فصل پنجم – برنامه‌ریزی مجذوری (Quadratic Programming)

هر مسأله بهینه‌سازی که تابع هدف آن به فرم مجذوری باشد و دارای قیود به فرم خطّی باشد، موسوم به برنامه‌ریزی مجذوری می‌باشد. تحلیل برنامه‌ریزی مجذوری به تنهایی کاربرد فراوانی داشته و در عین حال می‌توان آن را در مسائل دیگری نظیر برنامه‌ریزی مجذوری متوالی و روش‌های لاگرانژ افزوده نیز به کار گرفت.

یک فرم کلی مسئله QP به صورت زیر می‌تواند بیان شود :

$$\min \quad \underline{x} \ : \quad Q(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T G\,\underline{x} + \underline{x}^T \underline{d} \tag{۱}$$

$$S.T. \qquad \underline{a}_i^{\,T}\underline{x} = b_i \qquad \text{و} \qquad i \in \xi$$

$$\underline{a}_i^{\,T}\underline{x} \ \geq b_i \qquad \text{و} \qquad i \in I$$

به طوری‌که G یک ماتریس متقارن $n \times n$ ، ξ و I مجموعه‌های متناهی از اندکس‌های قیود مساوی و نامساوی (به‌ترتیب) می‌باشند. همچنین بردارهای $\underline{d}$، $\underline{x}$ و $\{\ \underline{a}_i\ \}$ همگی دارای n مؤلفه هستند و $i \in \xi \cup I$.

مسائل QP نامقید، کاملاً به طور تحلیلی قابل حلّ هستند و QP مقیّد به طور کلّی می‌تواند در چند تکرار مشخص حل شود. تعداد تکرار یا همگرایی بستگی به مشخصات تابع هدف و مقدار قیود نامساوی دارد. اگر ماتریس هسیان G ، یک ماتریس مثبت نیمه معیّن باشد ، آنگاه مسأله QP یک مسأله محدّب است و قطعاً راه حل آن همگرا می‌شود و از کلاس برنامه‌ریزی خطی خواهد بود. مسائل QP محدّب همیشه یک مینیمم دارند، یعنی حلّ محلی آن، مینیمم مطلق نیز می‌باشد و لذا حلّ استاندارد QP محدّب از قضیه KKT به عنوان پشتیبانی ریاضی و از ماشین LP (نظیر روش Simplex) برای حلّ بهره می‌گیرد. باید دقّت کرد که الگوریتم‌های مبتنی بر جستجو (مبتنی بر تعریف) نیز می‌توانند مسأله QP را حل کنند ولی از آنجائیکه ساختار تابع هدف مجذوری نیست و در نتیجه مشتقّات پاره‌ای آن ساختار خطی به خود گرفته و همراه قیود خطی تشکیل یک دستگاه ناسازگار (Underdetermined) می‌دهند، لذا برنامه‌ریزی ریاضی (قضیه KKT) به همراه ماشین حل LP (نظیر سیمپلکس) بدیهی‌ترین یا اولین انتخاب خواهد بود. در ادامه فرض می‌کنیم، مسأله QP محدب ، فرم اولیه زیر را دارد :

(نحوه حذف یا همراهی قیود مساوی قبلاً بحث شده است)

$$\min \qquad f(\underline{x}) = \underline{c}^T\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{x}^T D\,\underline{x} \tag{۲}$$

$$A\underline{x} \leq B \qquad (\text{m تا نامعادله}) \tag{۳}$$

$$S.T.$$

$$\underline{x} \geq 0 \qquad (\text{n تا نامعادله}) \tag{۴}$$

به طوریکه جمله $\underline{x}^T D\,\underline{x}$ مشخصه مجذوری بودن مسأله (تابع هدف) بوده و D یک ماتریس متقارن (ودر صورت محدب بودن، مثبت معین) می باشد. اگر D یک ماتریس صفر باشد، آنگاه مسأله یک برنامه ریزی خطی استاندارد است. با معرفی متغیرهای کمبود s_i (برای $i = 1,2,\ldots,m$) و t_i (برای $i = 1,2,\ldots,n$) و تبدیل قیود نامساوی (۳) به مساوی (اضافه کردن $s_i^{\,2}$) و همچنین قیود نامساوی (۴) به قیود مساوی یا معادلات معمولی (تفاضل $t_j^{\,2}$) ، مسأله مجذوری مقید نامساوی، به مسأله مجذوری مقید زیر تبدیل می‌شود :

