتیجه حل آن نمی تواند هم ارز با یک حد پایینی بر (۵۲) باشد.

تبصره ۴) توجه شود که تابع هدف در $D(\mu_1^k)$ هم ارز با ساده سازی لاگرانژ است.

اگر زیر مسئله اولیه ناموجه باشد، زیر مسئله همزاد شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \quad \overline{\mu}_1^{l^T} g_1(x,y) \\ &S.t. \quad g_2(x,y) \le 0 \qquad\qquad (F\,D(\overline{\mu}_1^{l^T})) \\ &\qquad\;\; x \in X \subseteq \Re^n \\ &\qquad\;\; y \in Y = \{0-1\}^q \end{aligned}$$

که $\overline{\mu}_1^l$ ضرایب لاگرانژ از $g_1(x,y^k) \le 0$ برای مسئله موجه بودن $FP(y^k)$ هستند.

تبصره ۵) توجه شود که حل $F\,D(\overline{\mu}_1^l)$ هیچ حدی برای (۵۲) بوجود نمی آورد وتنها می تواند یک برش همزاد که $\overline{\mu}_1^l$ را از بررسی ها ی آینده حذف خواهد کرد، را بوجود آورد.

۹-۳-۲- فاز II– مسئله اصلی

مسئله اصلی اولیه، از همان مراحلی که برای استخراج مسئله اصلی در GBD استفاده شد، پیروی می کند. شکل نهایی مسئله اصلی اولیه بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\min_{y,\mu_C} \quad & \mu_C \\
S.t. \quad & \mu_C \geq \inf_{x\in X} \; f(x,y)+\mu_1^T g_1(x,y)+\mu_2^T g_2(x,y), \quad \forall(\mu_1,\mu_2)\geq 0 \\
& 0 \geq \inf_{x\in X} \; \bar{\mu}_1^T g_1(x,y)+\bar{\mu}_2^T g_2(x,y), \quad \forall(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)\in \Lambda \\
& y\in Y
\end{aligned}$$

تبصره ۱) مسئله اصلی (RM) دارای تعداد نامحدودی برش است که هم ارز با هر جفت غیر منفی ضرایب لاگرانژ (μ_1,μ_2) و هر $(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)\in\Lambda$ است. هر برش شامل یک مسئله بهینه یابی (یعنی مینیمم سازی با توجه به $x\in X$ از $\bar{L}(x,y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$ or $L(x,y,\mu_1,\mu_2)$ است) که بر حسب $y\in Y$ پارامتری است و در تئوری باید برای تمام $y\in Y$ حل شود.

تبصره ۲) با استفاده از شرط C3، که در بخش فرمول بندی تحلیل شد، برش هایی که هم ارز با مسائل اولیه موجه هستند می توانند بصورت زیر نوشته شوند:

$$\inf_{x\in X} \; L(x,y,\mu_1,\mu_2)=\inf_{x\in X} \; q_1(q_3(x,\mu_1,\mu_2),y,\mu_1,\mu_2)$$
$$\forall y\,,\; \forall(\mu_1,\mu_2)\geq 0$$

چون q_1 محدب، محدود شده و Lipschitzian بر حسب X است و X محدب و فشرده است، به اینفیموم در (۵۰) می رسیم و بنابراین می تواند آن را با مینیموم جایگزین نمود. بطور مشابه برش هایی که هم ارز با مسائل اولیه ناموجه هستند می توانند بر حسب q_2 و q_4 بصورت زیر نوشته شوند:

$$\inf_{x\in X} \; \bar{L}(x,y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)=\inf_{x\in X} \; q_2(q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2),y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$$
$$\forall y\,,\; \forall(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)\geq 0$$

چون q_2 محدب، محدود شده و Lipschitzian بر حسب X است و X محدب و فشرده است، اینفیموم می تواند با توجه به x ، جایگزین مینیمم شود.

تبصره ۳) چون q_1 و q_2 در اولین آرگومان خود افزایشی هستند و متعاقباً q_3 و q_4، مینیمم سازی q_1 و q_2 با توجه به $x\in X$ می تواند بر حسب $q_3(x,\mu_1,\mu_2)$ و $q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$ بصورت زیر انجام شود:

$$\min_{x\in X} q_1(q_3(x,\mu_1,\mu_2),y,\mu_1,\mu_2)=q_1(\min_{x\in X} q_3(x,\mu_1,\mu_2),y,\mu_1,\mu_2)$$
$$\forall y\ ,\ \forall(\mu_1,\mu_2)\geq 0$$
$$\min_{x\in X} q_2(q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2),y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)=q_2(\min_{x\in X} q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2),y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$$
$$\forall y\ ,\ \forall(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)\geq 0$$

توجه شود که y بر مینیمم سازی با توجه به $x\in X$ ، تأثیری ندارد و بنابراین مینیمم سازیهای

$$\min_{x\in X} q_3(x,\mu_1,\mu_2) \quad and$$
$$\min_{x\in X} q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$$

نیاز به یک بار انجام شدن دارد و برای هر $\forall y\in Y$ معتبر هستند. پس مسئله اصلی اولیه شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\begin{aligned}
&\min_{y,\mu_C} \quad \mu_C\\
&S.t. \quad \mu_C\geq q_1(\min_{x\in X} q_3(x,\mu_1,\mu_2)) \qquad \forall(\mu_1,\mu_2)\geq 0\\
&\qquad\ 0\geq q_2(\min_{x\in X} q_4(x,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2),y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)) \quad \forall(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)\in\Lambda\\
&\qquad\ y\in Y
\end{aligned}$$

تبصره ۴) هنوز فرمول بندی (۵۷) شامل تعداد نا محدودی برش است. انتخاب تعداد محدودی برش می تواند بوسیله ثابت کردن (μ_1,μ_2) و $(\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2)$ به (μ_1^k,μ_2^k) ، $k\in K$ و $(\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l)$ ، $l\in L$ انجام شود، متعاقباً k و l و شاخص های هم ارز با بر همکنش های انجام شده هستند. سپس ما مسئله اصلی ساده شده زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\min_{y,\mu_C} \quad \mu_C\\
&S.t. \quad \mu_C\geq q_1(\min_{x\in X} q_3(x,\mu_1^k,\mu_2^k)) \qquad \forall\ k=1,2,\ldots,K\\
&\qquad\ 0\geq q_2(\min_{x\in X} q_4(x,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l),y,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l)) \quad \forall\ l=1,2,\ldots,L\\
&\qquad\ y\in Y
\end{aligned}$$