$$\min \qquad f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} + \frac{1}{2}\underline{x}^T D \underline{x} \qquad (۵)$$

$$S.T. \qquad \underline{A}_j^T \underline{x} + s_j^2 = -b_j \qquad \text{و} \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad (۶)$$

$$-\underline{x}_j + t_j^2 = 0 \qquad \text{و}\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (۷)$$

به طوریکه بردار A_j ، ستون های ماتریس A (تعریف شده در (۳)) می‌باشند :

$$\underline{A}_j \triangleq [a_{j1} \quad a_{j2} \quad \ldots \quad a_{jn}]^T \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

الگوریتم برنامه ریزی ریاضی، با تعریف لاگرانژین جهت تمشیت قیود (بردار $\underline{\lambda}$ بـرای (۶) و بـردار $\underline{\beta}$ بـرای (۷)) شروع می‌شود :

$$L(\underline{x}, \underline{s}, \underline{T}, \underline{\lambda}, \underline{\beta}) = \underline{c}^T \underline{x} + \frac{1}{2}\underline{x}^T D \underline{x} + \sum_{i=1}^{m} \underline{\lambda}_i (\underline{A}_i^T \underline{x} + s_i^2 - b_i) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (-x_j + t_j^2) \qquad (۸)$$

شرط مینیمم شدن را برای تابع هدف جدید (تابع لاگرانژین) می نویسیم :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - \beta_j = 0 \qquad \text{و}\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (۹)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = 2\lambda_i s_i = 0 \qquad \text{و} \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۰)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = 2\beta_j t_j = 0 \qquad \text{و}\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = A_i^T \underline{x} + s_i^2 - b_i = 0 \qquad \text{و} \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۲)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = -x_j + t_j^2 = 0 \qquad \text{و}\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (۱۳)$$

با تعریف متغیرهای جدید (جهت سهولت و تبدیل به فرم LP):

$$y_i \triangleq s_i^2 \geq 0 \qquad \text{و} \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۴)$$

دقت کنید ، می توانستیم متغیرهای مازاد/کمبود را از اول به صورت توان واحد معرفی کنیم ولـی در الگـوریتم حـل شرط یا تضمین مثبت بودن آن ها را رعایت کنـیم. ایـن در حـالی مـی باشـد کـه از اول نیـت اسـتفاده از الگـوریتم سیمپلکس یا ماشین حل LP را داشته باشیم. لذا برای انعطـاف در حـل کلـی برنامـه ریـزی غیرخطـی (NPL) متغیرهای کمبود/مازاد را به صورت غیرخطی اعمال کردیم. معادله (۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$A_i^T \underline{x} - b_i = -s_i^2 = -y_i \qquad \text{و} \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۵)$$

با ضرب طرفین معادله (۱۰) در s_i و معادله (۱۱) در t_j ، به جفت معادله تبدیل شده زیر می رسیم :

$$\lambda_i s_i^{\,2} = \lambda_i y_i = 0 \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۶)$$

$$\beta_j t_j^{\,2} = 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۱۷)$$

با ترکیب معادلات (۱۵) و (۱۶) و همچنین ترکیب معادلات (۱۳) و (۱۷) ، به معادلات زیر می رسیم که ترکیب خطی دارند :

$$\lambda_i (A_i^T \, \underline{x} - b_i) = 0 \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۸)$$

$$\beta_i x_i = 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۱۹)$$

در نتیجه شرایط لازم به فرم خطی زیر در می آید :

$$c_j - \beta_j + \sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۲۰)$$

$$\underline{A}_i^T \, \underline{x} - b_i = -y_i \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۱)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۲۲)$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۳)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۴)$$

$$\beta_j \geq 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۲۵)$$

$$\lambda_i y_i = 0 \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۲۶)$$

$$\beta_j x_j = 0 \quad \text{و} \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (۲۷)$$

دقت کنید که شرایط لازم، به جز معادلات (۲۶) و(۲۷) ، بسیار شبیه به مسأله استاندارد LP است ، از طرفی معادلات غیرخطی (۲۶) و (۲۷) خیلی هم غیرخطی نیست ! (فرم های دوخطی (bilinear) ، از نظر شاخص های میزان غیرخطی بودن، در گروه رفتاری ملایم قرار می گیرند)، لذا اگر بخواهیم از ماشین حل سیمپلکس استفاده کنیم؛ باید از یک سیمپلکس بهبود یافته، یعنی الگوریتمی که دو دسته معادله (۲۶) و(۲۷) (به لسان KKT ، شرط جامعیت قیود یا متغیرهای مازاد/کمبود) را ارضاء کند باید بهره بگیریم. به طور خلاصه، دسته معادلات شرط جامعیت، باعث شده‌اند که دستگاه معادلات جبری، غیرخطی شوند و اگر به جای این معادلات، یک زیردستگاه خطی داشتیم، آنگاه نیازی به کمپلکس یا دو الگوریتم بهینه‌سازی دیگر نداشتیم ! کافی بود دستگاه خطی را حل کنیم و جواب را چک کنیم آیا همگی مثبت هستند یا خیر. به هر حال ، چه بخواهیم و چه نخواهیم ، معادلات (۲۶) و(۲۷) حضور دارند و اگر آنها را مستثنی کنیم ، دستگاه (۲۰) و (۲۱) ، یک دستگاه ناقص یا ناسازگار (Underdetermined) به زعم حل دستگاههای جبری می‌باشد و اگر از الگوریتم های بهینه‌سازی بخواهیم بهره بگیریم، اولین قدم تعریف یک تابع هدف می‌باشد. یک پیشنهاد طبیعی برای تابع هدف، عبارت مجموع مربعات معادلات (۲۰) و (۲۱) (به صورت $\underline{A}_i^T \underline{x} - b_i + y_i = 0$) ، (۲۶) و(۲۷) می باشد. این تابع هدف مناسب روش های برنامه ریزی غیرخطی (NLP) می‌باشد که نوعاً مبتنی بر تعریف (جستجو) می‌باشند. این در حالیست که برخی دست‌اندرکاران و محققین، تابع هدف را طوری تعریف کرده‌اند که بتوان از روتین‌های قوی، مدیریت‌پذیر و تعقیب‌پذیر LP مثل روش سیمپلکس استفاده کرد. دقت کنید روش سیمپلکس گارانتی می‌کند که به جواب بهینه برسد (در صورتی که مسأله QP موردنظر محدب باشد ، امکان ندارد روش سیمپلکس گزارش degeneracy بکند). یک روش پیشنهادی برای استفاده از سیمپلکس جهت حل دستگاه KKT، تعریف تابع هدف با استفاده از متغیر های مجازی z_i در معادله (۲۰) به صورت زیر می باشد :

(۲۸)

$$c_j-\beta_j+\sum_{i=1}^{n}x_id_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{ij}+z_j=0 \quad \text{و} \quad j=1,2,\dots,n$$

ولذا تابع هدف و در نتیجه مسأله LP را به شکل زیر تعریف می کنیم :