تبصره ۵) برای هر (μ_1^k,μ_2^k) ، مینیمم سازی برای q_3 با توجه به $x\in X$

$$\min_{x\in X} \quad q_3(x,\mu_1^k,\mu_2^k)$$

می تواند بطور صریح انجام شود، اجازه دهید کوچک شمارهای آن را x^k بنامیم. بطور مشابه برای هر $\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l$ مینیمم سازی q_4 با توجه به $x\in X$ بصورت زیر است:

$$\min_{x\in X} \quad q_4(x,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l)$$

و می تواند بصورت مجزا انجام شود، اجازه دهید کوچک شمارهای آن را x^{-l} را بنامیم. پس خواهیم داشت:

$$\min_{x\in X} \quad q_3(x,\mu_1^k,\mu_2^k)=q_3(x^k,\mu_1^k,\mu_2^k), \quad k=1,2,\ldots,K$$
$$\min_{x\in X} \quad q_4(x,\mu_1^l,\mu_2^l)=q_4(x^k,\mu_1^l,\mu_2^l), \qquad l=1,2,\ldots,L$$

و q_1 و q_2 شکل زیر را بخود می گیرند:

$$q_1(q_3(x^k,\mu_1^k,\mu_2^k),y,\mu_1^k,\mu_2^k)),\quad k=1,2,\dots,K$$
$$q_2(q_4(x^k,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l),y,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l)),\quad l=1,2,\dots,L$$

با نامیدن برش های (۵۹) و (۶۰) بصورت $q_1^k(y)$ و $q_2^l(y)$، متعاقباً مسئله اصلی اولیه ساده شده به شکل زیر در می آید:

$$\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{y,\mu_C} & \mu_C \\ S.t. & \mu_C \ge q_1^k(y),\quad k=1,2,\dots,K \quad (RPM) \\ & 0 \ge q_2^l(y),\quad l=1,2,\dots,L \\ & y\in Y \end{array}\right.$$
$$where\ \ q_1^k(y)=q_1(q_3(x^k,\mu_1^k,\mu_2^k),y,\mu_1^k,\mu_2^k)),$$
$$q_2^l(y)=q_2(q_4(x^k,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l),y,\bar{\mu}_1^l,\bar{\mu}_2^l)).$$

تبصره ۶) مسئله اصلی اولیه ساده شده، حد پایینی بر حل بهینه (۵۲) را نمایش می گذارد.

مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ (RLRM) [۱]

استخراج مسئله ساده شده لاگرانژ از همزادی لاگرانژ استفاده می کند و همزادسازی را فقط برای $g_1(x,y)\le 0$ بررسی می کند. همزاد شکل زیر را بخد می گیرد:

$$\max_{\mu\ge 0}\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in X,\,y\in Y} & f(x,y)+\mu_1^T g_1(x,y) \\ s.t. & g_2(x,y)\le 0 \\ & x\in X \\ & y\in Y \end{array}\right] \qquad (6.61)$$

تبصره ۷) توجه شود که مسئله داخلی در (۶۱) بر حسب – پارامتری است و برای مقدار ثابت شده $\mu_1=\mu_1^k$ هم ارز با زیر مسئله همزاد $D(\mu^k)$ نشان داده شده در فاز I است.

اگر حل زیر مسئله همزاد $D(\mu^k)$ را بصورت (x^k,y^k) مشخص کنیم، با فرض موجه بودن داریم:

$$h^k(\mu_1)=f(x^k,y^k)+\mu_1^T g_1(x,y),\quad k=1,2,\dots,K$$

سپس مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ بصورت زیر در می آید:

---

[۱] – Lagrange Relaxation Master Problem

$$
\begin{bmatrix}
\max\limits_{\mu_1,\mu'_C} & \mu'_C \\
S.t. & \mu'_C \le h^k(\mu_1), \quad k=1,2,\ldots,K \\
 & \mu_1 \ge 0
\end{bmatrix}
$$

$$where \quad h^k(\mu_1) = f(x^k, y^k) + \mu_1^T\, g_1(x,y)$$

تبصره ۸) حل RLRM یک حد بالایی معتبر را بر (۵۲) ایجاد خواهد کرد، اگر (۵۲) محدب باشد واگر حدب نباشد یک فاصله همزادی اتفاق می افتد و RLRM تنها می تواند به عنوان یک ابتکار استفاده شود. همچنین توجه شود که RLRM یک حد بالایی بر (۶۱) است.

تبصره ۹) اگر مسئله اولیه ناموجه باشد، زیر مسئله همزاد شکل $F\,D(\bar{\mu}_1^l)$ را بخود می گیرد (فاز I را ببیند).

در این حالت داریم:

$$h^l(\bar{\mu}_1) = \mu_1^l\, g_1(x,y), \qquad l=1,2,\ldots,L$$

$$0 \le h(\mu_1), \qquad l=1,2,\ldots,L \quad in\ the RLRM$$

تبصره ۱۰) حل ریز مسئله همزاد $D(\mu_1^k)$ یک حد پایینی بر همزاد لاگرانژ (۶۱) است. این حل همچنین یک حد پایینی معتبر بر (۵۲) است اگر $D(\mu_1^k)$ در فضای اتصال x-y محدب باشد.

۹-۳-۳- تست های همگرایی

تست های همگرایی برای GCD، با استفاده از مفاهیم (i) بهبود حد بالا (ii) بهبود حد پایینی و (iii) بهبود برش انجام می گیرد. یک بهبود حد بالایی هم ارز با یک کاهش در حد بالایی بدست آمده بوسیله زیر مسئله اولیه $P(y^k)$ است.

یک بهبود حد پایینی هم ارز با یک افزایش در حد پایینی بدست آمده توسط زیر مسئله همزاد --- است. یک بهبود برش هم ارز با تولید یک برش جدید است که فعال می شود و بنابراین مسئله اصلی اولیه (RPM) بصورت یک بهبود برش اولیه مشخص می شود. اگر برش در مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ تولید شود، بهبود به عنوان بهبود برش ساده شده لاگرانژ دسته بندی می شود.

ایده اصلی در تستهای همگرایی CT، بدست آوردن جواب هایی برای سه سئوال زیر است:

Q1: y^k می تواند بهبودی در حد بالایی بوجود آورد (یعنی حل $P(y^k)$ می تواند اکیداً کمتر از UBD فعلی باشد؟) ؟

Q2: y^k می تواند بهبودی در حد پایینی بوجود آورد (یعنی حل $D(\mu_1^k)$ می تواند اکیداً بیشتر از LBD فعلی باشد؟) ؟

Q3: آیا می توانیم یک بهبود برش ساده شده لاگرانژ را برای $\overline{\mu}_1^k$ بدست آوریم (یعنی برای حل های نامحدود) ؟

تست های همگرایی CT که می توانند جواب های سئوالات بالا را بوجود آورند بصورت زیر فرمول بندی می شوند:

CTP: اگر $q_1^k(y^C) < UBD \quad for\ k=1,...,K\ \ and\ q_2^1(y^c) \le 0 \quad for\ l=1,...,L$ که y^c، y فعلی است، پس y^c یک بهبود در حد بالایی را میسر می سازد. در غیر اینصورت از یک مسئله اصلی استفاده شود.