(۲۹)

$$minimize \qquad f=\sum_{j=1}^{n}z_j$$

$$c_j-\beta_j+\sum_{i=1}^{n}x_id_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{ij}+z_j=0 \quad \text{و} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$S.T.$$

$$\underline{A}_i^T\underline{x}+y_i=b_i \qquad \text{و} \qquad i=1,2,\dots,m$$

$$\underline{x}\ge 0 \text{ و } \underline{y}\ge 0 \text{ و } \underline{\lambda}\ge 0 \text{ و } \underline{\beta}\ge 0$$

فقط باید دقت کرد که LP را طوری حل کنیم که همواره دو شرط زیر برقرار باشند :

(۳۰)

$$\lambda_iy_i=0 \qquad \text{و} \qquad i=1,2,\dots,m$$

$$\beta_jx_j=0 \qquad \text{و} \qquad j=1,2,\dots,n$$

نکته و نحوه رعایت دو شرط مذکور نیز بسیار ساده است، باید هنگام حرکت از گوشه‌ای به گوشه‌ای دیگر یا هنگام انتخاب متغیرهای اساسی و غیراساسی یا جدید مواظب باشیم هر دو y_i و λ_i و همچنین جفت x_j و β_jبه طور همزمان در زمره متغیرهای اساسی یا محاسباتی قرار نگیرند بلکه لااقل یکی از آن دو (یعنی y_i یا λ_i و همچنین x_j یا β_j) در زمره متغیرهای غیراساسی (متغیرهای فیکس یا صفر) قرار بگیرند.

مثال : مطلوبست حل مسأله QP زیر :

$$Minimize \qquad f=-4x_1+x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$$

$$S.T. \qquad 2x_1+x_2\le 6$$

$$x_1-4x_2\le 0$$

$$x_1\ge 0 \text{ و } x_2\ge 0$$

حل : با معرفی متغیرهای مازاد وکمبود :

$$y_1\triangleq s_1^2 \text{ و } y_2\triangleq s_2^2 \text{ و } \beta_1\triangleq t_1^2 \text{ و } \beta_2\triangleq t_2^2$$

$\Rightarrow$ مسأله به شکل زیر درمی آید

$$Minimize \qquad f=\begin{bmatrix}-4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$S.T. \qquad \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$$

$$-x_1+\beta_1=0$$

$$-x_2+\beta_2=0$$

ماتریس مجذوری همان $\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}$ با مقادیر ویژه $3\pm\sqrt{5}$ می باشد که هر دو مثبت هستند و لذا ماتریس مذکور مثبت معین (pd) است و در نتیجه با مسأله QP محدب روبرو هستیم.

بعد از نوشتن شرایط لازم و مرتب سازی ، دستگاه LP به صورت زیر درمی آید :

$$2x_1 - 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \beta_1 + z_1 = 4$$
$$-2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 - 4\lambda_2 - \beta_{2_1} + z_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + y_1 = 6$$
$$x_1 - 4x_2 + y_2 = 0$$

❋ شرایط جامعیت قیود :

$$\lambda_1 y_1 = 0 \quad \text{و} \quad \beta_1 x_1 = 0$$
$$\lambda_2 y_2 = 0 \quad \text{و} \quad \beta_2 x_2 = 0$$

یعنی هیچ‌گاه جفت (y_1 و λ_1) نباید همزمان در زمره متغیرهای اساسی قرار بگیرند. همین حالت برای سایر جفت های (y_2 و λ_2) ، (x_1 و β_1) و (x_2 و β_2) نیز جاریست.

تابع هدف نیز به صورت $g = z_1 + z_2$ می باشد ، که بسیار شبیه به سیمپلکس فاز **I** می باشد !

جهت سهولت و یکپارچه سازی برای استفاده از روش حل سیمپلکس ساده ، فاز **I** که در فصل ۴ (برنامه ریزی خطی) شرح داده شد ، متغیرها را به صورت زیر شماره گذاری می کنیم :

$$x_1 \triangleq x_1 \quad \text{و} \quad x_2 \triangleq x_2$$
$$x_3 \triangleq \lambda_1 \quad \text{و} \quad x_4 \triangleq \lambda_2 \quad \text{و} \quad x_5 \triangleq \beta_1 \quad \text{و} \quad x_6 \triangleq \beta_2 \quad \text{و} \quad x_7 \triangleq y_1 \quad \text{و} \quad x_8 \triangleq y_2$$
$$x_9 \triangleq z_1 \quad \text{و} \quad x_{10} \triangleq z_2$$

جفت های ممنوعه (که همزمان نباید اساسی شوند) :

$$(x_3, x_7) \triangleq (\lambda_1, y_1) \quad \text{و} \quad (x_1, x_5) \triangleq (x_1, \beta_1)$$
$$(x_4, x_8) \triangleq (\lambda_2, y_2) \quad \text{و} \quad (x_2, x_6) \triangleq (x_2, \beta_2)$$

جایگزینی و بازترکیب :

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + x_9 + 0x_{10} = 4$$
$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 + 0x_5 - x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + x_{10} = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} = 6$$
$$x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 + 0x_9 + 0x_{10} = 0$$

(تابع هدف فاز **I**) $3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + g = 10$

اگر اطلاعات بالا را وارد تابلوی سیمپلکس فاز **I** کنیم : (به انتخاب متغیرهای اساسی دقت کنید ، آنهایی را گرفتیم که فرمت یکسانی دارند و در عین حال در جفت های ممنوعه شرکت نمی کنند.)

دقت کنید در روش انتخابمان ، متغیرهای اساسی در جفت های ممنوعه شرکت نکرده اند و در نتیجه شرط جامعیت قیود برقرار است.

	N x_1	N x_2	N x_3	N x_4	N x_5	N x_6	B x_7	B x_8	B x_9	B x_{10}	g	b
x_9	2	-2	2	1	-1	0	0	0	1	0	0	4
x_{10}	-2	« **4** »	1	-4	0	-1	0	0	0	1	0	0
x_7	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6
x_8	1	-4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	2	3	-3	-1	-1	0	0	0	0	1	« **4** »

دقت کنید که متغیرهای مجازی را فقط برای دو معادله اول نوشتیم، چون می‌خواهیم حل دستگاه را با ماشین حل سیمپلکس آنهم فقط فاز I انجام دهیم. فقط باید توجه داشت که سطر آخر تابلو (عناصر d_i) از جمع عناصر دو سطر اول بدست می‌آیند، فأفهم !!

اگر بخواهیم از سیمپلکس معمولی استفاده کنیم باید ستون سوم (بزرگترین مثبت ، 3) متناظر با x_3 را انتخاب کنیم. تست نسبت را برقرار می کنیم :

BV	سطر	x_3	b	$ratio$
x_9	1	2	4	$4/2$
x_{10}	2	1	0	$0/1$
x_7	3	0	6	$+\infty$
x_8	4	0	0	≈ 11

همانطور که از تست نسبت معلوم می باشد ، باید کوچکترین نسبت مثبت یعنی $0/1$ ، که متناظر با سطر دوم یا x_{10} هست را اختیار کنیم. در نتیجه x_3 اساسی می شود و x_{10} غیراساسی، فلذا مجموعه جدید متغیرهای اساسی یا محاسباتی می‌شود : x_9 ، $\underline{\underline{x_3}}$ ، $\underline{\underline{x_7}}$ و x_8. نکته سیمپلکس بهبود یافته برای مسائل QP در همین جاست، دو متغیر x_3 و x_7 تشکیل جفت ممنوعه می‌دهند و نمی‌توانند همزمان در مجموعه متغیرهای محاسباتی یا اساسی (همگی مثبت) شرکت داشته باشند. برای حل این معضل، ستون محوری را عوض می‌کنیم و به‌دنبال ستونی می‌گردیم که از نظر مقداری بعد از بزرگترین مقدار مثبت باشد. کاندیدای مناسب ضریب (هزینه تقلیلی) ستون دوم (معادل 2) می‌باشد که از تابلوی سیمپلکس با فلش دوبله نشان داده شده است. پس x_2 ستون متناظر محوری است و باید اساسی شود، برای اینکه بدانیم x_2 باید جای چه متغیری را بگیرد ، تشکیل تست نسبت می‌دهیم :