CTD: اگر $h^k(\mu_1^c) > LBD \quad for\ \ k=1,...,K$ که μ_1^c، μ_1 فعلی است، پس μ_1^c یک بهبود در حد پایینی را میسر می سازد. در غیر اینصورت از یک مسئله اصلی استفاده شود.

CTDU: اگر $h^l(\overline{\mu}_1^c) > 0 \quad for\ \ l=1,..,L$ که $\overline{\mu}_1^c$، $\overline{\mu}_1$ فعلی است، پس $\overline{\mu}_1^c$ یک بهبود در حد بالایی را میسر می سازد. در غیر اینصورت از یک مسئله اصلی استفاده شود.

تبصره ۱) شرط اول از تست CTP (یعنی $q_1^k(y^C) < UBD \quad for\ k=1,...,K\ \ and\ q_2^1(y^c) \le 0 \quad for\ l=1,...,L$) و تست CTD هم ارز با مسائل موجه است و در نتیجه بصورت تستهای "هگرایی مقداری" شناخته می شوند. شرط دوم تست CTP (یعنی ---–) و تست CTDU هم ارز با مسائل موجه بودن است و به عنوان تست های "همگرایی موجه بودن" شناخته می شوند.

قضیه ۹-۱

تست های همگرایی CTP و CTD برای بهبود حد شرط لازم هستند و برای بهبود حد یا بهبود برش شرط کافی هستند. تست CTDU برای بهبود برش شرط کافی است.

لم ۹-۱

برای مدل (۵۲) که در آن Y یک مجموعه گسسته محدود است، تست همگرایی بعد از تعداد محدودی تکرار شکست می خورد و بنابراین الگوریتم های GBD مدل (۵۲) را تعداد محدودی گام حل می کنند.

تبصره ۲) توجه شود که تست های همگرایی شاملیک بخش اولیه (یعنی CTP) و یک بخش همزاد (یعنی CTD) هستند. در نتیجه، کافی است یکی از آنها بعد از تعداد محدودی مرحله شکست بخورد. در حقیقت این تست CTP است که ما را از شکست خوردن تست های همگرایی بعد از تعداد محدودی تکرار مطمئن می سازد. همچنین توجه شود که تعداد حل های بهینه $D(\mu_1^k)$ برای μ_1^k های مختلف محدود است که دلالت بر این دارد که بهبودهای حد پایینی می تواند بصورت نامحدود و بدون داشتن شکست در تست CTD اتفاق بیافتد. بطور مشابه، بهبود برش می تواند

بصورت نامحدود تکرار شود و در نتیجه تست CTDU می تواند تعداد نامحدودی بهبود برش را بدون شکست بوجود آورد. بر اساس موضوعات مطرح شده در بالا، برای رسیدن به همگرایی محدود (یعنی داشتن تست های همگرایی که در تعداد محدودی مرحله شکست می خورند)، باید به تست CTP اعتماد کنیم که بر پایه مسئله اصلی اولیه است. بنابراین، باید مطمئن شویم که مسئله اصلی اولیه بکار رفته است و منحصراً از مسئله جامع ساده شده لاگرانژ استفاده نکنیم.

۹-۴- توسعه سیستم

شکل ۹ مراحل تولید الگوریتم برای الگوریتم GCD را نشان داده است، در حالیکه در بخش قبل زیرمسئله های اولیه و همزاد، مسئله اصلی اولیه ساده شده، مسئله جامع ساده شده لاگرانژ و تست های همگرایی را شرح دادیم.

پیش از بیان دستورات الگوریتمی GCD، تعاریف زیر را معرفی می کنیم:

P^k: مقدار هدف بهینه برای زیر مسئله اولیه $P(y^k)$ است. این یک حد بالایی معتبر بر (۵۲) است.

UBD: مقدار هدف کوچکترین فعلی برای $P(y^k)$ ها است به عبارت دیگر $UBD = \min_k P(y^k)$. این کوچکترین حد بالای فعلی است.

$(\mu_c)^k$: مقدار تابع هدف بهینه برای مسئله RPM با k برش است. که یک حد پایینی معتبر بر (۵۲) است.

D^k: مقدار هدف بهینه برای مسئله همزاد $D(\mu_1^k)$ است. که یک حد پایینی بر همزاد لاگرانژ و یک حد پایینی معتبر بر (۵۲) است اگر $D(\mu_1^k)$ بر حسب x-y محدب باشد.

LBD: مقدار بیشترین فعلی از حد پایینی است. اگر $D(\mu_1^k)$ بر حسب x-y محدب باشد، داریم:

$$LBD = \max_k \{D^k , (\mu_C)^k\},$$

اگر $D(\mu_1^k)$ بر حسب x-y محدب نباشد، داریم:

$$LBD = \max_k \{(\mu_C)^k\},$$

$(\mu_C')^k$: مقدار تابع هدف بهینه برای مسئله RLRM است. که یک حد بالایی معتبر بر مسئله همزاد لاگرانژ است.

تبصره ۱) توجه شود که P^k دارای رفتار یکنواخت نیست. به عبارت دیگر، ممکن است UBD نوسان داشته باشد اما بطور یکنواخت غیر صعودی است. همچنین توجه شود که D^k هیچ یکنواختی را اغنا نمی کند و بنابراین ممکن است که نوسان داشته باشد. اما $\max\{D^k\}$ بطور یکنواخت غیر نزولی است.

تبصره ۲) LBD بطور یکنواخت غیر نزولی است و $(\mu_C')^k$ بطور یکنواخت غیر صعودی است.

تبصره ۳) توالی خیر به خیز بالایی $\{P^k\}$ و توالی خیر به خیز پایینی $\{\mu_c{}^k\}$ به مقدار بهینه (۵۲) همگرا خواهند شد. این امر هم ارز با اینست که GBD بخشی از GCD است.

تبصره ۴) توالی خیز به خیز بالایی $\{\mu_c{}^k\}$ و توالی خیز به خیز پایینی $\{D^k\}$ به مقدار بهینه همزاد لاگرانژ (۵۸) همگرا خواهند شد. این امر هم ارز با اینست که Dantzig-Wolfe بخشی از GCD است. مقدار بهینه همزاد لاگرانژ (۵۸) در حالت کلی کمتر از حل بهینه (۵۲) است به خاطر وجود پتانسیل برای همزادی، اگر که مسئله غیر محدب باشد.

تبصره ۵) اگر $D(\mu_1^k)$ محدب باشد، GCD از بهترین حد پایینی GBD و Dantzig-Wlofe استفاده می کند.

۹-۴-۱- دستورات الگوریتمی برای GCD

با فرض داشتن یک مقدار حل بهینه محدود برای مسئله (۵۲)،می توانیم الگوریتم GCD کامل را شرح دهیم. شکل ۱۰ گام های الگوریتم GCD را نمایش می دهد.

گام ۱) شمارنده های تکرار را برای زیر مسئله های اولیه موجه k=1 و برای زیر مسئله های اولیه ناموجه l=1 قرار دهید. $UBD=+\infty$ و $LBD=-\infty$ را تنظیم کرده و خطای مجاز همگرایی را $\varepsilon\geq 0$ انتخاب کنید. یک نقطه اولیه y^1 انتخاب کنید.

گام ۲) تست CTP را برای $y=\hat{y}$ بکار ببرید (یعنی برای y فعلی بجز y^1 که نقطه شروع است). اگر تست CTP درست بود به گام ۳ بروید. در غیر اینصورت به گام ۴ بروید.

گام ۳) مسئله اولیه را برای y^1 حل کنید که مسئله $P(\hat{y})$ است. دو حالت خواهیم داشت: زیر مسئله های اولیه موجه و ناموجه.

گام A۳: اولیه مواجه $P(\hat{y})$

زیر مسئله اولیه دارای یک مقدار هدف بهینه $\hat{P}$،یک حل $\hat{x}$ و بردارهای ضریب $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ است. حد بالایی $\underset{\hat{y}}{UBD}=\{\hat{P}\}$ را به روز کنید اگر --- الگوریتم پایان می یابد. در غیر اینصورت به گام A۵ بروید.

گام B۳: اولیه ناموجه ---

زیر مسئله اولیه دارای حل موجه برای --- نیست. مسئله موجه بودن --- را برای تخمین بردار های ضریب --- و --- حل کنید و به گام B۵ بروید.

گام ۴) یک مسئله اصلی ساده شده را حل کنید. ما دو حالت زیر را تشخیص دادیم، مسئله اصلی اولیه ساده شده (RPM) و مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ (RLRM)

گام A۴) مسئله اولیه ساده شده (RPM)

اجازه دهید --- یک حل بهینه برای RPM باشد. --- یک حد پایینی بر (۵۲) است. به عبارت دیگر --- است. اگر --- متوقف شوید، در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

گام B۴) مسئله جامع ساده شده لاگرانژ (RLRM)

اجازه دهید ---- یک حل بهینه برای RLRM باشد. --- یک حد بالای معتبر بر (۵۲) است اگر فقط (۵۲) محدب باشد، به گام ۶ بروید.

گام ۵) تست CTD را برای --- و تست CTDU را برای --- بکار ببرید.

گام A۵) تست CTD برای $\mu_1 = \hat{\mu}_1$

اگر تست CTD درست باشد به گام ۶ بروید. در غیر اینصورت به گام ۸ یا گام B۴ بروید.

گام B۵) تست CTDU برای ---

اگر تست CTDU درست باشد به گام ۷ بروید در غیر اینصورت به گام ۸ یا گام B۴ بروید.

گام ۶) زیر مسئله همزاد را برای --- حل کنید. به عبارت دیگر مسئله --- را حل کنید. اجازه دهید --- حل آن باشد. حد پایینی را بوسیله $LBD = \max\{LBD, \hat{D}\}$ با فرض اینکه -- - بر حسب x-y محدب است، بروز کنید. اگر ---، متوقف شوید در غیر اینصورت k=k+1 و $y^{k+1} = \hat{y}$ را تنظیم کنید و به گام ۲ بروید.

گام ۷) زیر مسئله همزاد --- را حل کنید، اگر زیر مسئله اولیه ناموجه باشد مسئله همزاد بوجود می آید. اجازه دهید --- حل ---- باشد. l=l+1 و ---- را تنظیم کنید و به گام ۲ باز گردید.

گام ۸) مسئله اصلی اولیه ساده شده (RPM) را حل کنید. اجازه دهید --- حل بهینه آن باشد، --- است. اگر ----، متوقف شوید. در غیر اینصورت k=k+1 و --- را قرار داده و به گام ۳ بازگردید.

تبصره ۱) توجه شود که GCD بر اساس این ایده شکل گرفته است که امید می رود در تعداد هر چه کمتر از مسائل جامع حل شود، از آنجایی که آنها مسائل زمان بری هستند. بنابراین، اگر تست های همگرایی CTP، CTD، CTDU در هر تکرار درست باشند، ما در حل جستجو شده برای (۵۲) برش هایی تولید کرده و حدها را بهبود می دهیم. این کار با عنوان فاز " زیر مسئله" معرفی شده است. اگر تعداد کافی برش در فاز زیر مسئله تولید شود، ما برای حل یک مسئله اصلی، فقط نیاز به زمان قبلی کمی برای بدست آوردن حل بهینه داریم.

تبصره ۲) در تکرارهای اولیه، مسائل اصلی فقط دارای تعداد کمی برش هستند و در نتیجه مسائل همزاد و اولیه توقع دارند که حدهای تنگ تری بوجود آورند. در حالیکه تکرارها افزایش می یابد، تعداد برش ها در مسئله اصلی زیاد می شود و توقع می رود که مسئله اصلی حدهای تنگتری بوجود بیاورند. با توجه به موارد بالا، این یک ایده خوب است که در استفاده از مسئله اصلی تا جای ممکن تأخیر ایجاد شود (یعنی بسته به خروجی از تست های همگرایی) و تنها با زیر مسئله همزاد و اولیه فاز اول را شروع کرد. مهم است توجه شود که نرخ همگرایی در GCD وابسته به اینست که زیر مسئله های همزاد و اولیه چگونه موازنه شده اند.

چون هدف ما در صورت امکان، دوری از مسئله جامع است، باید موازنه ای برای زیر مسئله های همزاد و اولیه تولید کنیم که خروجی از زیر مسئله اولیه به عنوان ورودی زیر مسئله همزاد استفاده شود وبر عکس.

تبصره ۳) در شکل ۱۰ توجه شودکه:

(i) اگر تست های CTD و CTDU در تمام تکرارها درست نباشند و فقط از مسئله جامع اولیه ساده شده استفاده شود، GCD به GBD تبدیل می شود.

(ii) اگر تست CTP در تمام تکرارها استفاده نشود و از مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ استفاده شود، GCD به Dantzig-Wolfe تبدیل می شود.