BV	سطر	x_2	b	$ratio$
x_9	1	-2	4	□
x_{10}	2	4	0	$0/4$
x_7	3	1	6	$6/1$
x_8	4	-4	0	□

نکته : نسبت های شامل عدد منفی در مخرج را در لیست مقایسه یا امتحان نمی آوریم ، چرا که اگر صورت معادل صفر باشد، نمی توان تشخیص داد که نسبت مزبور یک عدد بسیار کوچک مثبت است یا منفی ، فأفهم !!

سطر محوری یا قید محدود کننده، سطر دوم، متناظر با x_{10} می باشد. نهایت اینکه x_2 با x_{10} عوض می شود و مجموعه متغیرهای اساسی جدید به صورت { x_9 و x_2 و x_7 و x_8 } می‌باشد که هیچ ترکیبی از آنها تشکیل جفت ممنوعه را نمی‌دهند و در نتیجه شرط جامعیت قیود ارضاء می‌شود. عنصر محوری از تضارب سطر و ستون محوری بدست می آید (عدد 4) که در تابلوی اول ، پررنگ شده و با علامت« » مشخص شده است. کافیست محورگیری کنیم و عملیات سطری حذفی انجام دهیم. نتایج و تابلوها تا مینیمم شدن g به صفر متعاقباً می‌آید.

	N x_1	B x_2	N x_3	N x_4	N x_5	N x_6	B x_7	B x_8	B x_9	N x_{10}	g	b
x_9	1	0	$5/2$	-1	-1	$-1/2$	0	0	1	$1/2$	0	4
x_2	$-1/2$	1	$1/4$	-1	0	$-1/4$	0	0	0	$1/4$	0	0
x_7	«$5/2$»	0	$-1/4$	1	0	$1/4$	1	0	0	$-1/4$	0	6
x_8	-1	0	1	-4	0	-1	0	1	0	1	0	0
	1	0	$5/2$	-1	-1	$-1/2$	0	0	0	$-1/2$	1	**« 4 »**

	B x_1	B x_2	N x_3	N x_4	N x_5	N x_6	B x_7	B x_8	N x_9	N x_{10}	g	b
x_9	0	0	«$13/5$»	$-7/5$	-1	$-3/5$	$-2/5$	0	1	$3/5$	0	$8/5$
x_2	0	1	$1/5$	$-4/5$	0	$-1/5$	$1/5$	0	0	$1/5$	0	$6/5$
x_1	1	0	$-1/10$	$2/5$	0	$-1/10$	$2/5$	0	0	$-1/10$	0	$12/5$
x_8	0	0	$9/10$	$-18/5$	0	$-9/10$	$2/5$	1	0	$9/10$	0	$12/5$
	0	0	$13/5$	$-7/5$	-1	$-3/5$	$-2/5$	0	0	$-2/5$	1	«$8/5$»

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	g	b
x_9	0	0	1	$-7/13$	$-5/13$	$-3/13$	$-2/13$	0	$5/13$	$3/13$	0	$8/13$
x_{10}	0	1	0	$-9/13$	$1/13$	$-2/13$	$3/13$	0	$-1/13$	$2/13$	0	$14/13$
x_7	1	0	0	$9/26$	$-1/26$	$1/13$	$5/13$	0	$1/26$	$-1/13$	0	$32/13$
x_8	0	0	0	$-81/26$	$9/26$	$-9/13$	$7/13$	1	$-9/26$	$9/13$	0	$24/13$
	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	**« 0 »**

با صفر شدن g ، الگوریتم متوقف می شود :

$$f^* = -88/13 \quad \rightarrow \quad x_2^* = 14/13 \quad \text{و} \quad x_1^* = 32/13$$