یک انتخاب طبیعی برای مسئله اصلی، استفاده از مسئله جامع اولیه ساده شده است اگر تست CTP درست نباشد و استفاده از مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ، اگر تست CTD یا CTDU درست نباشد. همچنین توجه شود که لازم نیست که از هر دو مسئله اصلی استفاده شود.

تبصره ۴) الگوریتم GCD می تواند با هردوی زیرمسئله اولیه (همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است) یا با زیر مسئله همزاد شروع شود، بسته به اینکه یک نقطه اولیه همزاد یا اولیه خوب در دسترس باشد.

۹-۴-۲- همگرایی محدود GCD

برای فرمول بندی (۵۲)، Holmberg همگرایی محدود برایالگوریتم GCD را که در بخش قبلی شرح داده شد را بصورت زیر ثابت کرد:

قضیه ۹-۲- (همگرایی محدود)

اگر شرط های C1 و C2 و C3 نگه داشته شوند و Y مجموعه ای گسسته و محدود باشد، GCD (۵۲) را تعداد محدودی گام بطور دقیق حل خواهد کرد.

۹-۵- GCD تحت تفکیک پذیری

تحت فرض تفکیک پذیری خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f_1(x) + f_2(y),\\
g_1(x,y) &= g_{11}(x) + g_{12}(y),\\
g_2(x,y) &= g_{21}(x) + g_{22}(y),
\end{aligned}
$$

و مسئله (۵۲) به شکل زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & f_1(x) + f_2(y),\\
S.t. \quad & g_{11}(x) + g_{12}(y) \le 0,\\
& g_{21}(x) + g_{22}(y) \le 0,\\
& x \in X \subseteq \Re^n\\
& y \in Y = \{0,1\}^q
\end{aligned}
$$

تبصره ۱) فرض تفکیک پذیری در نتیجه اغنای شرط C3 بوجود می آید. در حقیقت، شرط C3 می تواند با فرض ضعیفتری نسبت به تفکیک پذیری اغنا شود و این امر در بخش قبلی شرح داده شده است.

در ادامه، در مورد اثر فرض تفکیک پذیری بر زیر مسئله اولیه، زیر مسئله همزاد و مسائل اصلی ساده شده لاگرانژ و اولیه بحث خواهیم کرد.

زیر مسئله اولیه

زیر مسئله اولیه شکل زیر را بخود می گیرد:

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & f_1(x) + f_2(y^k),\\
S.t. \quad & g_{11}(x) + g_{12}(y^k) \le 0,\\
& g_{21}(x) + g_{22}(y^k) \le 0,\\
& x \in X
\end{aligned}
$$

و تحلیل اولیه موجه، ناموجه به همان صورت نشان داده شده برای GCD در بخش پیشین انجام می گیرد.

تبصره ۲) شرط C1 از GCD با فرض تفکیک پذیری بصورتی در می آید که --- و --- و ---- بر حسب x محدب هستند. در نتیجه حل زیر مسئله اولیه --- با یک حل بهینه جهانی هم ارز خواهد بود. در ضمن توجه شود که بسبب شرط C2، زیر مسئله اولیه پایدار است.

زیر مسئله همزاد

زیر مسئله همزاد با فرض تفکیک پذیری بصورت زیر در می آید:

$$\left.\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f_1(x)+f_2(y^k)+\mu_1^{k^T}[g_{11}(x)+g_{12}(y)] \\ S.t. \quad & g_{21}(x)+g_{22}(y)\le 0, \\ & x\in X\subseteq \Re^n \\ & y\in Y=\{0,1\}^q \end{aligned}\right\} D(\mu_1^k)$$

تبصره ۳) اگر علاوه بر تفکیک پذیری بر حسب x و y، فرض کنیم که متغیرهای y بصورت خطی شرکت می کنند، داریم:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= c^T y, \\ g_{12}(y) &= B_1 y, \\ g_{22}(y) &= B_2 y, \end{aligned}$$

سپس زیر مسئله همزاد --- بصورت یک مسئله MINLP محدب در می آید که می تواند برای رسیدن به حل جهانی آن با هر دوی الگوریتم های GCD یا OA حل شود. در نتیجه، در این حالت زیر مسئله های همزاد یک حد پایینی معتبر بر (۵۲) بوجود خواهند آورد. همچنین توجه شود که اگر $f_1(x), g_{11}(x), g_{21}(x)$ را در نقطه x^k خطی سازی کنیم، مسئله همزاد به یک مسئله MILP تبدیل می شود که می تواند با کدهای استاندارد branch and bound (نظیر CPLEX) برای رسیدن به حل جهانی، حل شود. بسیار مهم است که حل این مسئله MILP یک حد پایینی معتبر بر حل (۵۲) است.

شکل مدل MILP برای زیر مسئله همزاد بصورت زیر است:

$$\left.\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f_1^{lin}(x)+c^T y+\mu_1^{k^T}[g_{11}^{lin}(x)+B_1 y] \\ S.t. \quad & g_{21}^{lin}(x)+B_2 y\le 0, \\ & x\in X\subseteq \Re^n \\ & y\in Y=\{0,1\}^q \end{aligned}\right\} D^{lin}(\mu_1^k)$$

تبصره ۴) شکل بالای زیر مسئله همزاد،حد پایینی ضعیف تری نسبت به شکل ناشی شده از حل کردن MINLP محدب برای حل جهانی آن را بوجود خواهد آورد. این امر به این علت است که --- هم ارز با داشتن فقط یک تکرار با الگوریتم OA برای MINLP محدب است.

مسئله جامع اولیه

تحت فرض تفکیک پذیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\min_{x\in X}\ L(x,y,\mu_1,\mu_2) &= \min_{x\in X}\quad f_1(x)+f_2(y)+\mu_1^T[g_{11}(x)+g_{12}(y)]+\mu_2^T[g_{21}(x)+g_{22}(y)]\\ &= f_2(y)+\mu_1^T g_{12}(y)+\mu_2^T g_{22}(y)+\min_{x\in X}\ [f_1(x)+\mu_1^T\ g_{11}(x)+\mu_2^T\ g_{21}(x)]\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\min_{x\in X}\ \bar{L}(x,y,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2) &= \min_{x\in X}\quad \bar{\mu}_1^T[g_{11}(x)+g_{12}(y)]+\bar{\mu}_2^T[g_{21}(x)+g_{22}(y)]\\ &= \bar{\mu}_1^T g_{12}(y)+\bar{\mu}_2^T g_{22}(y)+\min_{x\in X}\ [\bar{\mu}_1^T\ g_{11}(x)+\bar{\mu}_2^T\ g_{21}(x)]\end{aligned}$$

در

نتیجه --- و --- به شکل زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} q_3 &= f_1(x)+\mu_1^T\ g_{11}(x)+\mu_2^T\ g_{21}(x)\\ q_4 &= \bar{\mu}_1^T\ g_{11}(x)+\bar{\mu}_2^T\ g_{21}(x)\end{aligned}$$

مسئله اصلی اولیه ساده شده (RMP)، به شکل بحث شده در بخش قبلی با تعریف های اضافی برای --- و --- است. حل آن یک حد پایینی بر (۵۲) را نمایش می دهد. همچنین توجه شود که اگر خطی بودن در فضای y را هم فرض کنیم، مسئله RMP به یک مسئله MILP تبدیل می شود.

مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ

تحت فرض های (i) تفکیک پذیری بر حسب x و y و (ii) خطی بودن در فضای y، زیرمسئله همزاد می تواند برای حل جهانی آن حل شود یا ساده سازی معتبر از آن (یعنی MINLP محدب خطی شده بر حسب x) می تواند یک حد پایینی معتبر بر (۵۲) بوجود آورد.

در نتیجه، مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ با فرض کردن خطی بودن، شکل زیر را بخود خواهد گرفت:

$$\left.\begin{array}{lll}\min\limits_{\mu_1,\mu'_C} & \mu'_C & \\ S.t. & \mu'_C \le h^k(\mu_1), & k=1,2,\ldots,K\\ & \mu_1 \ge 0 & \end{array}\right\}(RLRM)$$

که $h^k(\mu_1)=f_1(x^k)+c^T y^k \mu_1^T[g_{11}(x)+g_{12}(y^k)]$ با یک تفاوت مهم است که حل آن یک حد بالای معتبر بر (۵۲) است.

تبصره ۵) فرض های تفکیک پذیری بر حسب y – x و خطی بودن در فضای y نتیجه می دهد که --- و RLRM حدهای بالایی و پایینی معتبر بر (۵۲) بوجود می آورند. بنابراین گام های الگوریتم GCD در این حالت می تواند ساده شود. اما بسیار مهم تر اینست که GCD تحت شرط های تفکیک پذیری بر حسب x-y و خطی بودن بر حسب y به یک حل بهینه جهانی برای (۵۲) خواهد رسید.

مثال

این مثال به عنوان توضیحی برای V2-GBD بکار رفته بود و بشکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 + y_3 + 5x^2 \\
S.t. \quad & 3x - y_1 - y_2 \le 0 \\
& -x + 1.2y_2 + 0.25y_3 \le 0 \\
& -y_1 - y_2 - y_3 \le -2 \\
& -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 1) \le 0 \\
& 0.2 \le x \le 1 \\
& y_1, y_2, y_3 = 0,1
\end{aligned}
$$

توجه شود که فرض های تفکیک پذیری بر حسب x-y و خطی بودن بر حسب y اغنا شده اند. ما قیدهای اول و دوم را برای داشتن نامساویها بر حسب $g_1(x,y)$ و قیدهای سوم و چهارم را که تنها بر حسب متغیر y هستند برای داشتن بر حسب $g_2(x,y)$ به بخش های کوچکتر تقسیم می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& f_1(x) = 5x^2, \\
& f_2(y) = y_1 + y_2 + y_3, \\
& g_{11}(x) = (3x, -x), \\
& g_{12}(y) = (-y_1 - y_2, 0.1y_2 + +0.25y_3), \\
& g_{21}(x) = (0,0), \\
& g_{22}(y) = [-y_1 - y_2 - y_3 + 2, -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 1)]
\end{aligned}
$$

تکرار ۱:

$y^1 = (y_1, y_2, y_3)$ و $UBD = \infty$ و $LBD = -\infty$ را قرار می دهیم.

زیر مسئله اولیه بصورت زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3 + 5x^2 \\
S.t. \quad & 3x - 2 \le 0 \\
& -x + 0.35 \le 0 \\
& 0.2 \le x \le 1
\end{aligned}
$$

این مسئله موجه بوده و دارای حل زیر است:

$$x^1 = 0.35, UBD = 3.6125$$
$$\mu_{1,1}^1 = 0,$$
$$\mu_{1,2}^1 = 3.5,$$

که $\mu_{1,1}^1$, $\mu_{1,2}^1$ ضرایب لاگرانژ برای قیدهای $g_1(x,y)$ هستند. با بکار بردن تست CTD خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}h^1(\mu_{1,1}^1, \mu_{1,2}^1) &= f_1(x^1) + f_2(y^1) + \mu_{1,1}^1(3x^1 - y_1^1 - y_2^1) + \mu_{1,2}^1(-x^1 + 0.1y_1^1 + 0.25y_3^1)\\ &= 0.6125 + 3 + \mu_{1,1}^1(-0.95) + \mu_{1,2}^1(0)\\ &= 3.6125 - \mu_{1,1}^1 \cdot 0.95\\ &= 3.6125 - 0 \cdot 0.95 = 3.6125 > -\infty\end{aligned}$$

و بنابراین تست CTD درست است.

برای $\mu_{1,1}^1 = 0, \mu_{1,2}^1 = 3.5$ زیر مسئله همزاد را حل می کنیم که شکل زیر را می گیرد:

$$\begin{aligned}\min_{x,y} \quad & y_1 + y_2 + y_3 + 5x^2 + 3.5[-x + 1.2y_2 + 0.25y_3]\\ S.t. \quad & -y_1 - y_2 - y_3 \le -2\\ & -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 1) \le 0\\ & 0.2 \le x \le 1\\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1\end{aligned}$$

توجه شود که زیر مسئله همزاد یک مسئله MINLP محدب با یک بخش محدب $5x^2$ در تابع هدف است. $5x^2$ را در اطراف $x^1 = 0.35$ خطی می کنیم که نتیجه می شود:

$$5[(0.35)^2 + 2\cdot(0.35)(x - 0.35)] = 0.35x - 0.6125$$

زیر مسئله همزاد خطی شده $D^{lin}(\mu_1^k)$ بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}\min \quad & y_1 + 1.35y_2 + 1.875y_3 - 0.6125\\ S.t. \quad & -y_1 - y_2 - y_3 + 2 \le 0\\ & -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 1) \le 0\\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1\end{aligned}$$

و دارای حل زیر است:

$$y^2 = (1,1,0) \; , \; LBD = 1.7375$$

تکرار ۲:

با بکار بردن تست CTP برای $y = y^2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}q_3 &= 5(0.36)^2 + 0.35 + 0 \cdot g_{11}(x) + 3.5(-0.35) = -0.6125,\\ q_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + 3.5(0.1y_2 + 0.25y_3) - 0.6125,\\ q_1(y^2) &= 1 + 1 + 0 + 3.5(0.1\cdot 1 + 0.25 \cdot 0) - 06125\\ &= 1.7375 < UBD = 3.6125\end{aligned}$$

بنابراین تست CTP درست است و با زیر مسئله اولیه ادامه می دهیم. برای $y = y^2 = (1,1,0)$ زیر مسئله اولیه را حل می کنیم و بدست می آوریم:

$$x^2 = 0.2,$$
$$\mu_{1,1}^2 = 0,$$
$$\mu_{1,2}^2 = 0,$$

و تابع هدف ۲/۲ است. حد بالایی جدید $UBD = 2.2,$ است. با بکار بردن تست CTD داریم:

$$\begin{aligned} h^2(\mu_{1,1}\ ,\ \mu_{1,2}) &= f_1(x^2) + f_2(y^2) \\ &= 2.2 > LBD = 1.7375, \end{aligned}$$

و بنابراین تست CTD درست است.

برای $\mu_{1,1}^2 = \mu_{1,2}^2 = 0$، زیر مسئله همزاد را حل می کنیم که بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 + 5x^2 \\ S.t. \quad & -y_1 - y_2 - y_3 + 2 \le 0 \\ & -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 2) \le 0 \\ & 0.2 \le x \le 1 \\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1 \end{aligned}$$

$5x^2$ را در اطراف $x = 0.2$ خطی می کنیم و داریم:

$$5x^2 = 5[0.4x - 0.04] = 2x - 0.2$$

پس زیر مسئله همزاد خطی شده بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + y_3 + 2x - 0.2 \\ S.t. \quad & -y_1 - y_2 - y_3 + 2 \le 0 \\ & -y_1 - y_2 - 2(y_3 - 2) \le 0 \\ & 0.2 \le x \le 1 \\ & y_1, y_2, y_3 = 0,1 \end{aligned}$$

که دارای حل زیر است:

$$x = 0.2,$$
$$y_1 = 1,$$
$$y_2 = 1,$$
$$y_3 = 0,$$

و مقدار هدف برابر با ۲/۲ است. بنابراین $LBD = 2.2,$ است. در این نقطه داریم:

$$UBD = 2.2,$$
$$LBD = 2.2,$$

و بنابراین توقف می کنیم.

۹- GCD در بهینه یابی پیوسته و پیوسته-گسسته

در تبصره ۱ از بخش فرمول بندی GCD، ذکر کردیم که مسئله (۵۲) یک زیر دسته از مسائلی است که GCD در آنها می تواند بکار رود. این امر بسبب داشتن $Y=\{0,1\}^q$ در (۵۲) بجای حالت کلی برای y که می تواند یک مجموعه پیوسته، گسسته، پیوسته-گسسته، ناتهی و فشرده باشد. هدف اصلی در این بخش بحث کردن در مورد اصلاحات در تحلیل GCD برای حالت های پیوسته و پیوسته-گسسته مجموعه Y است. تحلیل برای زیرمسئله اولیه، زیر مسئله همزاد، مسئله اصلی اولیه و مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ به همان صورت قبل است. تنها تفاوت اینست که اگر مجموعه Y پیوسته باشد، متعاقباً زیر مسئله همزاد و مسئله اصلی اولیه، مسائل بهینه یابی پیوسته غیر خطی بر حسب x و y هستند.

اما تست های همگرایی نیاز به اصلاح شدن بر اساسامکان پذیری برای داشتن تعداد نامحدود بهبودهای همزاد و اولیه در صورت پیوسته بودن Y، دارند و بنابراین در تعداد محدودی گام به توقف نمی رسیم. برای حل این مشکل، Holmberg بهبودهای- ε قویتر زیر را تعریف کرده است:

تعریف ۹-۱ (بهبود حد- ε): بهبود حد- ε بصورت یک بهبود به اندازه ε در حد بالایی یا حد پایینی تعریف می شود.

تعریف ۹-۲ (بهبود برش - ε): بهبود بر ش - ε بصورت تولید یک برش جدید که به اندازه ε بهتر از تمام برش های شناخته شده در بعضی تکرارها تعریف می شود.

Holmberg تستهای همگرایی- ε (CTD- ε) را بصورت زیر بیان کرد:

(CTP- ε) : $q_1^k(y^c) \le U - \varepsilon \ \ for \ \ k=1,2,...,K$ و $q_1^k(y^c) \le -\varepsilon \ \ for \ \ k=1,2,...,L$ که y^c مقدار فعلی y است، سپس y^c بهبود حد بالایی را بوجود خواهد آورد. اگر نه از یک مسئله اصلی استفاده شود.

(CTD- ε) : $h^k(\mu_1^c) \ge LBD+\varepsilon \ \ for \ k=1,2,...,K$ که μ_1^c مقدار فعلی μ_1 است، سپس μ_1^c بهبود حد پایینی را بوجود خواهد آورد. اگر نه از یک مسئله اصلی استفاده شود.

(CTDU- ε) : $h^l(\bar{\mu}_1^c) \ge LBD+\varepsilon \ \ for \ \ l=1,2,...,L$ که $\bar{\mu}_1^c$ مقدار فعلی $\bar{\mu}^1$ است و بهبود برش را بوجود خواهد آورد. اگر نه از یک مسئله اصلی استفاده شود.

تبصره ۱) شرط اول از ε (CTP-) و ε (CTD-) (به عنوان تستهای "همگرایی مقدار- ε" دسته بندی شده اند، آنها هم ارز با مسائل موجه هستند. دومین شرط از ε (CTP-) و ε (CTDU-) (به عنوان تستهای " همگرایی موجه بودن ε" شناخته می شوند، چون هم ارز با مسائل موجه بودن هستند.

تبصره ۲) تستهای همگرایی- ε برای بهبود- ε کافی هستند اما لازم نیستند. یک شرط اضافی که فرض Lipschitz معکوس است، نیاز به تعریف دارد تا شرط لازم را ثابت کند. این شرط اضافی نشان می دهد که برای نقاط دارای یک فاصله معین، مقدار برش موجه بودن باید در بعضی مقادیر متفاوت باشد. این امر در قضیه زیر از Holmberg نشان داده شده است:

قضیه ۹-۳

تستهای همگرایی مقدار- ε از ε (CTP-) (، تستهای موجه بودن از CTP و تستهای همگرایی- ε از ε (CTD-) برای بهبود- ε لازم هستند. تستهای همگرایی- ε برای یکی از موارد زیر کافی هستند:

(i) بهبود حد- ε

(ii) بهبود برش- ε

(iii) بهبود حد- ε_1 و بهبود برش ε_2 که $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

با قضیه بالا به عنوان پایه، Holmberg تناهی تستهای همگرایی را ثابت کرد که بصورت زیر نشان داده شده است:

لم ۹-۲) تستهای همگرایی- ε بعد از تعداد محدودی گام شکست خواهند خورد.

تبصره ۳) توجه شود که در ثابت کردن تناهی، نیاز به استفاده از مسئله اصلی اولیه ساده شده داریم. همچنین توجه شود کافیست که ε (CTP-) (برای تناهی شکست بخورد. اما نمی توانیم نشان دهیم که تست ε (CTD-) (بعد از تعداد محدودی گام شکست خواهد خورد.

تبصره ۴) اگر زیر مسئله اولیه دارای یک حل موجه برای هر --- باشد، الگوریتم GCD برای هر --- داده شده در تعداد محدودی گام به همگرایی- ε محدود (یعنی ----) خواهد رسید. بدیهی است در این حالت تستهای همگرایی موجه بودن- ε مورد نیاز نیست.

تبصره ۵) اگر --- ، سپس ممکن است برای برش های موجه بودن همگرایی asymptotic داشته باشیم، به عبارت دیگر، حل مسائل موجه بودن به صفر نزدیک و نزدیک تر می شوند که هم ارز با حل موجه است، اما هرگز بطور واقعیموجه نمی شوند. یک راه برای غلبه بر این مشکل، تعریف یک حل موجه- ε است که هم ارز با استفاده از یک

تابع جریمه خطی است که برش های ناموجه را به برش های مقدار تبدیل می کند. Holmberg نشان داده است که GCD مجهز شده به تستهای همگرایی - ε، دارای همگرایی asymptotic ضعیفتر نسبت به GBD نیست.

خلاصه

این بخش پایه های بهینه یابی غیر خطی ترکیبی را معرفی کرد. بخش ۱ انگیزش و محیط های کاربرد مدلهای MINLP را معرفی کرد. بخش ۲ توصیف ریاضی برای مسائل MINLP را معرفی کرد و در مورد مجادلات و پیچیدگی محاسباتی مدلهای MINLP بحث شد و یک دید کلی ازالگوریتم MINLP موجود، داد.

بخش ۳ رویکرد GBD را معرفی کرد. بخش ۳-۱ و ۳-۲ فرمول بندی و ایده پایه برای GBD را نمایش دادند. بخش ۳-۳ توسعه تئوریکی برای مسئله اصلی و اولیه را همراه با توصیف هندسی مثله اصلی بحث کرد. بخش ۳-۴ یک رویکرد ساده سازی برای حل مسئله اصلی را بحث کرد، یک استراتژی الگوریتمی کلی برای GBD معرفی کرد و همگرایی محدود آن را بحث کرد. بخش ۳-۵ سه گونه مختلف GBD را معرفی کرد و آنها را با مثالهایی ساده توضیح داد، روابط بین آنها و تأثیر در نظر گرفتن شرط های اضافی برای تفکیک پذیری بر حسب x و y و خطی بودن بر حسب y را بحث کرد. بخش ۳-۶ GBD را برای بهینه یابی پیوسته و پیوسته- گسسته بحث کرد، قضیه همگرایی- ε محدود را معرفی کرد و رویکرد را از طریق یک مثال ساده توضیح داد. برای مطالعه بیشتر در مورد GBD می توان به منابع پیشنهاد شده زیر مراجعه کرد: ---

بخش ۴ رویکرد OA را بحث کرد. بخش های ۴-۱ و ۴-۲ فرول بندی، شرط ها و ایده اصلی OA را معرفی کردند. بخش ۴-۳ توسعه مسئله اصلی و اولیه را بعلاوه توصیف هندسی مسئله اصلی ارائه داد. بخش ۴-۴ الگوریتم OA و همگرایی - ε محدود را معرفی کرد.

بخش ۵ روش OA/ER را برای انجام دادن شرط های مساوی غیر خطی معرفی کرد. بخش های ۵-۱ و ۵-۲ فرمول بندی فرضیات و ایده اصلی را ارائه کردند. بخش ۵-۳ ساده سازی تساوی را بحث نمود و با یک مثال ساده آن را توضیح داد و فرمول بندی مسئله اصلی را معرفی نمود. بخش ۵-۳ الگوریتم OA/ER را بحث کرد و آن را با یک مسئله طرح ریزی کوچک توضیح داد.

بخش ۶ رویکرد OA/ER/AP را بحث کرد. در بخش های ۱ و ۲ فرمول بندی و ایده اصلی معرفی شد در حالیکه در بخش ۳ مسئله اصلی بدست آمد. بخش ۴ الگوریتم OA/ER/AP را نمایش داد و آن را با یک مسئله نامحدب توضیح داد.

بخش ۷ رویکرد GBD را معرفی کرد. بعد از یک بحث مختصر بر فرمول بندی مسئله، فرمول بندیهای زیر مسئله اصلی و اولیه توسعه داده شدند و الگوریتم GOA در بخش ۷-۴ نمایش داده شد. در بخش ۷-۵ تحلیل worst-case از GOA بحث شد در حالیکه در بخش ۷-۶ رویکرد GOA/EP و همگرایی محدودآن بحث شدند.

بخش ۸ رویکرد GBD و رویکردهای بر اساس OA را با توجه به فرمول بندی، قابلیت انجام برای قیدهای مساوی غیر خطی، غیر خطی بودن بر حسب y و اتصال x-y ، مسئله اولیه، مسئله اصلی و کیفیت حدهای پایینی مقایسه کرد.

بخش ۹ رویکرد GCD را معرفی کرد. بخش ۹-۱ فرمول بندی را بحث کرد و بخش ۹-۲ ایده پایه در GCD را بیان نمود. در بخش ۹-۳ توسعه تئوریکی زیر مسئله اولیه، زیرمسئله همزاد، مسئله اصلی اولیه و مسئله اصلی ساده شده لاگرانژ ، همراه با تست های همگرایی و توقف محدو آنها بحث شد. بخش ۹-۴ مراحل الگوریتمی، رابطه بین GCD با Dantzig-Wolfe و GBD و همگرایی محدود برای GCD را معرفی نمود. بخش ۹-۵ به بحث در مورد GCD تحت شرط های تفکیک پذیری بر حسب x وy و خطب بودن بر حسب y همراه با توضیحی برای GCD پرداخت. بخش ۹-۶ اصلاحات مورد نیاز در GCD برای مجموعه Y پیوسته و پیوسته-گسسته را بحث کرد و نتایج همگرایی متناظر را معرفی نمود. برای مطالعه بیشتر در این موضوع می توان به VanRoy(1986)، Holmberg(1991)، Holmberg(1992) و Vlahos(1991) مراجعه نمود.